**МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА**
**№ 5 • 1990**

УДК 532. 59:532.135



В. С. МИТЛИН, В. Н. НИКОЛАЕВСКИЙ

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ СО СЛОЖНОЙ РЕОЛОГИЕЙ

Рассматриваются слабые нелинейные волны в обобщенной вязкоупругой среде с внутренними осцилляторами. Реологические связи включают в себя старшие производные по времени от напряжений и деформаций, а также их тензорные произведения. Используется метод разложения по малому параметру с введением медленного времени и бегущей пространственной координаты. Первое приближение определяет скорости волн и соотношения между параметрами, эквивалентные результатам акустического анализа на фронтах упругих волн [1]. Второе приближение приводит к эволюционному уравнению относительно скорости смещения. Для этого применяется двойное интегральное преобразование Фурье – Лапласа. Обратный переход к оригиналам искомых функции приводит к интегродифференциальному уравнению эволюции, включающему в себя трансформанту Гильберта и являющемуся обобщением уравнения Бенджамина – Оно, известного по теории глубокой воды.

1. Рассмотрим динамику вязкоупругой сплошной среды, воспользовавшись уравнениями баланса масс и импульса и обобщенным реологическим законом

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i}=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t}+\frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j}=\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \tag{1.2}$$

$$p+Ke=P\left(\frac{D^n p}{Dt^n},\frac{D^m e}{Dt^m};\ p^2,e^2,\ldots\right) \tag{1.3}$$

$$\tau_{ij}-2G\varepsilon_{ij}=T_{ij}\left(\frac{D^n \tau_{kl}}{Dt^n},\ \frac{D^m \varepsilon_{kl}}{Dt^m};\ \tau_{kl}\tau_{kl},\ \varepsilon_{kl}\varepsilon_{kl},\ldots\right) \tag{1.4}$$

$$P(0{,}0;\ 0{,}0,\ldots)=T_{ij}(0{,}0;\ 0{,}0,\ldots)=0$$

где $\rho$ — плотность среды, $v_i$ — скорость смещения, $\sigma_{ij}=\tau_{ij}-p\delta_{ij}$ — напряжение, $e_{ij}=\varepsilon_{ij}+(e/3)\delta_{ij}$ — деформация, $p$ — давление, $e$ — объемная деформация. Функции $P$, $T_{ij}$ включают в себя производные по Олдройду [2] и произвольного порядка ($n$, $m>0$) от компонент напряжений и деформаций, а также любые тензорные произведения последних. Постоянные $K$ и $G$ интерпретируются как обычные упругие модули (объемные и сдвиговый).

Производная по Олдройду используется и в необходимой связи между деформациями $e_{ij}$ и скоростью $v_i$ смещения

$$\frac{De_{ij}}{Dt}\equiv\frac{\partial e_{ij}}{\partial t}+v_k\frac{\partial e_{ij}}{\partial x_k}+e_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+e_{jk}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.5}$$

Частные варианты определяющих законов типа (1.3), (1.4) рассматривались в [1, 3], причем добавление временных производных порядка выше первого ($n$, $m>1$) соответствует присоединению осциллирующих масс к упругим или вязким реологическим элементам. Подобная трактовка отличается от традиционной [4, 5] и приводит к поиску новых динамических эффектов. Так, для объемных волн путем разложения по малому параметру с изменением масштабов длины и времени были получены [3, 5] эволюционные уравнения, обобщающие классические уравнения Кортевега — де Вриза и Бюргерса [7] за счет добавления старших производных по бегущей координате. Для обобщенного таким образом эволюционного уравнения было построено преобразование Бэклунда и найдены новые солитонные решения [8, 9]. При анализе поверхностных волн было обнаружено, что использованный способ [6] разложений приводит к инвариантным решениям В. И. Смирнова — С. Л. Соболева [10—12]. Для нахождения эволюционных уравнений и в связи с фактическим переходом к комплексным переменным предложенный в [6] способ должен быть существенно видоизменен.

2. Будем изучать плоскую нестационарную задачу. Введем координаты

$$X_1=\eta^\alpha(x_1-ct),\ X_2=x_2\eta^\alpha,\ \tau={}^1/_2\eta^\beta t \tag{2.1}$$

Подстановка переменных (2.1) в уравнения динамики дает для балансов масс (1.1) и импульса (1.2) и связи (1.5)

$$\frac{1}{2}\eta^{\beta-\alpha}\frac{\partial\rho}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial X_1}\rho(v_1-c)+\frac{\partial}{\partial X_2}\rho v_2=0 \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{2}\eta^{\beta-\alpha}\frac{\partial\rho v_i}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial X_1}\rho(v_1-c)v_i+\frac{\partial}{\partial X_2}\rho v_2=\frac{\partial}{\partial X_1}(\sigma_{i1})+\frac{\partial}{\partial X_2}(\sigma_{i2}) \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{2}\eta^{\beta-\alpha}\frac{\partial e_{ij}}{\partial\tau}+(v_1-c)\frac{\partial e_{ij}}{\partial X_1}+v_2\frac{\partial e_{ij}}{\partial X_2}+e_{ik}\frac{\partial vj}{\partial X_k}+e_{jk}\frac{\partial v_i}{\partial X_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial X_j}+\frac{\partial v_j}{\partial X_i}\right) \tag{2.4}$$

$$\frac{D\sigma_{ij}}{Dt}=\frac{1}{2}\eta^\beta\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\tau}+\eta^\alpha(v_1-c)\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial X_1}+\eta^\alpha v_2\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial X_2}+\eta^\alpha\sigma_{ik}\frac{\partial v_j}{\partial X_k}+\eta^\alpha\sigma j_k\frac{\partial v_i}{\partial X_k} \tag{2.5}$$

Применим теперь разложения по малому параметру

$$v_i=\eta v_i^{(1)}+\eta^2v_i^{(2)}+\ldots,\qquad e_{ij}=\eta e_{ij}^{(1)}+\ldots,\qquad \rho=\rho_0+\eta\rho_1+\ldots,\qquad \rho_0=\mathrm{const}$$

Тогда уравнения (2.2)—(2.5) дадут первое и второе приближения. Например, уравнение импульса (2.3) дает последовательно

$$\frac{1}{2}\eta^{\beta-\alpha+1}\rho_0\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial\tau}+\eta\frac{\partial}{\partial X_1}\rho_0(v_1^{(1)}\eta-c)(v_i^{(1)}+\eta v_i^{(2)}+\ldots)+$$

$$+\eta\frac{\partial}{\partial X_2}\rho_0(v_2\eta)(v_i^{(1)}+\eta v_i^{(2)}+\ldots)=\eta\frac{\partial\sigma_{ij}^{(1)}}{\partial X_j}+\eta^2\frac{\partial\sigma_{ij}^{(2)}}{\partial X_j} \tag{2.6}$$

а затем при $\beta=\alpha+1$ получим

$$\frac{\partial}{\partial X_1}(\rho_0cv_i^{(1)})+\frac{\partial\sigma_{i1}^{(1)}}{\partial X_1}+\frac{\partial\sigma_{i2}^{(1)}}{\partial X_2}=0 \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial X_1}(\rho_0cv_i^{(2)})+\frac{\partial\sigma_{i1}^{(2)}}{\partial X_1}+\frac{\partial\sigma_{i2}^{(2)}}{\partial X_2}=\Sigma_i \tag{2.8}$$

$$\Sigma_i=\frac{1}{2}\rho_0\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial X_1}(\rho_0v_1^{(1)}-\rho_1c)v_i^{(1)}+\frac{\partial}{\partial X_2}\rho_0v_2^{(1)}v_i^{(1)} \tag{2.9}$$

Правая часть $\Sigma_i$, фигурирующая во втором приближении, зависит лишь от первого приближения скорости.

Аналогично имеем для деформаций в первом и во втором приближении

$$c\frac{\partial e_{ij}^{(1)}}{\partial X_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial X_j}+\frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial X_i}\right)=0 \tag{2.10}$$

$$c\frac{\partial e_{ij}^{(2)}}{\partial X_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial X_j}+\frac{\partial v_j^{(2)}}{\partial X_i}\right)=F_{ij} \tag{2.11}$$

$$F_{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial e_{ij}^{(1)}}{\partial \tau}+v_1\frac{\partial e_{ij}^{(1)}}{\partial X_1}+v_2\frac{\partial e_{ij}^{(1)}}{\partial X_2}+e_{ik}^{(1)}\frac{\partial v_j}{\partial X_k}+e_{jk}\frac{\partial v_i}{\partial X_k} \tag{2.12}$$

Однако для анализа исходной системы во втором приближении требуется лишь первое приближение баланса масс

$$\frac{\partial}{\partial X_1}(\rho_0 v_1^{(1)}-\rho_1 c)+\frac{\partial}{\partial X_2}\rho_0 v_2^{(1)}=0 \tag{2.13}$$

Реологические связи (1.3) и (1.4) дают два приближения

$$p^{(1)}+Ke^{(1)}=0,\qquad \tau_{ij}^{(1)}=2G\varepsilon_{ij}^{(1)} \tag{2.14}$$

$$p^{(2)}+Ke^{(2)}=P(v_i^{(1)},e_{ij}^{(1)},\ldots),\qquad \tau_{ij}^{(2)}+2G\varepsilon_{ij}^{(2)}=T_{ij}(v_i^{(1)},e_{ij}^{(1)},\ldots) \tag{2.15}$$

Будем изучать поверхностные волны в отсутствие поверхностей нагрузки, т. е. потребуем выполнения граничного условия

$$\sigma_{ij}n_j=-pn_i+\tau_{ij}n_j=0,\quad X_2=0,\quad n_1=0,\quad n_2=-1 \tag{2.16}$$

на свободной поверхности. Здесь $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль. Условия (2.16) дают два приближения

$$\sigma_{ij}^{(1)}n_j=-p^{(1)}n_i+\tau_{ij}^{(1)}n_j=Ke^{(1)}n_i+2G\varepsilon_{ij}^{(1)}n_j=0 \tag{2.17}$$

$$\sigma_{ij}^{(2)}n_j=-p^{(2)}n_i+\tau_{ij}^{(2)}n_j=Ke^{(2)}n_i+2G\varepsilon_{ij}^{(2)}n_j+Pn_i-T_{ij}n_j=0 \tag{2.18}$$

3. Преобразуем систему уравнений первого приближения: (2.7), (2.13) и (2.14). Прежде всего определим деформации через первое приближение скоростей

$$c\frac{\partial e^{(1)}}{\partial X_1}=-\left(\frac{\partial v_1}{\partial X_1}+\frac{\partial v_2}{\partial X_2}\right) \tag{3.1}$$

$$c\frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(1)}}{\partial X_1}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial X_j}v_i^{(1)}+\frac{\partial}{\partial X_i}v_j^{(1)}\right)+\frac{1}{3}\delta_{ij}\left(\frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial X_1}+\frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial X_2}\right) \tag{3.2}$$

Последовательная подстановка этих выражений в реологические связи (2.13) и (2.14), а затем в уравнение импульса (2.7) позволяет свести систему к следующим двум уравнениям ($i=1,2$):

$$(c^2-c_s^2)\frac{\partial^2 v_i^{(1)}}{\partial X_1^2}-c_s^2\frac{\partial^2 v_i^{(1)}}{\partial X_2^2}-(c_p^2-c_s^2)\left(\frac{\partial^2 v_j^{(1)}}{\partial X_1\partial X_2}+\frac{\partial^2 v_i^{(1)}}{\partial X_i^2}\right)=0 \tag{3.3}$$

причем $i\neq j$ и по $i$ не суммировать.

Использование представлений (3.1) и (3.2) позволяет преобразовать первое приближение (2.17) граничного условия на свободной поверхности к условиям для поля скоростей

$$\frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial X_1}+\frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial X_2}=0,\quad X_2=0 \tag{3.4}$$

$$(c_p^2-2c_s^2)\frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial X_1}+c_p^2\frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial X_2}=0 \tag{3.5}$$

Итак, в первом приближении надо решать систему уравнений (3.3) с граничными условиями (3.4) – (3.5) на свободной поверхности и условием убывания ($v_i^{(1)} \to 0$) при $x_2 \to \infty$.

Уравнения второго приближения также имеют вид (3.3), (3.4), (3.5), но с отличными от нуля правыми частями. Действительно, система уравнений (2.8), (2.15) должна быть дополнена вторым приближением связей (2.11) деформации и градиентов поля скоростей смещения. Последние имеют вид (вновь по $i$ и $j$ не суммировать)

$$c\frac{\partial e^{(2)}}{\partial X_1} = -\left(\frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial X_1} + \frac{\partial v_2^{(2)}}{\partial X_2}\right) + F_{11} + F_{22} \tag{3.6}$$

$$c\frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(2)}}{\partial X_1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial X_j} + \frac{\partial v_j^{(2)}}{\partial X_i}\right) +$$

$$+\frac{1}{3}\delta_{ij}\left(\frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial X_1} + \frac{\partial v_2^{(2)}}{\partial X^2}\right) + F_{ij} - \frac{1}{3}F_{kl}\delta_{kl}\delta_{ij} \tag{3.7}$$

Результирующая система уравнений поля во втором приближении имеет вид

$$(c_2 - c_s^2)\frac{\partial^2 v_i^{(2)}}{\partial X_1^2} - c_s^2\frac{\partial^2 v_i^{(2)}}{\partial X_2^2} - (c_p^2 - c_s^2)\left(\frac{\partial^2 v_j^{(2)}}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{\partial^2 v_i^{(2)}}{\partial X_i^2}\right) = \Pi_i c^2 \tag{3.8}$$

$$\Pi_i = \frac{1}{\rho_0 c}\left[\frac{\partial \Sigma_i}{\partial X_1} + \frac{\partial^2}{\partial X_1^2}(P\delta_{i1} - T_{i1}) + \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2}(P\delta_{i2} - T_{i2})\right] -$$

$$-\frac{K}{\rho_0 c}\left[\frac{\partial}{\partial X_1}(F_{kl}\delta_{kl})\delta_{i1} + \frac{\partial}{\partial X_2}(F_{kl}\delta_{kl})\delta_{i2}\right] -$$

$$-2\frac{G}{\rho_0 c}\left[\frac{\partial}{\partial X_1}\left(F_{i1} - \frac{1}{3}\delta_{kl}F_{kl}\delta_{i1}\right) + \frac{\partial}{\partial X_2}\left(F_{i2} - \frac{1}{3}F_{kl}\delta_{kl}\delta_{i2}\right)\right]$$

где $i \neq j$; $i, j = 1,2$; по $i$ не суммировать.

Условия на свободной поверхности (2.18) во втором приближении имеют вид

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial X_2} + \frac{\partial v_2^{(2)}}{\partial X_1}\right) = F_{12} \tag{3.9}$$

$$(c_p^2 - 2c_s^2)\frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial X_1} + c_p^2\frac{\partial v_2^{(2)}}{\partial X_2} = (c_p^2 - 2c_s^2)(F_{11} + F_{22}) + 2c_s^2 F_{22} \tag{3.10}$$

причем сохраняется условие убывания решения ($v_i^{(2)} \to 0$) при $x_2 \to \infty$.

Поскольку в первом приближении система уравнений и граничных условий (3.3) – (3.5) однородна, а второе приближение (3.8) – (3.10) отличается лишь наличием ненулевых правых частей в системе, то условие разрешимости последней и должно дать эволюционное уравнение. Оно будет действительно сформулировано относительно скорости в первом приближении, так как правые части системы (3.8) – (3.10) зависят только от $v_i^{(1)}$ и производных от этой величины по $x_1$, $x_2$ и $\tau$. Следовательно, система уравнений первого приближения окажется замкнутой.

4. Применим к полученным уравнениям (3.8) – (3.10) преобразование Фурье (по горизонтальной координате $X_1$) и Лапласа (по вертикальной координате $X_2$). Применение указанного двойного интегрального преобразования вводит трансформанту скорости $V_j$, которая будет удовлетворять алгебраической системе уравнений

$$V_j = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty v_j^{(2)}(\tau, X_1, X_2)\exp(-ikX_1 - qX_2)\,dX_1\,dX_2 \tag{4.1}$$

$$(c^2 - c_s^2)(-k^2 V_j) - c_j^2[q^2 V_j - qQ(V_j) - \omega(V_j)] -$$

$$-(c_p^2-c_s^2)[-ikQ(V_l)+ikqV_l]=\pi_j c^2$$

$$j\neq l;\quad j,l=1,2;\quad c_j=c_s,\quad j=1;\quad c_j=c_p,\quad j=2 \tag{4.2}$$

$$\omega(V_1)+ikQ(V_2)=2f_{12} \tag{4.3}$$

$$c_p^2\omega(V_2)+ikQ(V_1)(c_p^2-2c_s^2)=f_{33} \tag{4.4}$$

Сюда входят двойная трансформанта $\pi_j$ от $\Pi_j$, трансформанты Фурье

$$f_{12}=\int_{-\infty}^{\infty} F_{12}(X_1)\exp(-ikX_1)\,dX_1,\qquad f_{33}=\int_{-\infty}^{\infty} F_{33}(X_1)\exp(-ikX_1)\,dX_1 \tag{4.5}$$

$$F_{33}=(c_p^2-c_s^2)(F_{11}+F_{22})+2c_s^2F_{22}$$

$$\omega(V_l)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikX_1}\left.\frac{\partial v_l}{\partial X_2}\right|_{X_2=0} dX_1,\qquad Q(V_l)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikX_1}v_l\,|_{X_2=0}\,dX_1 \tag{4.6}$$

Заметим, что при нулевых правых частях система (4.2)—(4.4) будет соответствовать первому приближению, т. е. дальнейший анализ является общим для всего решения.

Уравнение (4.2) можно записать в операторном виде

$$\mathbf{AV}=\mathbf{B} \tag{4.7}$$

$$\varphi=\frac{q}{k},\qquad \zeta=\frac{c_p^2}{c_s^2},\qquad \psi=\frac{c^2}{c_s^2} \tag{4.8}$$

$$\mathbf{A}=k^2c_s^2\begin{pmatrix}\zeta-\psi-\varphi^2 & -i(\zeta-1)\varphi\\ -i(\zeta-1)\varphi & 1-\psi-\zeta\varphi^2\end{pmatrix} \tag{4.9}$$

$$\mathbf{B}=c_s^2\begin{pmatrix}-qQ(V_1)-ik(\zeta-1)Q(V_2)-\omega(V_1)+\psi\pi_1\\ -ik(\zeta-1)Q(V_1)-\zeta qQ(V_2)-\zeta\omega(V_2)+\psi\pi_2\end{pmatrix} \tag{4.10}$$

В выражениях (4.9), (4.10) параметры $\varphi$ и $\psi$ пока еще не определены.

Разрешимость операторного уравнения (4.7), согласно теореме Фредгольма [13], эквивалентна ортогональности каждого из решений сопряженного однородного уравнения

$$\mathbf{A}^*(\varphi,\psi)\mathbf{U}=0 \tag{4.11}$$

и вектора $\mathbf{B}$. Однако нетривиальные решения (4.11) существуют, если только

$$\det\mathbf{A}^*(\varphi,\psi)=0 \tag{4.12}$$

Поэтому все независимые частные решения уравнения (4.11) соответствуют значениям $\varphi$, удовлетворяющим уравнению (4.12). В силу определения (4.9) и используя определение сопряженного оператора, получим, что

$$\mathbf{A}^*(\varphi)=\mathbf{A}(-\bar{\varphi}) \tag{4.13}$$

где $\bar{\varphi}$ — комплексно-сопряженное значение $\varphi$.

Как легко проверить [6], уравнение (4.12) имеет корни

$$\varphi_s^2=1-\psi,\qquad \varphi_p^2=1-\psi/\zeta \tag{4.14}$$

Следуя С. Л. Соболеву [11, 12], можно выделить три случая. В первом случае $c>c_p>c_s$, $\varphi_p$, $\varphi_s$ — чисто мнимые числа, что соответствует отражению падающей волны (с продольной и поперечной составляющими). Во втором случае $c_p>c>c_s$, $\varphi_p$ — действительное число, а $\varphi_s$ — мнимое, что соответствует падению поперечной волны под углом больше предельного угла (полного внутреннего отражения). В третьем, исследуемом далее случае мы имеем дело с волной Рэлея: $\varphi_p$, $\varphi_s$ — действительные числа, $c_p > c_s > c$.

Условие ортогональности решения (4.11) сопряженной однородной задачи вектору **B** эквивалентно требованию [14] аналитичности функций $V_l(q)$ в области сходимости интеграла Лапласа. Если ввести $s_l < 0$ — показатель убывания $v_l$ при $X_2 \to \infty$ (см. [15, с. 489]), то $V_l(q)$ аналитичны по $q$ в области $\operatorname{Re} q > \max s_l$ $(l=1, 2)$. Именно поэтому нужно требовать, чтобы изображения $V_l$ были аналитичны в точках

$$q_s = |k|\sqrt{1-\psi}, \quad q_p = |k|\sqrt{1-\psi/\zeta} \tag{4.15}$$

тогда как корни $q$, имеющие противоположный знак, будут лежать в левой полуплоскости ($\operatorname{Re} q < \min s_l$) и заведомо не принадлежать области аналитичности $V_l$. Отсюда выбор $\varphi_p$ и $\psi_s$ таких, что

$$\varphi_s \equiv \frac{q_s}{k} = \sqrt{1-\psi}\operatorname{sign} k, \qquad \varphi_p \equiv \frac{q_p}{k} = \sqrt{1 - \frac{\psi}{\zeta}}\operatorname{sign} k \tag{4.16}$$

одновременно обеспечивает стремление оригинала $v_l$ к нулю при $X_2 \to \infty$ (ср. [15, с. 565]).

Решения уравнения (4.11), соответствующие условиям (4.12) и (4.16), имеют вид

$$\mathbf{U} = (-i(\zeta-1)\varphi,\ \zeta-\psi-\varphi^2), \quad \varphi = \varphi_s, \varphi_p \tag{4.17}$$

Отсюда компоненты решений (4.17) оказываются связанными соотношениями

$$\frac{U_1(\varphi_s)}{U_2(\varphi_s)} = -\frac{i(\zeta-1)\varphi_s}{\zeta-\psi-1+\psi} = -i\varphi_s \tag{4.18}$$

$$\frac{U_1(\omega_p)}{U_2(\varphi_p)} = -\frac{i(\zeta-1)\varphi_p}{-\psi-1+(\psi/\zeta)} = -\frac{i}{\varphi_p}$$

Тем самым допустимо принять в качестве независимых решений (4.11) следующие:

$$\mathbf{U}(\varphi_s) = (-i\varphi_s, 1), \quad \mathbf{U}(\varphi_p) = (-i/\varphi_p, 1) \tag{4.19}$$

5. Определим скалярное произведение в комплексном многомерном пространстве [16] согласно правилу

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_j b_j \tag{5.1}$$

Условие ортогональности пар векторов (4.10) и (4.19) приводит соответственно к двум уравнениям

$$i\varphi_s\left[-Q(V_1)\varphi_s - i(\zeta-1)Q(V_2) - \frac{\omega(V_1)}{k} + \frac{\pi_1(\varphi_s)}{k}\psi\right] +$$

$$+\left[-i(\zeta-1)Q(V_1) - \zeta\varphi_s Q(V_2) - \frac{\zeta\omega(V_2)}{k} + \frac{\pi_2(\varphi_s)}{k}\psi\right] = 0 \tag{5.2}$$

$$\frac{i}{\varphi_p}\left[-Q(V_1)\varphi_p - i(\zeta-1)Q(V_1) - \frac{\omega(V_1)}{k} + \frac{\pi_1(\varphi_p)}{k}\psi\right] +$$

$$+\left[-i(\zeta-1)Q(V_1) - \zeta\varphi_p Q(V_2) - \frac{\zeta\omega(V_2)}{k} + \frac{\pi_2(\varphi_p)}{k}\psi\right] = 0 \tag{5.3}$$

Преобразуем уравнения (5.2) и (5.3) к операторному виду, для чего воспользуемся условиями (4.3) — (4.4) и обозначением $f_{44} = f_{33}/c_p^2$

$$\mathbf{G}_1\mathbf{Q}=\mathbf{D} \tag{5.4}$$

$$\mathbf{G}=\begin{pmatrix} -i(\varphi_s^2+1) & -2\varphi_s \\ -2i & (\zeta-2-\zeta\varphi_p^2)/\varphi_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}=\begin{pmatrix} Q(V_1) \\ Q(V_2) \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} -\dfrac{i\varphi_s\pi_1(\varphi_s)}{k}\psi-\dfrac{\pi_2(\varphi_s)}{k}\psi+\dfrac{2i\varphi_s}{k}f_{12}+\zeta\dfrac{f_{44}}{k} \\ -\dfrac{i\pi_1(\varphi_p)}{\varphi_p k}\psi-\dfrac{\pi_2(\varphi_p)}{k}\psi+\dfrac{2if_{12}}{\varphi_p k}+\zeta\dfrac{f_{44}}{k} \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

Разрешимость системы (5.4) относительно $Q(V_j)$ эквивалентна ортогональности всех решений однородного сопряженного уравнения

$$\mathbf{G}_1^*\mathbf{r}=0 \tag{5.7}$$

вектору $\mathbf{D}$. Нетривиальное решение (5.7) существует, если

$$\det \mathbf{G}_1^*=0 \tag{5.8}$$

Условие (5.8) приводит [6] в уравнению Рэлея

$$\psi^3-8\psi^2+8\left(3-\frac{2}{\zeta}\right)+16\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)=0 \tag{5.9}$$

определяющему $\psi$ — второй свободный параметр системы (4.7), а следовательно, скорость $c=c_R$ волны Рэлея (см. (4.8)), [12]. В этом случае уравнение (5.7) имеет нетривиальное решение

$$\mathbf{r}=(2,\ -(\varphi_s^2+1)), \quad \varphi_s^2=1-\psi \tag{5.10}$$

где $\psi$ уже определено уравнением Рэлея (5.9).

Согласно правилу (5.1), условие ортогональности векторов (5.6) и (5.10) имеет вид

$$2[-i\varphi_s\psi\pi_1(\varphi_s)-\psi\pi_2(\varphi_s)+2i\varphi_s f_{12}+\zeta f_{44}]=$$
$$=(\varphi_s^2+1)\left[-\frac{i}{\varphi_p}\psi\pi_1(\varphi_p)-\psi\pi_2(\varphi_p)+2i\frac{f_{12}}{\varphi_p}+\zeta f_{44}\right] \tag{5.11}$$

Уравнение (5.11) представляет собой то единственное условие совместности, которое связывает правые части уравнений (4.2)—(4.4) и обеспечивает разрешимость задачи нахождения второго приближения поля $v_l$. Поскольку на самом деле уравнение (5.11) оказывается составленным относительно первого приближения скорости $v_l$, определяемого единственной оставшейся неизвестной функцией первого приближения [6], то оно и является искомым уравнением эволюции волны Рэлея и одновременно обеспечивает отсутствие секулярных членов во втором приближении [17].

Число получаемых условий совместности прямо связано с числом нулей уравнения (4.12), лежащих в области аналитичности трансформанты Лапласа. Так, если обе величины $\varphi_s^2$, $\varphi_p^2$ (см. (4.14)) будут отрицательны (случай полного отражения), то потребуются два условия совместности, решение в первом приближении будет определяться двумя независимыми функциями [11, 12].

**6.** Перепишем уравнение (5.11) в следующем виде и применим к нему обратное преобразование Фурье:

$$i\psi\left[\pi_1(\varphi_s)2\varphi_s-\pi_1(\varphi_p)\frac{\varphi_s^2+1}{\varphi_p}\right]+\psi[2\pi_2(\varphi_s)-(\varphi_s^2+1)\pi_2(\varphi_p)]+$$
$$+2i\frac{\varphi_s^2-2\varphi_s\varphi_p+1}{\varphi_p}f_{12}+(\varphi_s^2-1)f_{44}=0 \tag{6.1}$$

$$\Pi_j(y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\pi_j(k)\exp(iky)\,dk \qquad (6.2)$$

Первый и второй члены уравнения (6.1) после обратного преобразования с учетом (4.16) запишутся в виде

$$\frac{\psi}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}[-2|\varphi_s|\exp(-|\varphi_s|kX_2)+(\varphi_s^2+1)\exp(-|\varphi_p|kX_2)/|\varphi_p|]\times$$
$$\times\sin[k(y-X_1)\Pi_1(\tau,X_1,X_2)\,dk\,dX_2\,dX_1 \qquad (6.3)$$

$$\frac{\psi}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}[2\exp(-|\varphi_s|kX_2)-(\varphi_s^2+1)\exp(-|\varphi_p|kX_2)]\cos[k(y-X_1)]\times$$
$$\times\Pi_2(\tau,X_1,X_2)\,dk\,dX_2\,dX_1 \qquad (6.4)$$

С учетом выражений (4.16) предпоследний член (6.1) может быть представлен в виде $\frac{2}{|\varphi_p|}(\varphi_s^2-2\varphi_s\varphi_p+1)[i(\operatorname{sign}k)f_{12}]$, причем произведение, выделенное квадратными скобками, соответствует свертке оригиналов функций $i\operatorname{sign}k$ и $f_{12}$.

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}i\operatorname{sign}k\exp(iky)\,dk=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[i\cos(ky)-\sin(ky)]\operatorname{sign}k\,dk=$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\sin ky\,dk=-\frac{1}{\pi}\lim_{\alpha\to0}\int\limits_{0}^{\infty}\sin(ky)\exp(-\alpha k)\,dk=-\frac{1}{\pi}\lim_{\alpha\to0}\frac{y}{\alpha^2+y^2}$$

Искомая свертка имеет вид

$$\lim_{\alpha\to0}\left[-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{z}{\alpha^2+z^2}F_{12}(y-z)\,dz\right]=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{F_{12}(y-z)}{z}\,dz=$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{F_{12}(z)}{y-z}\,dz\equiv H(f_{12}) \qquad (6.5)$$

где символ $H$ означает преобразование Гильберта [7].

Последний член уравнения (6.1) переходит в следующее выражение:

$$\zeta(\varphi_s^2-1)F_{44}(y)\equiv\zeta\psi F_{44}(y) \qquad (6.6)$$

Вычислив внутренние интегралы (6.3) и (6.4), а также использовав результаты (6.5) и (6.6), можно видеть, что уравнение (6.1) в оригиналах имеет вид

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{2|\varphi_s|}{\varphi_s^2X_2^2+(y-X_1)^2}-\frac{(\varphi_s^2+1)|\varphi_p|}{\varphi_p^2X_2^2+(y-X_1)^2}\right][X_2\Pi_2(\tau,X_1,X_2)-$$
$$-(y-X_1)\Pi_1(\tau,X_1,X_2)]\,dX_2\,dX_1=\frac{2(\varphi_s^2-2\varphi_s\varphi_p+1)}{|\varphi_p|\psi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{F_{12}(\tau,X_1)}{y-X_1}\,dX_1-$$
$$-\zeta\frac{\varphi_2^2-1}{\psi}\pi F_{44}(y)$$

Следовательно, эволюционное уравнение является интегродифференциальным, как и в теории волн на глубокой воде [7] (Уравнение Бенджамина — Оно).

Решение уравнений (3.3)—(3.5), имеет вид

$$v_1^{(1)} = \mathrm{Re}\left[ -i|\varphi_s| f(\xi_s,\tau) + \frac{-\varphi_s^2-1}{2i|\varphi_p|} f(\xi_p,\tau) \right]$$

$$v_2^{(1)} = \mathrm{Re}\left[ f(\xi_s,\tau) + \frac{-\varphi_s^2-1}{2} f(\xi_p,\tau) \right] \tag{6.7}$$

$$|\varphi_s| = 1-\psi; \quad |\varphi_p| = 1-\psi/\zeta; \quad \xi_s = X_1 + i|\varphi_s|X_2; \quad \xi_p = X_1 + i|\varphi_p|X_2$$

где $f(\xi,\tau)$ — аналитическая в полуплоскости $X_2>0$ функция. Заметим, что в классическом решении [11, 12] была использована аналитичность функций тока. Введение [6] одной комплексной переменной $\xi$ вместо двух, $X_1$ и $X_2$, сводит уравнения (3.3)—(3.5) к системе линейных алгебраических уравнений, так как дифференцирование по двум действительным переменным можно заменить операцией комплексного дифференцирования. Эквивалентность дифференцирования $\partial/\partial\xi$ и в отдельности $\partial/\partial X_1$, $\partial/\partial X_2$ соответствует выполнению условий Коши — Римана и, следовательно, аналитичности решений. Из теории функций комплексного переменного следует, что значения действительной части функции $f$ на свободной поверхности полностью определяют саму функцию во всей полуплоскости при помощи интеграла Шварца [15, с. 224]

$$f(X_1+i|\varphi_{s,p}|X_2) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\, f(X_1')\,dX_1'}{X_1'-X_1-i|\varphi_{s,p}|X_2} \tag{6.8}$$

Уравнения (6.7), (6.8), (5.11) определяют эволюцию нелинейной волны Рэлея при реологических связях общего вида (1.3), (1.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Николаевский В. Н.* Вязкоупругость с внутренними осцилляторами как возможная модель сейсмоактивной среды // Докл. АН СССР, 1985. Т. 283. № 6. С. 1321.
2. *Oldroyd J. G.* On the formulation of rheological equations of state // Proc. Roy. Soc. London. 1950. V. A200. № 1063. P. 523–541.
3. *Николаевский В. Н.* Нелинейные волны в грунтах и трещиноватых горных породах // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1988. № 6. С. 31–38.
4. *Алфрей Т., Гарни Е. Ф.* Динамика вязкоупругого поведения // Реология. Теория и приложения. Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. С. 459–507.
5. *Ржаницын А. Р.* Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. 416 с.
6. *Николаевский В. Н.* Уединенные волны и землетрясения // Механика и научно-технический прогресс. Т. 3. М.: Наука, 1988. С. 237–250
7. *Albowitz M. J., Segur H.* Solitons and the inverse scattering transform. Philadelphia, 1981. (Рус. перев.: М.: Дж. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 480 с.)
8. *Кудряшов Н. А.* Преобразования Бэклунда для уравнения в частных производных четвертого порядка с нелинейностью Бюргерса – КДФ // Докл. АН СССР, 1988. Т. 300. № 2. С. 342–345.
9. *Кудряшов Н. А.* Точные солитонные решения обобщенного эволюционного уравнения волновой динамики // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 465–470.
10. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. М.: Наука, 1969. 672 с.
11. *Соболев С. Л.* Некоторые вопросы теории распространения колебаний // Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л.; М.: ОНТИ. Гл. ред. общетехн. лит., 1937. С. 468–617.
12. *Соболев С. Л.* Применение теории плоских волн к задаче H. Lamb'a // Тр. Сейсмолог. ин-та, 1932. № 18. 41 с.
13. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 с.
14. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление по двум переменным и его приложения. М.: Физматгиз, 1958. 178 с.
15. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного М.: Наука, 1965. 716 с.
16. *Lankaster P.* Theory of matrices. N. Y.; L.: Acad. Press, 1969. (Рус. перев.: Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1982. 269 с.)
17. *Nayfeh A. H.* Perturbation methods. New York a. o.: Wiley, 1973. 425 p. (Рус. перев.: Найфэ А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.)



Москва — Поступила в редакцию 4.IV.1989