**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1990**

УДК 532.516.013.4:536.25

© 1990 г.

А. Т. ЛИПЧИН

УСТОЙЧИВОСТЬ КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОМ И СВОБОДНОМ ВЕРТИКАЛЬНЫХ СЛОЯХ

Интерес к конвекции в областях, одна часть которых занята вязкой жидкостью, а другая – насыщенной этой жидкостью пористой средой, обусловлен целым рядом приложений. К таким задачам приводит, например, рассмотрение гидродинамических процессов вблизи фронта кристаллизации, поскольку конвекцию расплава в междендритном пространстве можно моделировать фильтрационным течением.

Конвективная устойчивость равновесия горизонтального слоя жидкости, заключенного между слоями пористой среды, при поперечном градиенте температуры исследована в [1]. Ситуация, когда пористый слой расположен между двумя горизонтальными слоями жидкости, рассмотрена в [2]. В обеих работах использовалось уравнение движения для конвективной фильтрации в приближении Дарси – Буссинеска, а на границе раздела жидкость – пористая среда ставились условия непрерывности давления, прилипания для тангенциальной составляющей скорости жидкости и равенства нормальных компонент скорости жидкости и фильтрационной скорости. При увеличении проницаемости и толщины пористых слоев волновое число и число Рэлея критических возмущений уменьшаются, что связано с проникновением возмущений в пористую среду. Для некоторых значений параметров нейтральные кривые имеют два минимума.

Конвективная устойчивость равновесия жидкости в системе, состоящей из горизонтального слоя насыщенной пористой среды, ограниченного тонкими вязкими слоями, исследовалась в [3, 4]. Конвекция в пористой среде описывалась уравнением Дарси – Буссинеска. На границе раздела ставились условия проскальзывания Биверза – Джозефа [5]. Было обнаружено, что наличие тонких вязких слоев незначительно понижает критическое число Рэлея по сравнению со случаем пористого слоя, ограниченного твердыми поверхностями.

В данной работе исследуется линейная устойчивость конвективного течения в системе, состоящей из вертикального слоя жидкости и примыкающего к нему слоя насыщенной этой жидкостью пористой среды. Жидкость и пористая среда ограничены изотермическими плоскостями, нагретыми до разных температур.

Фильтрационное течение, подчиняющееся закону Дарси, в вертикальном пористом слое, подогреваемом сбоку, устойчиво относительно малых возмущений [6]. В [7–9] исследовано влияние на устойчивость конвективной фильтрации различных факторов, не рассматриваемых в [6]: зависимости вязкости от температуры; условий прилипания (модификация Бринкмана уравнения Дарси); инерционных эффектов (модификация Форхтгеймера уравнения Дарси) и наличия производной по времени в уравнении движения.

Задача об устойчивости течения жидкости в вертикальном слое между изотермическими границами при подогреве сбоку принадлежит к числу классических в теории конвективной устойчивости [10]. Для этого течения, имеющего кубический профиль скорости и линейный профиль температуры, существуют два механизма неустойчивости. Гидродинамическая мода, связанная с развитием системы неподвижных вихрей на границе раздела встречных потоков, имеет место при всех числах Прандтля. При числах Прандтля, превышающих критическое значение 11,56, появляется и быстро становится наиболее опасной с точки зрения устойчивости тепловая мода, обусловленная нарастанием температурных волн, распространяющихся в восходящем и нисходящем потоках. Влияние проникновения температурных возмущений в окружающие жидкость массивы на устойчивость такого течения изучено в [11].

1. Рассмотрим вертикальный слой жидкости ($-2h<x<0$) и примыкающий к нему слой пористой среды, насыщенной этой жидкостью ($0<x<2l$); x – поперечная координата; ось z направим вертикально вверх. Система в целом замкнута и имеет изотермические границы, нагретые до разных

температур

$$x=-2h:\quad T=\Theta,\qquad x=2l:\quad T=-\left(2\frac{l}{h}\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}+1\right)\Theta$$

Здесь $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — коэффициенты теплопроводности жидкости и насыщенной пористой среды; при сделанном выборе значения температуры на правой границе в режиме плоскопараллельного стационарного течения имеем $T=-\Theta$ на границе раздела ($x=0$). Для описания движения жидкости в вязком слое применяется уравнение конвекции в приближении Буссинеска [10], а в пористом слое — уравнения конвективной фильтрации в приближении Дарси — Буссинеска. Если в качестве единиц выбрать: h — расстояния, h^2/ν — времени, ν/h — скорости, $\nu^2/g\beta h^3$ — температуры, $\rho\nu^2/h^2$ — давления, где ν, ρ, β — кинематическая вязкость, плотность и коэффициент теплового расширения жидкости; g — ускорение силы тяжести, то уравнения Буссинеска и конвективной фильтрации запишутся в безразмерном виде следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=-\nabla p_1+\Delta\mathbf{v}+T_1\boldsymbol{\gamma} && \\
&\frac{\partial T_1}{\partial t}+\mathbf{v}\,\nabla T_1=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta T_1,\qquad \nabla\mathbf{v}=0 && (-2<x<0)\\
&\frac{1}{4s^2\,\mathrm{Da}}\mathbf{u}=-\nabla p_2+T_2\boldsymbol{\gamma} && \\
&\chi\frac{\partial T_2}{\partial t}+\varkappa\mathbf{u}\,\nabla T_2=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta T_2,\qquad \nabla\mathbf{u}=0 && (0<x<2s)
\end{aligned}\tag{1.1}$$

$$\mathrm{Pr}=\frac{\nu}{\chi_1},\qquad s=\frac{l}{h},\qquad \mathrm{Da}=\frac{K}{(2l)^2},\qquad \chi=\frac{\chi_1}{\chi_2},\qquad \varkappa=\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$$

Здесь $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ — скорость жидкости и скорость фильтрации; $T_{1,2}$, $p_{1,2}$ — температура и давление в вязком и пористом слое (здесь и далее величины, снабженные индексами 1 и 2, относятся соответственно к жидкости и пористой среде); γ — единичный вектор, направленный против силы тяжести; Da — число Дарси, определенное по ширине пористого слоя; K — проницаемость пористой среды; Pr — число Прандтля; $\chi_{1,2}$ — коэффициент температуропроводности. В отличие от [10] χ_2 определено через удельную теплоемкость насыщенной пористой среды: $\chi_2=\varkappa_2/(\rho C_p)_2$.

Тепловые граничные условия имеют вид

$$x=-2:\quad T_1=\mathrm{Gr};\qquad x=2s:\quad T_2=-(2s\varkappa+1)\,\mathrm{Gr}$$

$$x=0:\quad T_1=T_2,\qquad \varkappa\frac{\partial T_1}{\partial x}=\frac{\partial T_2}{\partial x};\qquad \mathrm{Gr}=\frac{g\beta h^3\Theta}{\nu^2}$$

Здесь Gr — число Грасгофа, определенное через полуразность температур на границах вязкого слоя (в плоскопараллельном режиме).

На твердой поверхности в вязком слое имеем для скорости жидкости обычное условие прилипания, на твердой поверхности в пористой среде исчезает нормальная компонента скорости фильтрации. На границе раздела жидкость — пористая среда для скорости жидкости и фильтрационной скорости должны выполняться равенство их нормальных компонент и условие проскальзывания Биверза — Джозефа

$$x=-2:\quad \mathbf{v}=0,\qquad x=2s:\quad u_x=0$$

$$x=0:\quad v_x=u_x,\qquad -\frac{\partial v_z}{\partial x}=\frac{\alpha}{2s\sqrt{\mathrm{Da}}}(v_z-u_z)\tag{1.2}$$

Здесь α — коэффициент проскальзывания, характеризующий состояние поверхности пористой среды. Далее будет рассматриваться плоская задача, т. е. $v_y=u_y=0$.

Имеющиеся экспериментальные данные (см., например, [5]) свидетельствуют о том, что α по порядку величины равно 0,1—1. При больших значениях α и достаточно малых числах Дарси ($|u_z|\ll|v_z|$) условие (1.2) переходит в условие прилипания (твердая граница), а при малых значениях α — в условие равенства нулю касательного напряжения (свободная граница).

Вместо условия непрерывности давления на границе раздела использовалось более общее условие (см. [3, 4]), при этом вся система в целом считается замкнутой

$$x=0: \quad -p_1+2\frac{\partial v_x}{\partial x}=-p_2$$

$$\int_{-2}^{0} v_z\,dx+\int_{0}^{2s} u_z\,dx=0$$

Распределения скорости жидкости, фильтрационной скорости, температуры и давления в стационарном плоскопараллельном течении имеют вид

$$v_0={}^1/_6\mathrm{Gr}(x^3+3(1-a)x^2+2bx-4c),\quad T_{1,0}=-\mathrm{Gr}(x+1)\quad(-2<x<0)$$

$$u_0=-4s^2\mathrm{Da}\mathrm{Gr}(\varkappa x+1-a),\quad T_{2,0}=-\mathrm{Gr}(\varkappa x+1)\quad(0<x<2s)$$

$$p_0=-\mathrm{Gr}\,az\quad(-2<x<2s)$$

$$a=s\sqrt{\mathrm{Da}}\{1+6s\sqrt{\mathrm{Da}}[\alpha+2s(s\varkappa+1)(\alpha+s\sqrt{\mathrm{Da}})]\}/d \tag{1.3}$$

$$b=\alpha\{1-18s^2\mathrm{Da}[1-4s^4\varkappa\mathrm{Da}+2s(s\varkappa+{}^2/_3)]\}/d$$

$$c=s\sqrt{\mathrm{Da}}\{1+6s\sqrt{\mathrm{Da}}[\alpha-6s^2\sqrt{\mathrm{Da}}(s\varkappa+{}^2/_3)-12\alpha s^4\varkappa\mathrm{Da}]\}/d$$

$$d=\alpha+4s\sqrt{\mathrm{Da}}+6\alpha s^2\mathrm{Da}+12s^3\mathrm{Da}(\alpha+s\sqrt{\mathrm{Da}})$$

Профили скорости жидкости и фильтрационной скорости для различных значений параметров изображены на фиг. 1—3. При малых числах Дарси скорость фильтрации много меньше характерной скорости движения жидкости в вязком слое и на фрагментах фиг. 1, *а*, *б* и 3, *а* в масштабах рисунков не может быть отражена.

2. Исследуем линейную устойчивость такого течения относительно плоских нормальных возмущений вида $\exp\{-\lambda t+ikz\}$, где $\lambda=\lambda_r+i\lambda_i$ — комплексный декремент возмущений, k — волновое число. При этом для амплитуд возмущений функции тока в жидкости $\varphi(x)$ и в пористой среде $\psi(x)$, а также амплитуд возмущений температуры $\vartheta_{1,2}(x)$ получим следующую краевую задачу:

$$-\lambda\Delta\varphi+ikv_0\Delta\varphi-ikv_0''\varphi=\Delta\Delta\varphi+\vartheta_1'$$

$$(-2<x<0)$$

$$-\lambda\vartheta_1+ikv_0\vartheta_1+ik\,\mathrm{Gr}\,\varphi=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta\vartheta_1$$

$$\Delta\psi=4s^2\mathrm{Da}\,\vartheta_2'$$

$$(0<x<2s) \tag{2.1}$$

$$-\lambda\chi\vartheta_2+ik\varkappa u_0\vartheta_2+ik\varkappa^2\,\mathrm{Gr}\,\psi=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta\vartheta_2$$

$$\Delta=\frac{d^2}{dx^2}-k^2$$

$$x=-2:\ \varphi=\varphi'=\vartheta_1=0;\qquad x=2s:\ \psi=\vartheta_2=0$$

$$x=0: \quad \varphi=\psi, \quad -\varphi''=\frac{\alpha}{2s\sqrt{\mathrm{Da}}}(\varphi'-\psi'), \quad \vartheta_1=\vartheta_2$$

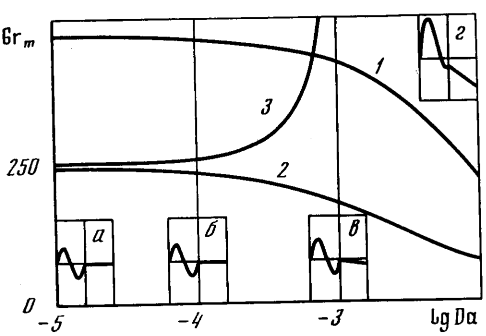
$$\varkappa\vartheta_1'=\vartheta_2', \quad (\lambda-ikv_0-3k^2)\varphi'+ikv_0'\varphi+\varphi'''=-\frac{1}{4s^2\,\mathrm{Da}}\psi'$$

Штрихом обозначено дифференцирование по x. Краевая задача (2.1) решалась методом дифференциальной прогонки. Определялись спектральные значения λ при заданных остальных параметрах. Граница устойчивости находится из условия $\lambda_r=0$; мнимая часть декремента λ_i при этом дает частоту нейтральных возмущений.

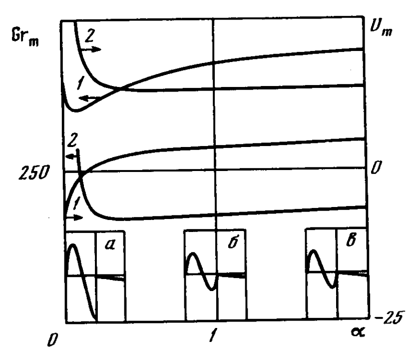
Целью данной работы является выяснение влияния условий гидродинамического сопряжения на границе вязкого и пористого слоев. Поэтому во всех расчетах тепловые свойства жидкости и пористой среды, насыщенной этой жидкостью, предполагались одинаковыми: $\varkappa=1$, $\chi=1$.

На фиг. 1 изображена зависимость минимального по k критического числа Грасгофа Gr_m от числа Дарси. Вязкий и пористый слои имеют одинаковую толщину $s=1$; коэффициент проскальзывания равен $\alpha=1$. Здесь и далее на фиг. 2, 3 и 4 кривая *1* соответствует гидродинамической моде неустойчивости при $\mathrm{Pr}=0{,}1$; кривые *2* и *3* описывают устойчивость относительно температурных волн, распространяющихся соответственно в восходящем ($\lambda_i>0$) и нисходящем ($\lambda_i<0$) потоках, при $\mathrm{Pr}=15$. На фрагментах изображены профили скорости в вязком слое и фильтрационной скорости для фиксированного значения числа Грасгофа и разных чисел Дарси: *а* — 10^{-5}, *б* — 10^{-4}, *в* — 10^{-3}, *г* — 10^{-2}. Увеличение проницаемости пористого слоя (т. е. числа Дарси) приводит к увеличению интенсивности течения в вязком слое и вместе с тем к отклонению его профиля от кубического.

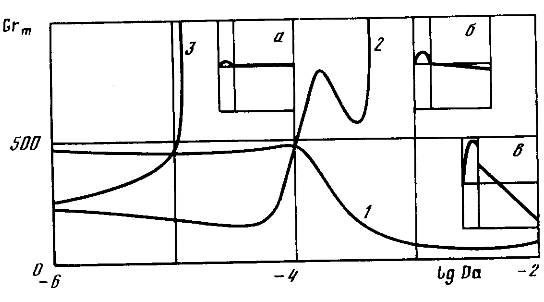
С ростом Da устойчивость течения относительно гидродинамических возмущений понижается (кривая *1*). Для $\mathrm{Da}=0$, когда массив ($0<x<2s$) непроницаем, но имеется тепловое взаимодействие между обоими слоями в отличие от случая идеально теплопроводных границ слоя жидкости,



Фиг. 1



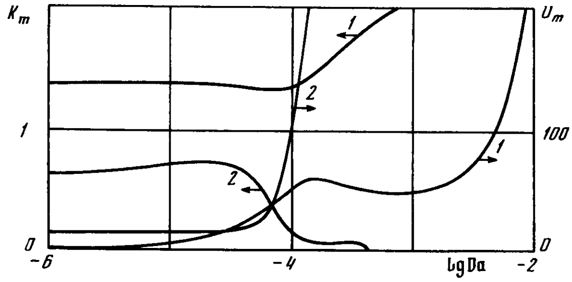
Фиг. 2



Фиг. 3

гидродинамические возмущения немонотонны и связаны с образованием системы дрейфующих вихрей на границе раздела встречных потоков [11]. Это обусловлено нарушением симметрии задачи для возмущений. Однако скорость дрейфа системы вихрей на два порядка меньше максимальной скорости в основном течении. С ростом числа Дарси фазовая скорость возмущений резко возрастает и при $\mathrm{Da}=10^{-2}$ становится сравнимой с максимальной скоростью в основном течении. Вихри при этом двигаются вместе с восходящим потоком, обладающим относительно большей интенсивностью.

С увеличением Da интенсивность восходящего потока увеличивается, а интенсивность нисходящего потока в вязком слое уменьшается. При этом устойчивость относительно температурных волн, распространяющихся



Фиг. 4

вместе с восходящим потоком (кривая *2*), уменьшается, а относительно волн, распространяющихся вместе с нисходящим потоком (кривая *3*), увеличивается. С увеличением Da до значения $\mathrm{Da}=1{,}05\cdot10^{-3}$ происходит стабилизация волн, бегущих вниз ($\mathrm{Gr}_m\to\infty$); критические волновые числа, соответствующие минимуму нейтральной кривой, при этом уменьшаются до нуля.

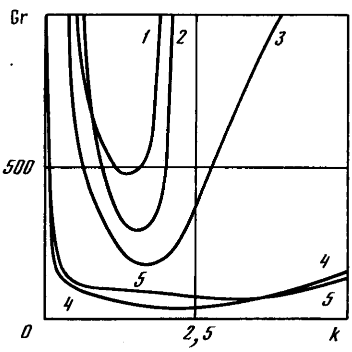
На фиг. 2 показаны зависимости числа Грасгофа Gr_m и фазовой скорости u_m, отвечающих минимуму нейтральной кривой $\mathrm{Gr}(k)$, от коэффициента проскальзывания α для $\mathrm{Da}=10^{-3}$. Толщины пористого и вязкого слоев по-прежнему считаются одинаковыми: $s=1$. На фрагментах *а*, *б* и *в* приведены профили скорости соответственно для $\alpha=0$; 1 и 2. При $\alpha\geqslant1$ характеристики неустойчивости для обеих мод практически не зависят от α. С уменьшением α устойчивость течения увеличивается. Критические волновые числа гидродинамических и тепловых возмущений при этом уменьшаются. В случае $\alpha<0{,}19$ гидродинамические возмущения двигаются вместе с нисходящим потоком, интенсивность которого становится выше, чем у восходящего.

На фиг. 3 и 4 изображены зависимости минимального по k числа Грасгофа Gr_m и отвечающих ему критического волнового числа k_m и фазовой скорости возмущений u_m от числа Дарси для отношения толщин пористого и вязкого слоев $s=4$; параметр проскальзывания равен $\alpha=1$. Профили скорости изображены для значений числа Дарси 10^{-4}, 10^{-3} и 10^{-2} (фрагменты *а*, *б*, *в*). Напомним, что число Дарси определено по ширине пористого слоя, поэтому значения Da на фиг. 3 и 4 отвечают проницаемостям в 16 раз большим, чем соответствующие им значения Da на фиг. 1. Масштаб, в котором изображены профили скорости на фиг. 3, в 25 раз меньше, чем на фиг. 1 и 2. С уменьшением значения Da интенсивность течения резко падает, поэтому изобразить профили скорости для $\mathrm{Da}<10^{-4}$ в этом масштабе не удается.

Нарастающие тепловые волны, распространяющиеся с восходящим потоком, существуют при числах Дарси, меньших $4{,}43\cdot10^{-4}$, а волны, распространяющиеся с нисходящим потоком — меньших $1{,}14\cdot10^{-5}$. При всех значениях Da, как и в случае $s=1$, наиболее опасны волны, бегущие вверх.

На фиг. 5 представлены нейтральные кривые гидродинамических возмущений для $s=4$, $\alpha=1$, $\mathrm{Pr}=0{,}1$. Кривые *1*–*5* отвечают соответственно значениям числа Дарси 0; $2\cdot10^{-4}$; $3\cdot10^{-4}$; $3\cdot10^{-3}$; 10^{-2}. При достаточно больших значениях Da форма нейтральных кривых значительно искажается по сравнению со случаем $\mathrm{Da}=0$. Для $s=1$ этот эффект выражен значительно слабее. Расчеты собственных функций рассматриваемой краевой задачи показывают, что при уменьшении волнового числа вдоль нейтральной кривой увеличивается проникновение возмущений в пористый слой; так что на правом конце горизонтального участка нейтральной кривой *4* возмущения локализованы в вязком слое, а на левом конце занимают целиком весь объем.

Во всей исследуемой области параметров критические гидродинамические возмущения, соответствующие минимуму нейтральной кривой $\mathrm{Gr}(k)$,



Фиг. 5

с ростом Da все больше проникают в пористый слой, увеличивая свой характерный горизонтальный размер. При этом критические волновые числа k_m увеличиваются, что свидетельствует об уменьшении вертикального масштаба возмущений. Отметим, что масштаб критических возмущений в задаче об устойчивости равновесия жидкости в системе вязких и пористых горизонтальных слоев [1, 2] с ростом проницаемости пористого массива увеличивается как вдоль, так и поперек слоев.

Для всех значений параметров Da, s, α нейтральные кривые тепловой моды неустойчивости имеют такую же форму, как и в случае вертикального слоя жидкости между непроницаемыми границами. Обе тепловые волны, как бегущая вверх, так и бегущая вниз, локализованы в вязком слое и почти не проникают в пористый массив, а их скорости сопоставимы с максимальной скоростью в основном течении.

Характер полученных зависимостей Gr_m, k_m и u_m от числа Дарси обусловлен, по-видимому, конкурирующим воздействием двух факторов: увеличением интенсивности движения в вязком слое и отклонением профиля скорости от кубического при увеличении проницаемости пористого слоя. Результаты, приведенные в данной работе, с точностью до знака фазовой скорости возмущений справедливы и для случая подогрева жидкости со стороны пористой среды.

В заключение отметим, что кроме естественного требования $\mathrm{Da}\ll1$, $s^2\mathrm{Da}\ll1$ существует еще одно ограничение на параметры задачи. Чтобы в пористой среде выполнялся принцип локального термодинамического равновесия, необходимо, чтобы характерное время рассасывания тепловых возмущений на масштабах порядка $\sqrt{K}$ было много меньше характерных времен $|\lambda_i|^{-1}$ для возмущений, т. е.

$$\mathrm{Da}\,\mathrm{Pr}\,s\chi|\lambda_i|\ll1$$

Для рассмотренных значений параметров последнее требование начинает нарушаться лишь при $s=4$, $\alpha=1$, $\Pr=0{,}1$ вблизи $\mathrm{Da}=10^{-2}$ для гидродинамической моды неустойчивости.

Автор благодарит Г. З. Гершуни за руководство работой и Д. В. Любимова за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Любимов Д. В., Муратов И. Д.* О конвективной неустойчивости жидкости в слоистой системе // Гидродинамика. Пермь: Перм. пед. ин-т, 1977. Вып. 10. С. 38–46.
2. *Бирих Р. В., Рудаков Р. Н.* Конвективная устойчивость горизонтального слоя жидкости с пористой перегородкой // Конвективные течения. Пермь: Перм. пед. ин-т, 1979. Вып. 1. С. 13–18.
3. *Nield D. A.* The boundary correction for the Rayleigh – Darcy problem: Limitations of the Brinkman equation // J. Fluid Mech. 1983. V. 128. P. 37–46.
4. *Pillatsis G., Taslim M. E., Narusawa U.* Thermal instability of a fluid-saturated porous medium bounded by thin fluid layers // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1987. V. 109. № 3. P. 677–687.
5. *Beavers G. S., Joseph D. D.* Boundary conditions at a naturally permeable wall // J. Fluid Mech. 1967. V. 30. Pt 1. P. 197–207.
6. *Gill A. E.* A proof that convection in a porous vertical slab is stable // J. Fluid Mech. 1969. V. 35. № 3. P. 545–547.
7. *Georgiadis J. G., Catton I.* Free convective motion in an infinite vertical porous slot: the non-Darcian regime // Int. J. Heat Mass Transfer. 1985. V. 28. № 12. P. 2389–2392.
8. *Kwok L. P., Chen C. F.* Stability of thermal convection in a vertical porous layer // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1987. V. 109. № 4. P. 889–893.
9. *Rees D. A. S.* The stability of Prandtl – Darcy convection in a vertical porous layer // Int. J. Heat Mass Transfer. 1988. V. 31. № 7, P. 1529–1534.
10. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
11. *Липчин А. Т.* Сопряженная задача устойчивости плоскопараллельного конвективного течения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 4. С. 18–22.

Пермь

Поступила в редакцию
14.VIII.1989