МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 · 1990

УДК 532.529.6.013.4:537.222

А. И. ГРИГОРЬЕВ, А. Э. ЛАЗАРЯНЦ

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КАПЛИ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ ПО ОТНОШЕНИЮ К СТОХАСТИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩЕМУСЯ СО ВРЕМЕНЕМ СОБСТВЕННОМУ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМУ ЗАРЯДУ

Весьма важной проблемой теории грозового электричества является выяснение физического механизма зарождения разряда линейной молнии. Согласно существующим представлениям [1, 2], разряд линейной молнии начинается с интенсивного коронного разряда с группы близко расположенных крупных капель или тающих градин. При этом формируется некоторый объем характерного линейного размера ~ 1 см, заполненный газоразрядной плазмой, поляризация и прорастание которого во внутриоблачном электрическом поле и объясняет многие характерные черты начальной стадии разряда молнии [3]. Но остаются не выясненными физические условия зажигания коронного разряда: ведь появление на крупных каплях электрических зарядов, достаточных для инициирования коронного разряда, мало реально. Величина квазипостоянного внутриоблачного электрического поля не превышает величины $E_0 \approx 3$ кВ/см, что также не обеспечивает условий зажигания разряда. Тем не менее имеется еще один неисследованный механизм зажигания электрического разряда в окрестности капли воды, связанный с параметрической раскачкой в ней неустойчивости с последующей эмиссией сильно заряженных микрокапелек [4, 5], в окрестности которых коронный разряд уже может зажечься [6]. В этой связи рассмотрим задачу об устойчивости капиллярных волн в сферической капле радиуса R с начальным зарядом Q, свободно падающей в грозовом облаке, сталкивающейся на пути с существенно более мелкими капельками, несущих заряды разных знаков, и вследствие этого меняющей со временем свой результирующий заряд случайным образом.

1. Все рассмотрение проведем в приближении идеально проводящей несжимаемой жидкости, имеющей плотность ρ, коэффициент поверхностного натяжения σ и кинематическую вязкость ν. За $\mathbf{u}$ обозначим поле скоростей в жидкости, а за p — отклонение давления от своего равновесного значения. Тогда уравнение свободной поверхности жидкости в сферических координатах с началом в центре капли запишем в виде $r=R+\xi\cdot(\theta, \varphi, t)$, где $|\xi| \ll R$ — малое отклонение от невозмущенной сферической поверхности капли. Линеаризованное уравнение Навье — Стокса и кинематическое и динамические граничные условия к нему запишем в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{r} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}; \quad \nabla \mathbf{u} = 0 \tag{1.1}$$

$$r=R: \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = u_r \tag{1.2}$$

$$P_{r\theta} \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta = 0 \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered} P_{r\varphi} \equiv \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\varphi = 0 \\ P_{rr} \equiv p - 2\rho\nu\frac{\partial u_r}{\partial r} = P_\sigma - P_E \end{gathered} \tag{1.4}$$

$$P_\sigma=\frac{\sigma}{R^2}(2+\Lambda)\xi$$

где P_{rr}, $P_{r\theta}$, $P_{r\varphi}$ — компоненты тензора напряжений, а P_σ и P_E — лапласовское давление и давление электрического поля соответственно, Λ — угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах. Все производные в (1.2)—(1.4) отнесены к невозмущенной поверхности капли [7].

Перейдем к безразмерным переменным, полагая в уравнениях (1.1)—(1.4) $R=1$, $\rho=1$, $\sigma=1$ и сохраняя за всеми величинами прежние обозначения. При этом все величины будут выражены в долях характерных значений

$$r=R,\quad t_*=\sqrt{\frac{R^3\rho}{\sigma}},\quad u_*=\sqrt{\frac{\sigma}{R\rho}},\quad p_*=\frac{\sigma}{R},\quad \nu_*=\sqrt{\frac{R\sigma}{\rho}}$$

Разделим $\mathbf{u}$ на потенциальную $\nabla\Phi$ и соленоидальную $\mathbf{w}$ компоненты и исключим давление P из системы уравнений при помощи соотношения $p=-\partial\Phi/\partial t$. В результате вместо (1.1) (1.4) получим

$$\mathbf{u}=\nabla\Phi+\mathbf{w};\qquad \Delta\Phi=0$$

$$\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}=\nu\Delta\mathbf{w};\qquad \nabla\mathbf{w}=0$$

$$r=1:\quad \frac{\partial\Phi}{\partial t}+2\nu\frac{\partial u_r}{\partial r}-(2+\Lambda)\xi=P_E \tag{1.5}$$

Используем далее интегральное преобразование $f(t)\to F(s)$, такое, что $\partial f(t)/\partial t\to sF(s)$, решение для потенциальной компоненты поля скоростей будем искать в виде

$$\Phi=\sum_{l,m}c_1(s)r^lY_l^m \tag{1.6}$$

где Y_l^m — сферические функции. Для соленоидальной компоненты получаем уравнение

$$\Delta\mathbf{w}=\frac{S}{\nu}\mathbf{w};\qquad \nabla\mathbf{w}=0 \tag{1.7}$$

Учитывая, что соленоидальное поле может быть представлено в виде суммы поло- и тороидального полей и что тороидальное поле не влияет на колебания поверхности в силу нулевой радиальной компоненты поля, будем искать решение уравнений (1.7) в виде разложения по полоидальным полям

$$w_r=\sum_{l,m}\frac{l(l+1)}{r^2}v(r,s)Y_l^m,\qquad w_\theta=\sum_{l,m}\frac{1}{r}\frac{\partial v(r,s)}{\partial r}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\theta} \tag{1.8}$$

$$w_\varphi=\sum_{l,m}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v(r,s)}{\partial r}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\varphi}$$

Здесь и далее для упрощений записи у функций v и у коэффициентов c_1, c_2 опускаются индексы l, m. Подставляя (1.8) в (1.7) получим

$$\frac{\partial^2v(r,s)}{\partial r^2}-\left[\frac{s}{\nu}+\frac{l(l+1)}{r^2}\right]v(r,s)=0 \tag{1.9}$$

Безразмерную вязкость ν будем считать малой величиной, поэтому достаточно получить уравнение поверхностных колебаний капли с точностью до величин не выше первого порядка по ν.

После следующей замены переменных уравнение (1.9) примет вид

$$r=1-\varepsilon y;\quad y=\frac{1-r}{\varepsilon};\quad y\geqslant 0;\quad \varepsilon^2=\frac{\nu}{s};\quad \varepsilon\ll 1$$

$$\frac{\partial^2 v(y,s)}{\partial y^2}-\left[1+\varepsilon^2\frac{l(l+1)}{(1-\varepsilon y)^2}\right]v(y,s)=0$$

Его приближенным решением будет

$$v(r,s)=c_2(s)\left[e^{-y}+O(\varepsilon^2)\right]\approx c_2(s)\exp\left(\frac{r-1}{\varepsilon}\right)$$

Для нахождения связи между $c_1(s)$ и $c_2(s)$ воспользуемся граничным условием (1.3)

$$2(l-1)\varepsilon^2 c_1(s)+\left[1-2\varepsilon+l(l+1)\varepsilon^2\right]c_2(s)=0 \tag{1.10}$$

Отклонение от невозмущенной поверхности ξ также можно разложить в ряд по сферическим функциям, где связь $z(s)$ с $c_1(s)$ и $c_2(s)$ находится при помощи (1.2) (индексы l, m у $z(s)$ также опускаем)

$$\xi=\sum_{l,m} z(s)Y_l^m \tag{1.11}$$

$$r=1:\quad sz(s)=lc_1(s)+l(l+1)c_2(s) \tag{1.12}$$

Разрешая систему (1.10), (1.12) относительно $c_1(s)$, $c_2(s)$, получим

$$c_1(s)=\frac{1}{l}\left[1+2(l-1)(l+1)\frac{\nu}{s}\right]sz(s);\quad c_2(s)=-\frac{2(l-1)}{l}\nu z(s) \tag{1.13}$$

Подставляя выражение для Φ (1.6) и (1.13) в (1.5) и совершая обратное интегральное преобразование, получим в размерных переменных

$$\sum_{l,m}\left\{\frac{1}{l}\frac{d^2z}{dt^2}+2(l-1)(2l+1)\frac{\nu}{R^2}\frac{dz}{dt}+l(l-1)(l+2)\frac{\sigma}{R^3\rho}z\right\}Y_l^m=\frac{1}{R\rho}P_E(t) \tag{1.14}$$

2. Для решения (1.14) необходимо знать выражение для давления электрического поля собственного заряда капли на ее поверхность. В рассматриваемой ситуации

$$P_E=\frac{\mathbf{E}^2}{8\pi}=\frac{(\nabla\Pi_0+\nabla\Pi)^2}{8\pi};\quad r=R+\xi \tag{2.1}$$

где Π_0 — потенциал электрического поля в окрестности невозмущенной сферической поверхности, а $\Pi\ll\Pi_0$ — малая добавка, вызванная возмущением. Ее можно найти как решение задачи

$$r\to\infty:\ \Delta\Pi=0,\ \Pi=0;\quad r=R+\xi:\ \Pi_0+\Pi=\mathrm{const} \tag{2.2}$$

Разлагая выражения (2.1) и (2.2) в ряды по малым величинам Π и ξ с точностью до линейных слагаемых включительно, учитывая свойство перпендикулярности электрического поля к поверхности проводника, получим

$$P_E=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{8\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial r}\right)^2\right]\xi+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Pi_0}{\partial r}\frac{\partial\Pi}{\partial r};\quad r=R \tag{2.3}$$

Пусть на капле в соответствии со сказанным выше находится заряд, стохастически меняющийся со временем. Потенциал электрического поля при отсутствии возмущения поверхности в этом случае будет иметь вид $\Pi_0=Q(t)/r$. Тогда давление электрического поля на поверхность примет вид

$$P_E=\frac{1}{8\pi}\frac{Q^2(t)}{R^4}-\frac{1}{2\pi}\frac{Q^2(t)}{R^5}\xi+\frac{1}{4\pi}\frac{Q^2(t)}{R^5}\sum_{l,m}(l+1)Y_l^m\int\xi Y_l^m d\Omega$$

Или, учитывая разложение ξ по сферическим функциям (1.11)

$$P_E=\frac{1}{8\pi}\frac{Q^2(t)}{R^4}+\frac{1}{4\pi}\frac{Q^2(t)}{R^5}\sum_{l,m}(l-1)z(t)Y_l^m \qquad (2.4)$$

Подставим (2.4) в (1.14) и, приравнивая нулю коэффициенты при различных сферических функциях (в силу ортогональности последних), получим систему уравнений типа Матье — Хилла для описания эволюции во времени амплитуд различных мод капиллярных волн

$$\frac{d^2z}{dt^2}+2\varepsilon\frac{dz(t)}{dt}+\omega^2\left[1-\frac{Q^2(t)}{4\pi(l+2)R^3\sigma}\right]z(t)=0 \qquad (2.5)$$

$$\varepsilon\equiv(l-1)(2l+1)\frac{\nu}{R^2};\quad \omega^2\equiv l(l-1)(l+2)\frac{\sigma}{R^3\rho}$$

Если диссипация в системе мала, как это имеет место в данном случае, система будет реагировать лишь на те части спектра внешнего воздействия, частота которых близка к собственным частотам ω. Поэтому для приближенного рассмотрения внешнее воздействие может быть заменено белым шумом, спектральная плотность которого равна спектральной плотности входного сигнала при собственной частоте системы: $Q^2(t)=$ $=Q_0^2\zeta(\omega t)$, где $\zeta(\omega t)$ — стационарный нормальный белый шум единичной интенсивности. Для удобства введем новую переменную $\tau=\omega t$ и обозначим $\gamma=\varepsilon/\omega$. В результате вместо (2.5) получим

$$\mu=Q_0^2/(4\pi(l+2)R^3\sigma)$$

$$\frac{d^2z(\tau)}{d\tau^2}+2\gamma\frac{dz(\tau)}{d\tau}+[1-\mu\zeta(\tau)]z(\tau)=0 \qquad (2.6)$$

Это уравнение хорошо изучено [8].

Условие стохастической неустойчивости капиллярных волн, т. е. распада капли, в приближении моментов второго порядка, согласно [8], имеет вид $\mu^2>4\gamma$, что для нашего случая означает

$$\left[\frac{Q_0^2}{4\pi R^3\sigma}\right]^4>\frac{16(l-1)(l+2)^3(2l+1)^2}{l}\frac{\rho\nu^2}{R\sigma}$$

Если учесть, что на капле находится собственный постоянный заряд Q, то собственные частоты будут иметь вид

$$\omega^2\equiv l(l-1)(l+2-W^2)\frac{\sigma}{R^3\rho};\quad W^2=\frac{Q^2}{4\pi R^3\sigma}$$

где W^2 — параметр Рэлея, и условие распада модифицируется

$$\left[\frac{Q_0^2}{4\pi R^3\sigma}\right]^4>\frac{16(l-1)(l+2-W^2)^3(2l+1)^2}{l}\frac{\rho\nu^2}{R\sigma}$$

Неустойчивость реализуется легче всего для основной моды колебаний с $l=2$

$$\left[\frac{Q_0^2}{4\pi R^3\sigma}\right]^4>200(4-W^2)^3\frac{\rho\nu^2}{R\sigma}$$

Учет моментов более высокого порядка приводит, согласно [8], к снижению критического значения амплитуды хаотических флуктуаций заряда капли, при котором проявляется неустойчивость, в ~ 2 раза.

Для капли воды с $R=1$ мм критическое амплитудное значение флуктуаций заряда Q_0, согласно полученным выражениям, будет равно 10^{-10} Кл. Флуктуации заряда такой величины на падающей крупной капле за счет столкновения с более мелкими вполне реальны, так как заряды на отдельных каплях в грозовом облаке могут достигать величины $\sim 10^{-8}$ Кл [9].

Из задач, близких к рассмотренной, можно выделить задачу о параметрической неустойчивости капли по отношению к периодически изменяющемуся ее потенциалу [10]. Однако возможность реализации подобного режима в условиях грозового облака мала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дячук В. А., Мучник В. М.* Коронный разряд обводненных градин как основной механизм инициирования молний // Докл. АН СССР. 1979. Т. 248. № 1. С. 60–63.
2. *Krehbiel P. R.* The electric structure of thunderstorms // Studies in geophysics. The earth's electrical environment. Washington: National Acad. Press. D. C. 1986. P. 90–113.
3. *Григорьев А. И., Ширяева С. О.* Механизм развития ступенчатого лидера и внутриоблачного ветвления линейной молнии // Журн. техн. физики. 1989. Т. 59. № 5. С. 6–13.
4. *Григорьев А. И.* Неустойчивость электропроводной капли в переменном электрическом поле // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 50–55.
5. *Григорьев А. И., Гершензон Н. И., Гохберг М. Б.* О природе свечения атмосферы при землетрясениях // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 5. С. 1087–1090.
6. *Григорьев А. И., Синкевич О. А.* О возможном механизме возникновения огней «св. Эльма» // Журн. техн. физики. 1984. Т. 54. № 7. С. 1276–1283.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. М.: Наука, 1988. 733 с.
8. *Болотин В. В., Москвин В. Г.* О параметрических резонансах в стохастических системах // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 4. С. 88–94.
9. *Чалмерс Дж. А.* Атмосферное электричество. Л.: Гидрометеоиздат, 1974. 421 с.
10. *Нестеров С. В.* Параметрическая неустойчивость заряженной капли // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 5. С. 170–172.

Ярославль

Поступила в редакцию
29.VI.1989