МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1990

УДК 532.546

О. Ю. ДИНАРИЕВ

ФИЛЬТРАЦИЯ В ТРЕЩИНОВАТОЙ СРЕДЕ С ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ ТРЕЩИН

Предложена модель трещиновато-пористой среды, в которой система трещин образует фрактал с размерностью Хаусдорфа – Безиковича d. Фрактал погружен в насыщенную пористую среду с размерностью $D(D\geqslant d,\ D=2{,}3)$. Скелет породы предполагается недеформируемым. Выписана система уравнений фильтрации для цилиндрически-($D=2$) и сферически-симметричного ($D=3$) течений. В случае $D=d$ модель сводится к известной модели Баренблатта – Желтова. Получены некоторые частные решения, позволяющие определить из эксперимента феноменологические параметры модели.

В настоящей работе теория фракталов – множеств с нецелой пространственной размерностью [1, 2] – используется для моделирования трещиновато-пористых сред. Ранее фракталы применялись для описания процессов в пористых материалах с однотипной поровой структурой [3–5]. При этом, согласно [6], могут быть случаи, когда фракталами являются поровое пространство, скелет породы, поверхность скелета породы. Для описания процессов в трещиновато-пористых средах обычно используется модель Баренблатта – Желтова [7–9], когда и трещины и сплошные пористые блоки представляются однородными взаимопроникающими континуумами, характеризуемыми своими индивидуальными пористостями и проницаемостями и способными обмениваться насыщающей жидкостью или газом. Между тем в реальных трещиноватых породах для характерных размеров, сравнимых с размерами блоков, трещины образуют систему, которую нельзя считать однородной (и тем более сплошной). Неоднократно указывалось, что возникающие при разрушении трещины хорошо описываются фрактальной геометрией [10, 11].

Принципы вычисления фрактальной размерности для трещин изложены в [1, 2, 10].

Предположим, что трещины образуют фрактал с размерностью Хаусдорфа – Безиковича d, погруженный в сплошную пористую среду с размерностью D ($D\geqslant d$, $D=2$ или $D=3$). Будем считать, что трещины и блоки насыщены жидкостью или газом, причем все происходящие процессы являются изотермическими. В соответствии с идеями [7, 8] примем, что перемещение флюида в пространстве может осуществляться только по системе трещин (проницаемость блоков равна нулю) и возможен обмен флюидом между трещинами и блоками. Рассмотрим течение с цилиндрической ($D=2$) или сферической ($D=3$) симметрией, когда можно считать все функции зависящими от времени t и расстояния до центра симметрии r. Тогда имеют место интегральные уравнения сохранения массы для трещин и блоков соответственно

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{r_0\leqslant r\leqslant r_1} m_1\rho_1 d\mu_H{}^d=\int\limits_{r=r_0} j_n d\mu_S{}^d-\int\limits_{r=r_1} j_n d\mu_S{}^d+\int\limits_{r_0\leqslant r\leqslant r_1} q\,d\mu_H{}^d \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{r_0\leqslant r\leqslant r_1} m_2\rho_2 d\mu_H{}^D=-\int\limits_{r_0\leqslant r\leqslant r_1} q\,d\mu_H{}^d \qquad (2)$$

Здесь ρ_1 и ρ_2 — плотность флюида в трещинах и блоках соответственно, m_1 — геометрический фактор, характеризующий степень раскрытия трещин, m_2 — пористость блоков, j_n — радиальная составляющая потока массы по системе трещин, q — переток массы от блоков к трещинам, $d\mu_H{}^d$ — мера Хаусдорфа множества с пространственной размерностью d [12], $d\mu_S{}^d$ — мера Хаусдорфа на сечении фрактала сферой радиуса r, определяемая по формуле

$$d\mu_H{}^d = dr\, d\mu_S{}^d$$

Справедливо соотношение

$$\int\limits_{r=r_1} d\mu_S{}^d = r_1^{d-1} \int\limits_{r=1} d\mu_S{}^d = r_1^{d-1}\,\alpha_d, \quad \alpha_d = 2\pi^{d/2}\Gamma^{-1}\left(\frac{d}{2}\right) \tag{3}$$

где α_d — площадь единичной $(d-1)$-мерной сферы.

Пусть p — давление, $p=p(\rho)$ — уравнение состояния флюида. Тогда $p_1=p(\rho_1)$, $p_2=p(\rho_2)$ — давление в трещинах и блоках соответственно. Конкретизируем j_n и q формулами

$$j_n = -\frac{k}{\mu}\rho_1\frac{\partial p_1}{\partial r} \tag{4}$$

$$q = \frac{\beta}{\mu}(\rho_2 p_2 - \rho_1 p_1) r^{-\varepsilon} \tag{5}$$

Здесь $\mu=\mu(\rho_1)$ — сдвиговая вязкость, $\varepsilon=(D-d)$ — дефект пространства, k и β — некоторые положительные постоянные. Степенной множитель $r^{-\varepsilon}$ в формуле (5) введен потому, что переток массы между трещинами и блоками в небольших объемах при фиксированном перепаде давления должен быть пропорционален отношению площади поверхности трещин к объему блоков.

Для простоты будем считать скелет породы недеформируемым. Тогда из (1)—(5) вытекают дифференциальные уравнения для функций $\rho_i = \rho_i(t, r)$, $i=1, 2$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \frac{k}{m_1} r^{-(d-1)} \frac{\partial}{\partial r}\left(\mu^{-1} r^{d-1} \rho_1 \frac{\partial p_1}{\partial r}\right) + \frac{\beta}{\mu m_1}(\rho_2 p_2 - \rho_1 p_1) r^{-\varepsilon} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} = \frac{\alpha_d \beta}{\alpha_D m_2 \mu}(\rho_1 p_1 - \rho_2 p_2) r^{-2\varepsilon} \tag{7}$$

Теперь видно, что построенная модель содержит следующие специфические для нее феноменологические параметры: безразмерный параметр d и параметры m_1, k, β с размерностями: $[m_1]=L^\varepsilon$, $[k]=L^{\varepsilon+2}$, $[\beta]=L^{2\varepsilon}$.

Когда $d=D$ (система трещин превращается в сплошную среду), m_1 становится обычной пористостью, k — обычной проницаемостью, а уравнения (6), (7) сводятся к уравнениям Баренблатта — Желтова [7—9].

Параметры d и m_1 — чисто геометрические. Они могут быть найдены по результатам исследований ненасыщенных образцов трещиноватых пород. Так, d можно определить по малоугловому рассеянию световых или рентгеновских лучей [13]. Для определения k и β нужно проводить эксперименты с насыщенной породой.

Пусть имеет место стационарный процесс: $\partial\rho_i/\partial t=0$, $i=1, 2$. Тогда из (6), (7) получаем

$$\rho_1 = \rho_2, \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(\mu^{-1} r^{d-1} \rho_1 \frac{\partial p_1}{\partial r}\right) = 0 \tag{8}$$

Введем вспомогательную функцию

$$P(\rho) = \int \frac{\rho\, dp}{\mu}$$

Из (8) вытекает неявная формула для ρ

$$P = C_1 (2-d)^{-1} r^{2-d} + C_2, \tag{9}$$

где C_1, C_2 — некоторые постоянные. Пусть имеется скважина с радиусом r_0 и пусть известно давление в скважине p_0, массовый расход Q и пластовое давление p_∞. Тогда по соотношениям

$$p_1|_{r=r_0}=p_0, \quad p_1|_{r=\infty}=p_\infty, \quad Q=-(j_n r^{d-1}\alpha_d)|_{r=r_0}=k\alpha_d C_1$$

можно определить параметр k (при известном d).

Рассмотрим теперь нестационарные процессы, когда плотность флюида в трещинах и блоках мало отличается от некоторой постоянной: $\delta_i=(\rho_i-\rho_\infty)/\rho_\infty\ll 1$. Линеаризованные уравнения (6), (7) имеют вид

$$\frac{\partial\delta_1}{\partial t}=\varkappa\Delta_d\delta_1+\nu(\delta_2-\delta_1)r^{-\varepsilon} \tag{10}$$

$$\frac{\partial\delta_2}{\partial t}=\gamma(\delta_1-\delta_2)r^{-2\varepsilon} \tag{11}$$

$$\varkappa=k\rho_\infty c^2/(m_1\mu(\rho_\infty)), \quad \nu=\beta c^2\rho_\infty/(m_1\mu(\rho_\infty)),$$

$$\gamma=\frac{\alpha_d\beta c^2\rho_\infty}{\alpha_D m_2\mu(\rho_\infty)}, \quad c=(p_\rho(\rho_\infty))^{1/2}, \quad \Delta_d=r^{-(d-1)}\frac{\partial}{\partial r}r^{d-1}\frac{\partial}{\partial r}$$

Здесь c — изотермическая скорость звука, Δ_d — d-мерный оператор Лапласа.

Наложим граничное условие

$$\delta_i\to 0 \quad (r\to+\infty) \tag{12}$$

Предположим вначале, что $\beta=0$. Тогда уравнение (10) сводится к уравнению теплопроводности на фрактале

$$\frac{\partial\delta_1}{\partial t}=\varkappa\Delta_d\delta_1 \tag{13}$$

Задача (12), (13) имеет автомодельное решение

$$\delta_1=M(4\pi\varkappa t)^{-d/2}\exp(-r^2/(4\varkappa t)) \tag{14}$$

Это решение описывает ситуацию, когда в породу в течение малого промежутка времени закачивается некоторая масса жидкости M. Оно может быть использовано для экспериментального определения параметра m_1, если k и d уже известны.

При $\beta\neq 0$ и быстрой закачке жидкости в пласт формула (14) не имеет места. Однако можно показать, что равенство (14) по-прежнему справедливо при малых временах t.

Действительно, будем обозначать символом $f_F=f_F(\omega, r)$ преобразование Фурье произвольной функции $f=f(t, r)$ по времени

$$f_F(\omega,r)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega t}f(t,r)\,dt$$

Из (10), (11) вытекают уравнения

$$i\omega\delta_{1F}=\varkappa\Delta_d\delta_{1F}+\nu(\delta_{2F}-\delta_{1F})r^{-\varepsilon}$$
$$i\omega\delta_{2F}=\gamma(\delta_{1F}-\delta_{2F})r^{-2\varepsilon}$$

которые вместе с (12) приводят к краевой задаче для $\delta_{1F}=\delta_{1F}(\omega, r)$

$$\left(\Delta_d-i\varkappa^{-1}\omega-\frac{\nu i\omega r^{-\varepsilon}}{\varkappa(i\omega+\gamma r^{-2\varepsilon})}\right)\delta_{1F}=0 \tag{15}$$

$$\delta_{1F}|_{r=r_0}=A(\omega), \quad \delta_{1F}|_{r=\infty}=0 \tag{16}$$

Здесь $A=A(\omega)$ — некоторая заданная функция. Если положить $r=\xi r_0$, то уравнение (15) приобретет безразмерный вид

$$\left(\xi^{(d-1)}\frac{\partial}{\partial\xi}\xi^{d-1}\frac{\partial}{\partial\xi}-i\varepsilon_1-\frac{\varepsilon_2\xi^{-\varepsilon}}{1-i\varepsilon_3\xi^{-2\varepsilon}}\right)\delta_{1F}=0 \qquad (17)$$

$$\varepsilon_1=r_0^2\varkappa^{-1}\omega,\quad \varepsilon_2=\nu\varkappa^{-1}r_0^{-\varepsilon},\quad \varepsilon_3=\gamma\omega^{-1}r_0^{-2\varepsilon}$$

где ε_i — безразмерные параметры.

Пусть частота ω настолько велика, что справедливо неравенство $\varepsilon_1\gg1$. Тогда в уравнениях (15), (17) можно пренебречь последним членом и получить

$$(\Delta_d-i\varkappa^{-1}\omega)\delta_{1F}=0 \qquad (18)$$

Краевая задача (16), (18) имеет точное решение

$$\delta_{1F}=A\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\lambda}K_\lambda\left((1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\varkappa}}r\right)K_\lambda^{-1}\left((1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\varkappa}}r_0\right) \qquad (19)$$

$$\lambda=\frac{1}{2}d-1$$

где K_λ — модифицированная функция Бесселя третьего рода [14]. Из (18) видно, что при высоких частотах (или, что эквивалентно, при малых временах) из уравнения для δ_{1F} выпадают члены, связанные с влиянием блоков. Это подтверждает сказанное ранее относительно решения (14).

Если создавать в скважине синусоидальное изменение давления и мерить расход Q, то решение (19) вместе с формулой

$$Q_F=-k\mu^{-1}(\rho_\infty)r_0^{d-1}\alpha_d\rho_\infty c^2\left.\frac{\partial\delta_{1F}}{\partial r}\right|_{r=r_0} \qquad (20)$$

можно использовать для дополнительного определения одного из параметров d, k, m_1 при известных двух других.

Для реальных трещиноватых пород возможны ситуации, когда в определенном диапазоне частот $|\varepsilon_1|\ll1$ и можно пренебречь членом с ε_1 в уравнении (17). Это соответствует обычно принимаемому приближению [7—9], когда пренебрегают изменениями массы флюида в трещинах и ставят нули в левой части уравнений (1), (6), (10). При этом частоты могут быть достаточно высоки, так что $|\varepsilon_3|\ll1$. Тогда уравнение (15) приводится к виду

$$(\Delta_d-\nu\varkappa^{-1}r^{-\varepsilon})\delta_{1F}=0 \qquad (21)$$

Краевая задача (16), (21) имеет точное решение

$$\delta_{1F}=A\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\lambda}K_a(hr^b)K_a^{-1}(hr_0^b) \qquad (22)$$

$$a=(2-d)/(2-\varepsilon),\quad b=1-\varepsilon/2,\quad h=b^{-1}\nu^{1/2}\varkappa^{-1/2} \qquad (22)$$

Если осуществить синусоидальное изменение давления на забое и мерить расход, то решение (22) вместе с формулой (20) можно использовать для экспериментального определения параметра β.

Таким образом, построена фрактальная модель трещиновато-пористой среды. Показано, что модельные параметры могут быть определены в результате простых экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mandelbrot B. B.* Fractals. Form, chance and dimension. San Francisco: Freeman, 1977. 365 p.
2. *Mandelbrot B. B.* The fractal geometry of nature. San Francisco: Freeman, 1983. 468 p.
3. *Белоненко В. Н., Динариев О. Ю., Мосолов А. Б.* Уравнение Бринкмана, фрактальная модель пористой среды и ренормировка вязкостей // Журн. техн. физики. 1986. Т. 56. Вып. 4. С. 803–805.
4. *Мосолов А. Б., Динариев О. Ю.* Диффузия пассивной примеси в пористой среде. Фрактальная модель // Журн. техн. физики. 1987. Т. 57. Вып. 6. С. 1057–1060.
5. *Мосолов А. Б., Динариев О. Ю.* Диффузия пассивной примеси в пористой среде. Фрактальная модель в случае ненасыщенной среды // Инж.-физ. журн. 1987. Т. 53. № 4. С. 612–617.
6. *Мосолов А. Б., Динариев О. Ю.* Фрактальные модели пористых сред // Журн. техн. физики. 1987. Т. 57. Вып. 9. С. 1679–1685.
7. *Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П.* Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132. № 3. С. 545–548.
8. *Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 852–864.
9. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
10. *Мосолов А. Б., Динариев О. Ю.* Автомодельность и фрактальная геометрия разрушения // Пробл. прочности. 1988. № 1. С. 3–7.
11. *Луис Э., Гинеа Ф., Флорес Ф.* Фрактальная природа трещин // Фракталы в физике: Тр. 6-го Междунар. симпоз. по фракталам в физике (МЦТФ, Триест, Италия, 9–12 июля, 1985). М.: Мир, 1988. С. 244–248.
12. *Rogers C. A.* Hausdorff measures. L.; N. Y.: Cambridge Univ. Press. 1970. 179 p.
13. *Шефер Д., Кефер К.* Структура случайных силикатов: полимеры, коллоиды и пористые твердые тела // Фракталы в физике: Тр. 6-го Междунар. симпоз. по фракталам в физике (МЦТФ, Триест, Италия, 9–12 июля, 1985). М.: Мир, 1988. С. 62–71.
14. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 295 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.IX 1989