

УДК 532.546

© 1990 г.

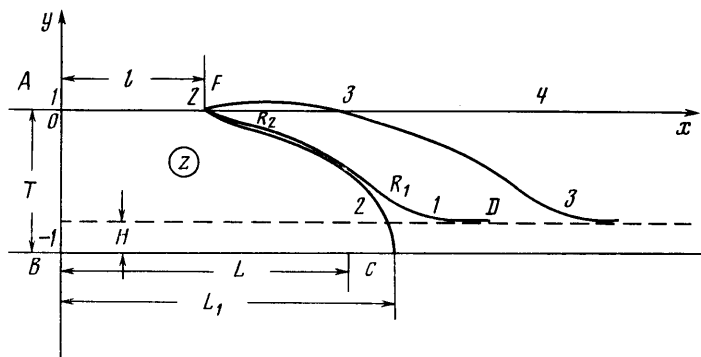
Э. Н. БЕРЕСЛАВСКИЙ

О ВЛИЯНИИ НЕПРОНИЦАЕМОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В ОРОШАЕМОМ ПОЧВЕННОМ СЛОЕ НА ФИЛЬТРАЦИЮ ИЗ КАНАЛА

В работе [1] исследована плоская установившаяся фильтрация из канала через почвенный слой в нижележащий безнапорный пласт, содержащий на своей кровле непроницаемый участок, при равномерной постоянной инфильтрации на свободную поверхность. Приводятся результаты численных расчетов и дается анализ влияния физических параметров модели на основные фильтрационные характеристики. Рассмотрены предельные случаи течения в отсутствие следующих факторов: включения [2], канала [3], канала и подпора [4], а также подпора и инфильтрации [5]. Изучена смежная схема, решение для которой получается из установленных зависимостей, но за рамками ограничения для одного из параметров отображения.

1. Постановка задачи. На многих территориях орошаемого земледелия непосредственно под покровной толщей залегают напорные водоносные пласты — галечники, крупнозернистые пески. Это обстоятельство существенно образом отражается на характере фильтрационных процессов. Учет их особенностей весьма важен для определения правильного подхода к мелиорированию почвогрунтов такого типа.

В работах [2, 6—8] рассмотрен ряд задач фильтрации из каналов в почвах с сильнопроницаемым основанием. В настоящей статье ставится



Фиг. 1

задача глубже и детальнее изучить структуру течения и его закономерности в присутствии такого важного фактора, каким является непроницаемое включение. На фиг. 1 схематично изображена правая половина плоского установившегося течения грунтовых вод из канала (с малой глубиной воды) ширины $2l$ через почвенный слой мощности T в нижележащий сильнопроницаемый напорный горизонт при равномерной инфильтрации интенсивности ε на свободную поверхность. На кровле пласта расположен непроницаемый участок, моделируемый горизонтальным отрезком длины $2L$.

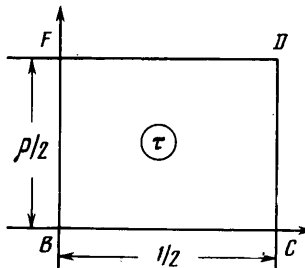
С математической стороны задача состоит в нахождении комплексного потенциала течения $\omega = \varphi + i\psi$ (φ — потенциал скорости фильтрации, ψ —

функция тока) как аналитической внутри области фильтрации функции комплексной координаты $z=x+iy$ при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} AF: y=0, \varphi=0; \quad AB: x=0, \psi=0 \\ BC: y=-T, \psi=0; \quad CD: y=-T, \varphi=T-H \\ CD: \varphi=-y, \psi=1/2Q+\varepsilon(x-l) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где Q — искомый фильтрационный расход из канала, приходящийся на единицу его длины. Исследование осуществляется в терминах приведенных величин z и ω , связанных с одноименными (фактическими величинами z_Φ и ω_Φ посредством равенств $z=z_\Phi/T$, $\omega=\omega_\Phi/(\kappa T)$, где κ — коэффициент фильтрации грунта.

2. Построение решения. Для решения задачи используется метод [6], основанный на применении аналитической теории линейных дифферен-



Фиг. 2

циальных уравнений. В качестве канонической области здесь рассматривается прямоугольник плоскости τ (фиг. 2) со сторонами $1/2$ и $\rho/2$, где $\rho=K'/K$, $K=K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода при модуле k , $K'=K(k')$, $k'=\sqrt{1-k^2}$.

Вводятся функции $z(\tau)$ и $\omega(\tau)$, конформно отображающие указанный прямоугольник на области z и ω , комплексная скорость $w=d\omega/dz$, а также функции

$$Z=dz/d\tau, \quad F=d\omega/d\tau \quad (2.1)$$

которые подлежат определению.

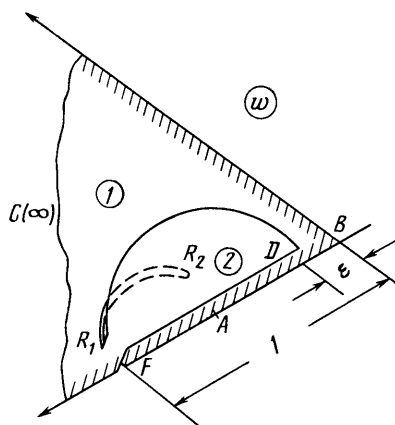
Обратимся к области комплексной скорости плоскости w , изображенной на фиг. 3. Эта область двулистка и содержит две точки разветвления R_1 и R_2 , которые являются вершинами граничных разрезов, причем в точке R_1 при обходе границы осуществляется переход на второй лист римановой поверхности. В плоскости z указанным точкам соответствуют две точки перегиба депрессионной кривой. Приводимые здесь заключения о структуре области комплексной скорости и форме кривой депрессии отмечались ранее при рассмотрении ряда схем, связанных с дренажными промывками почвенного слоя [7, 8].

Возвращаясь к области комплексной скорости w , заметим, что она представляет собой круговой шестиугольник с четырьмя прямыми углами и двумя разрезами. Конформно отобразим прямоугольник плоскости τ на указанный круговой шестиугольник, используя методику [9] построения отображающих функций для многоугольников рассматриваемого типа. Получим

$$w=i\sqrt{\varepsilon} \frac{f(\tau)-f(-\tau)}{f(\tau)+f(-\tau)}, \quad f(\tau)=e^{\pi i} \vartheta_1(\tau+i\alpha) \vartheta_2(\tau+i\beta) \quad (2.2)$$

$$\alpha+\beta=1/2\rho+\pi^{-1} \operatorname{arth} \sqrt{\varepsilon} \quad (2.3)$$

где ϑ_1 и ϑ_2 — функции Якоби [10] с параметром $q=\exp(-\pi\rho)$; α и β — параметры отображения.



Фиг. 3

Учитывая поведение функций (2.1) в окрестностях особых точек, а также выражение (2.2), получим параметрическое решение исходной краевой задачи

$$Z = \frac{-Ci}{\sqrt{\epsilon}} \frac{f(\tau) + f(-\tau)}{\vartheta_3(\tau)\vartheta_4(\tau)\sqrt{\Delta_A}} \quad F = C \frac{f(\tau) - f(-\tau)}{\vartheta_3(\tau)\vartheta_4(\tau)\sqrt{\Delta_A}} \quad (2.4)$$

$$C > 0, \quad \Delta_A = \operatorname{sn}^2(2K\tau, k) - a^2, \quad a = \operatorname{sn}(2K\tau_A, k)$$

где sn — эллиптическая функция Якоби [10].

В рамках модели должны выполняться условия

$$0 < \alpha \leq \alpha_* = \rho/2, \quad 0 < \beta \leq \beta_* = \rho/2 \quad (2.5)$$

регламентирующие положение на границе вершин разрезов R_1 и R_2 области w и, следовательно, область применимости принятой схемы течения.

3. Предельные случаи. Отметим предельные случаи, связанные с вырождением области комплексной скорости.

Случай отсутствия подпора ($H=0$). Если в выражениях (2.4) зафиксировать параметры отображения, то по мере возрастания параметра β точки R_1 и D сближаются, сливаясь в пределе при $\beta = \beta_*$ в точке $w=i$, в которую одновременно вырождается второй лист области w . Область комплексной скорости превращается в круговой пятиугольник с одним разрезом (фиг. 4, а), а функция w принимает при этом вид [1]

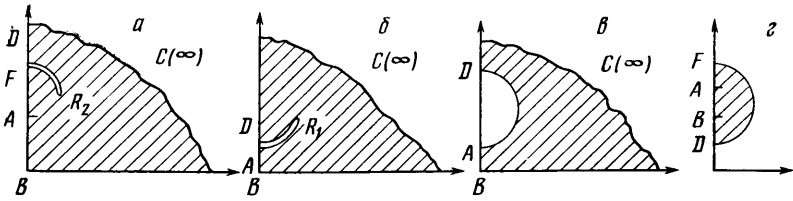
$$w = i\sqrt{\epsilon} \frac{-\vartheta_1(\tau+i\alpha) + \vartheta_1(\tau-i\alpha)}{\vartheta_1(\tau+i\alpha) - \vartheta_1(\tau-i\alpha)}, \quad \alpha = \pi^{-1} \operatorname{arth} \sqrt{\epsilon} \quad (3.1)$$

В плоскости z в этом случае кривая депрессии выходит на кровлю нижележащего пласта под прямым углом в некоторой точке с абсциссой L_1 (кривая 2 на фиг. 1).

При отсутствии инфильтрации ($\epsilon=0$), совершая предельный переход $\epsilon \rightarrow 0$ в выражениях (2.4) и (3.1) с учетом формулы для α , после некоторых преобразований найдем

$$w = \pi \frac{\vartheta_1(\tau)}{\vartheta_1'(\tau)} \quad Z = \frac{C}{\pi} \frac{\vartheta_1'(\tau)}{\vartheta_4(\tau)\sqrt{\Delta_A}}$$

$$F = C \frac{\vartheta_1(\tau)}{\vartheta_4(\tau)\sqrt{\Delta_A}} \quad (3.2)$$



Фиг. 4

Представление для w здесь можно получить также инверсией области w относительно начала координат, которая в рассматриваемом случае становится точкой пересечения всех граничных участков области w . В работе [5] этот случай решен в иной форме — методом приведения к смешанной задаче теории аналитических функций.

Случай отсутствия канала ($l=0$). Если $a \rightarrow 1$ и $\alpha \rightarrow \alpha_*$, то при фиксировании остальных параметров отображения точки A и F сливаются и в пределе область w вырождается в круговой пятиугольник, изображенный на фиг. 4, б. Тогда имеем [3]

$$w = i\sqrt{\varepsilon} \frac{-\vartheta_2(\tau + i\beta) - \vartheta_2(\tau - i\beta)}{\vartheta_2(\tau + i\beta) + \vartheta_2(\tau - i\beta)}, \quad \beta = \pi^{-1} \operatorname{arth} \sqrt{\varepsilon} \quad (3.3)$$

В плоскости z точка перегиба R_2 , сливаясь с точкой A , выходит на ось y и становится точкой максимального превышения кривой депрессии. В рамках этой схемы отметим предельный случай $H=0$, связанный с отсутствием подпора. При $\beta = \beta_*$ из области w выпадает полукруг $|w - i(1+\varepsilon)/2| < (1-\varepsilon)/2$ и она принимает вид, изображенный на фиг. 4, в. Здесь имеем

$$w = \sqrt{\varepsilon} \operatorname{tg} \pi t, \quad Z = C \cos \pi t, \quad F = \sqrt{\varepsilon} C \sin \pi t \quad (3.4)$$

Для этой схемы имеем [4]

$$g_* = \frac{d}{T} = \frac{1 - \sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (d = L_1 - L) \quad (3.5)$$

Случай отсутствия включения ($L=0$). Прежде чем перейти к пределу, целесообразно сначала в (2.2) сделать преобразование $\tau = i(\rho/2 - t)$. Тогда при слиянии точек B и C имеем $\beta = \beta_*$, $k=0$ и, следовательно, $\rho/2 = \infty$; область t вырождается в полуполосу $\operatorname{Re} t > 0$, $0 < \operatorname{Im} t < 1/2$, а область w превращается при этом в двуугольник, изображенный на фиг. 4, г. Осуществляя в преобразованном выражении (2.2) предельный переход при $k \rightarrow 0$, придем в итоге к зависимостям

$$w = i\sqrt{\varepsilon} \operatorname{cth} \pi(t + \alpha), \quad \alpha = \pi^{-1} \operatorname{arth} \sqrt{\varepsilon}$$

$$Z = \frac{-Ci \operatorname{sh} \pi(t + \alpha)}{\sqrt{\varepsilon} a_1 \operatorname{ch} \pi t} \quad F = C \frac{\operatorname{ch} \pi(t + \alpha)}{a_1 \operatorname{ch} \pi t} \quad (3.6)$$

$$a_1 = \sqrt{1 - a^2},$$

которые совпадают с формулами (9) и (13) работы [2], если в последних положить $\xi = \operatorname{ch}^{-2} \pi t$, $\kappa/\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

4. Схема вычислений и анализ их результатов. Решение (2.4) содержит четыре неизвестных параметра отображения: C , a , β и k , определяющих мощность слоя T , ширину канала l и включения L , а также величину подпора H . Интегрирование уравнений (2.4) по всему контуру области τ , внутри которой функции $z(\tau)$ и $\omega(\tau)$ аналитичны (что, кстати, является контролем вычислений), приводит к параметрическим уравнениям соответствующих участков модели. После нахождения искомого постоянных

| L | $\varepsilon=0$ | | $\varepsilon=0,2$ | |
|--------|-----------------|--------|-------------------|--------|
| | d | Q | d | Q |
| 0,6667 | 1,5789 | 3,8954 | 1,5799 | 3,7989 |
| 1,3333 | 0,7482 | 2,2973 | 0,7632 | 2,2909 |
| 2,0 | 0,3178 | 1,2229 | 0,3747 | 1,2228 |
| 2,5329 | 0,2078 | 0,8260 | 0,2866 | 0,7538 |
| 3,0657 | 0,1497 | 0,5983 | 0,2531 | 0,4311 |
| 3,5986 | 0,1156 | 0,4623 | 0,2452 | 0,4916 |

определению подлежит расход и координаты точек кривой депрессии. На фиг. 1 изображена кривая депрессии (кривая 1), рассчитанная при $T=1$; $\varepsilon=0,2$; $l=2$; $L=3$ и $H=0,2$. Ниже приведены результаты расчетов фильтрационного расхода Q при варьировании одного из параметров L , ε , H , l и фиксации остальных при тех же значениях, что и для фиг. 1:

| L | Q | ε | Q | H | Q | l | Q |
|-----|--------|---------------|--------|-----|---------|-----|---------|
| 0,6 | 3,0592 | 0,15 | 0,1179 | 0 | 0,4311 | 0,5 | -0,3585 |
| 1,2 | 2,2081 | 0,2 | 0,0723 | 0,2 | 0,0723 | 1,0 | -0,2069 |
| 1,8 | 0,7246 | 0,25 | 0,0263 | 0,4 | -0,0044 | 2,0 | 0,0723 |
| 2,4 | 0,3175 | - | - | 0,6 | -0,1068 | - | - |
| 3,0 | 0,0723 | - | - | 0,8 | -0,2368 | - | - |

Согласно расчетам, при фиксированных значениях T , l , H и ε с ростом ширины включения L точка перегиба R_2 перемещается вдоль границы в направлении точки F , сливаясь с ней при значении $\alpha=\alpha_*$. Из (2.4) следует, что при таком значении α кривая депрессии в окрестности точки F становится выпуклой, причем $y'(l)=0$. Такое выполаживание кривой депрессии в точке F служит признаком начинающегося подтопления. Величина L_* , соответствующая значению α_* , является предельно допустимой для рассматриваемой модели и рассчитывается в каждом конкретном случае. Для основного варианта получено $L_*=3,4903$.

Из приведенных данных следует, что с ростом L расход Q уменьшается, причем весьма существенно: увеличение ширины включения в 5 раз приводит к уменьшению расхода более чем в 42 раза. Подобное поведение прослеживается и с ростом ε , хотя и с менее значительными изменениями: при возрастании ε в 1,67 раз расход уменьшается в 4,48 раза.

Таким образом, выявляется подпирющее воздействие непроницаемого включения, инфильтрации, а также напорных вод (столбец 3) по отношению фильтрации из канала.

В таблице приведены результаты расчетов величины d и расхода Q для $H=0$; $l=2$; $\varepsilon=0$ и 0,2 при некоторых значениях L . Расчеты показали, что функция $d=f(l)$ при фиксировании ε оказывается монотонно убывающей и ограниченной снизу величиной g_* (см. 3.5), которая соответствует случаю $l=0$ и предельно допустима для данного случая. Из таблицы видно, что в случае $\varepsilon=0$, при $L \geq l$ выполняется известное соотношение [6]

$\approx 4d$. На фиг. 1 изображена кривая депрессии (кривая 2) при $H=0$; $\varepsilon=0,2$; $l=2$ и $L=3,0657$.

Рассмотрим схему, которая описывается зависимостями (2.4) за пределами, устанавливаемыми соотношениями (2.5). Как отмечалось в разд. 4, выполаживание кривой депрессии в точке F означает начало подтопления, которое развивается с последующим увеличением ширины включения $L > L_*$ при $\alpha > \alpha_*$. Расчеты при таких комбинациях физических параметров показали, что в окрестности точки F формируется бугор грунтовых вод (подразумевается, что грунт имеется везде, где происходит фильтрация). При этом на продолжении дна канала возникает щель, связанная с бугром в точке F , точка R_2 тогда становится вершиной бугра. На фиг. 1 изображена кривая депрессии (кривая 3) при $L=4,0$. Результаты вычисления размеров щели l' для основного варианта при некоторых значениях L представлены ниже:

| | | | |
|----|---------|---------|---------|
| L | 3,6 | 3,8 | 4,0 |
| l' | 0,00015 | 0,00107 | 0,00274 |

В заключение отметим, что подобная картина течения наблюдалась в схеме, описанной в [11].

Автор благодарит П. Я. Кочину за внимание и полезные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Береславский Э. Н.* Об одной задаче фильтрации из канала в орошаемом почвенном слое // Численные методы в задачах математического моделирования. Л., 1987. С. 47–52.
2. *Барон В. А.* Фильтрация из канала с малой глубиной воды при наличии хорошо проницаемого слоя на конечной глубине и с учетом инфильтрации // ПМТФ. 1961. № 1. С. 101–105.
3. *Береславский Э. Н.* О влиянии непроницаемого включения в нижележащем сильнопроницаемом напорном горизонте на режим грунтовых вод в орошаемом почвенном слое // ПМТФ. 1986. № 3. С. 3–5.
4. *Васильев В. А.* О форме бугра грунтовых вод между двумя дренами на водоупоре при наличии инфильтрации // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 1. С. 106–108.
5. *Пыхтеев Г. Н.* Фильтрация из канала при наличии двух дрен на водоупоре // Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 6. С. 16–21.
6. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
7. *Эмих В. Н.* Решение задачи о плоской безнапорной установившейся фильтрации при дренажных промывках с непроницаемым основанием // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220. № 6. С. 1289–1292.
8. *Эмих В. Н.* Фильтрация при промывках почвенного слоя с нижележащим напорным горизонтом относительно высокой проницаемости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 3. С. 70–77.
9. *Береславский Э. Н.* О конформном отображении некоторых круговых многоугольников на прямоугольник // Изв. вузов. Математика. 1980. № 5. С. 3–7.
10. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции: формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977. 342 с.
11. *Эмих В. Н.* Анализ двумерной установившейся фильтрации в почвенном слое с сильнопроницаемым основанием // ПММ. 1982. Т. 46. № 5. С. 857–868.

Ленинград

Поступила в редакцию
10.VII.1989