

УДК 532.526.2/4

© 1990 г.

Л. Г. ЛОЙЦЯНСКИЙ

МЕТОД ОБОБЩЕННОГО ПОДОБИЯ В РАСЧЕТАХ ВНУТРЕННЕЙ ПОДОБЛАСТИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Применение метода обобщенного подобия в расчетах ламинарных пограничных слоев полностью себя оправдало (см. [1, § 113, 114, 148]). Замена дифференциальных уравнений в частных производных на обыкновенные, универсальность их и возможность физического осмысливания решений на первом, параметрическом этапе расчета, отличающие метод обобщенного подобия от методов прямого численного интегрирования, сохраняются и в случае турбулентного пограничного слоя. Приведенное в конце статьи сравнение результатов расчета профилей скорости с опытными во внутренней подобласти турбулентного пограничного слоя позволяет надеяться на применимость метода обобщенного подобия к расчету турбулентного слоя «в целом».

1. Основное уравнение турбулентного пограничного слоя в произвольных переменных метода обобщенного подобия и его локальное приближение. Для расчета плоского стационарного турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости можно воспользоваться уравнением переноса импульса Рейнольдса в приближении пограничного слоя

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = - \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{dp}{dx} + \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{\rho} \right) \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right) \\ \frac{\nu \partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_t}{\partial y} \right) \end{array} \right. \quad (1.1)$$

выраженным при помощи функции тока осредненного движения ψ и альтернативно через касательные напряжения трения: полное (ламинарное + турбулентное) τ или только турбулентное $\tau_t = -\rho \overline{u'v'}$

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} + (-\rho \overline{u'v'}) = (\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y} = \rho (\nu + \nu_t) \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.2)$$

Здесь μ_t , ν_t — турбулентные коэффициенты вязкости по Буссинеску, ρ — плотность жидкости.

Следуя методу обобщенного подобия (МОП), подвергнем уравнение (1.1) преобразованию аффинного подобия

$$\frac{x}{L} = \xi, \quad \frac{y}{\delta} = \eta, \quad \frac{\psi}{\Psi} = \Phi, \quad \frac{1}{V} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{u}{V} = \dot{\Phi}, \quad \frac{\tau}{T} = \theta, \quad \frac{\tau_t}{T} = \theta_t \quad (1.3)$$

Безразмерные переменные, стоящие в правых частях этих равенств, назовем их переменными МОП, выражены в произвольных масштабах: $L = \text{const}$ и $\delta = \delta(x)$ — продольных и поперечных длин, $\Psi = V\delta = \Psi(x)$ — функции тока в осредненном движении, $V(x)$ — продольных скоростей, $T(x) = \rho V^2$ — напряжений трения.

Уравнение (1.1) в этих переменных в локальном приближении по x или ξ (производные от Φ и θ по x , или ξ опущены) примет вид (точка

над буквой — производная по η , штрих справа — по x)

$$(1/\text{Re}_\delta)(\omega\Phi\ddot{\Phi}-f\dot{\Phi}^2-P)+\theta=0 \quad (1.4)$$

$$(1/\text{Re}_\delta)(\ddot{\Phi}+\omega\Phi\ddot{\Phi}-f\dot{\Phi}^2-P)+\theta_t=0$$

$$f=V'\frac{\delta^2}{v}, \quad f_t=V\left(\frac{\delta^2}{v}\right)'=2V\frac{\delta\delta'}{v}, \quad f+\frac{1}{2}f_t=\omega$$

$$P=\left(\frac{dp}{dx}\right)\frac{\delta^2}{\mu V}, \quad \text{Re}_\delta=\frac{V\delta}{v} \quad (1.5)$$

Уравнения (1.4) послужат прототипами дальнейших уравнений, выраженных уже в характерных для данного участка масштабах и соответственно в конкретных переменных и параметрах МОП.

Заметим, что второе уравнение системы (1.4) содержит в себе как частный случай уравнение ламинарного пограничного слоя в локальном приближении. Действительно, полагая во втором уравнении системы (1.4) $\theta_t=0$, принимая за масштабы $V=U$ (скорость на внешней границе ламинарного слоя), $\delta=\delta^{**}$ (толщина потери импульса в сечениях пограничного слоя) и замечая, что при этом в однопараметрическом приближении $\omega=1$, получим уравнение Фокнера — Скэн — Хартри ($\dot{U}=cx^m$, см. [1, с. 527])

$$\ddot{\Phi}+\Phi\ddot{\Phi}+f(1-\dot{\Phi}^2)=0 \quad (1.6)$$

Численное решение этого уравнения легло в основу приближенного метода расчета ламинарного пограничного слоя, предложенного Н. Е. Кочиным и Л. Г. Лойцяным [2]. Этот аналог наводит на мысль, что предложение рассчитывать турбулентный пограничный слой жидкости подобия в локальном приближении, по крайней мере в удалении от точки отрыва (см. [1, рис. 194 и 195]), оправдывает себя.

Из (1.4) вытекают два важных следствия. Введем в рассмотрение угол ε наклона касательной к линии тока к контуру обтекаемого тела

$$\varepsilon = \text{tg } \varepsilon = \frac{v}{u} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big/ \frac{\partial \psi}{\partial y} =$$

$$= -\frac{(V'\delta+V\delta')\Phi-V\delta'\eta\dot{\Phi}}{V\dot{\Phi}} = \delta'\eta - \frac{V'\delta+V\delta'}{V} \left(\frac{\Phi}{\dot{\Phi}}\right)$$

умножая и деля правую часть на $\text{Re}_\delta=V\delta/v$, найдем

$$\varepsilon=(1/\text{Re}_\delta)[-f\eta+\omega(\eta-\Phi/\dot{\Phi})] \quad (1.7)$$

Проинтегрировав обе части первого из уравнений (1.4) по η от $\eta=0$ до текущего значения η , получим

$$\theta=\theta_w+\left(\frac{1}{\text{Re}_\delta}\right)\left[P\eta+f\int_0^\eta\dot{\Phi}^2d\eta-\omega\left(\Phi\dot{\Phi}-\int_0^\eta\dot{\Phi}^2d\eta\right)\right] \quad (1.8)$$

2. Масштабы, переменные и параметры во внутренней подобласти турбулентного пограничного слоя. Основными явлениями в пограничном слое служат: вязкое торможение жидкости (ее прилипание к твердой стенке), количественно характеризуемое касательным напряжением трения на стенке τ_w и ускорение или замедление движения продольным перепадом давления, определяемым величиной dp/dx . На этих величинах строятся масштабы и выраженные в них безразмерные величины: прандтлевские масштабы, переменные и параметры (индекс *)

$$V=v_*=\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad \delta=\lambda_*=\frac{v}{v_*}, \quad \Psi=V\delta=v, \quad T=\rho v_*^2=\tau_w$$

$$\begin{aligned}
 y_* &= \frac{y}{\lambda_*} = y \frac{v_*}{\nu}, & u_* &= \frac{u}{v_*}, & \Phi_* &= \frac{\psi}{\nu}, & \theta_* &= \frac{\tau}{\tau_w} = \tau_* \\
 \theta_{i*} &= \frac{\tau_i}{\tau_w} = \tau_{i*}, & f &= \frac{\nu v_*'}{v_*^2} = g_*, & f_1 &= -2g_* \\
 \omega &= f + \frac{1}{2} f_1 = 0, & P &= \frac{\nu}{\rho} \frac{dp}{dx} \frac{1}{v_*^3} = p_*, & \text{Re}_\delta &= \frac{v_* \lambda_*}{\nu} = 1
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

стрэтфордские [3] масштабы, переменные и параметры (индекс s):

$$\begin{aligned}
 V = v_s &= \sqrt[3]{\left(\frac{\nu}{\rho}\right) \frac{dp}{dx}}, & \delta = \lambda_s &= \frac{\nu}{v_s}, & \Psi &= \nu, & T &= \rho v_s^2 \\
 y_s &= \frac{y}{\lambda_s} = \frac{y v_s}{\nu}, & u_s &= \frac{u}{v_s}, & \Phi_s &= \frac{\psi}{\nu}, & \theta_s &= \frac{\tau}{\rho v_s^2} \\
 \theta_{is} &= \frac{\tau_i}{\rho v_s^2}, & f &= \frac{\nu v_s'}{v_s^2} = g_s, & f_1 &= -2g_s \\
 \omega &= 0, & P &= \frac{\nu}{\rho} \frac{dp}{dx} \frac{1}{v_s^3} = 1, & \text{Re}_\delta &= \frac{v_s \lambda_s}{\nu} = 1
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Общее, основанное на теории размерности учение о выборе масштабов для турбулентного слоя содержится в капитальных трудах [4].

По самому своему определению как величин, в частях которых выражаются безразмерные переменные, масштабы должны быть конечными, не равными ни нулю, ни бесконечности. Безградиентное ($dp/dx=0$) и отрывное сечение ($\tau_w=0$) являются в этом смысле особыми, так как в первом из них обращается в нуль v_s и в бесконечность λ_s , а во втором — в бесконечность λ_* и в нуль v_* .

Отмеченные в конце предыдущего пункта закономерности (1.7) и (1.8) значительно упростятся ($\omega=0$, $\text{Re}_\delta=1$) и примут вследствие малости ε_* и ε_s вид

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_* &= -g_* y_*, & g_* &= -\varepsilon_* / y_* = -\frac{d\varepsilon_*}{dy_*} \\
 \varepsilon_s &= -g_s y_s, & g_s &= -\frac{\varepsilon_s}{y_s} = -\frac{d\varepsilon_s}{dy_s}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

выражающий физический смысл параметров g_* и g_s как представленных в тех или других переменных быстрой возрастания наклонов линии тока ε_* и ε_s с удалением от твердой стенки. Опыты подтверждают малость этих параметров: при увеличении местного числа $\text{Re}^{**} = U\delta^{**}/\nu$ от 10^3 до 10^6 параметр g_* уменьшается от 10^{-6} до 10^{-9} [5].

Упростится и закономерность (1.8), приняв в прандтлевских и стрэтфордских переменных вид

$$\theta_* = \frac{\tau}{\rho v_*^2} = \frac{\tau}{\tau_w} = \tau_* = 1 + p_* y_* + g_* I_*, \quad I_* = \int_0^{y_*} u_*^2 dy_* \tag{2.4}$$

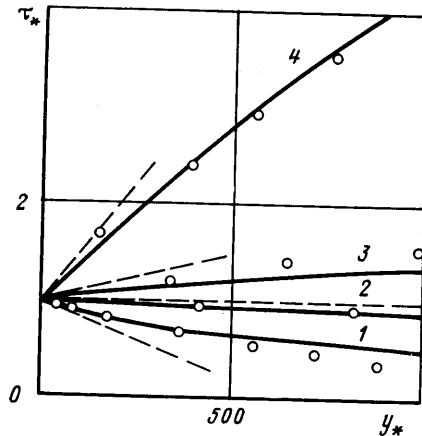
$$\theta_s = \frac{\tau}{\rho v_s^2} = \tau_s = \pi_s + y_s + g_s I_s, \quad I_s = \int_0^{y_s} u_s^2 dy_s. \tag{2.5}$$

При этом возникает новый параметр

$$\pi_s = \frac{\tau_w}{\rho v_s^2} = \left(\frac{v_*}{v_s} \right)^2 = (v_*^3)^{2/3} \left[\frac{v}{\rho} \frac{dp}{dx} \right]^{-2/3} = p_*^{-2/3}$$

Равенство (2.4) было предложено в [6], где был также затабулирован интеграл I_* на основе использования для $u_*(y_*)$ эмпирического профиля скоростей в трубе. Поскольку последнее слагаемое в трехчленах в правых частях (2.4) и (2.5) по малости и ограниченности I_* во внутренней подобласти турбулентного слоя малы, то такое приближение, как малая поправка к малой величине, совершенно оправданно. В дальнейшем будем пользоваться этим приближением.

На фиг. 1 приведено сравнение результатов расчета τ_* по (2.4), проведенного В. В. Зябриковым (сплошные линии), с имеющимися опытными данными (точки). Там же штриховыми линиями указаны распределения τ_* по линейному закону $\tau_* =$



Фиг. 1

$= 1 + p_* y_*$, соответствующему значению $g_* = 0$. Совпадение сплошных кривых с опытными точками для значений параметров: $p_* = -0,002$, $g_* = 2,8 \cdot 10^{-6}$; $p_* = 0$, $g_* = -2,7 \cdot 10^{-7}$; $p_* = 0,001$, $g_* = -1,7 \cdot 10^{-6}$; $p_* = 0,006$, $g_* = -3,7 \cdot 10^{-7}$, можно признать вполне удовлетворительным.

Расхождение пунктирных кривых, относящихся к значениям параметров: $p_* = -0,002$, $g_* = 2,8 \cdot 10^{-6}$, $p_* = 0$, $g_* = -2,7 \cdot 10^{-7}$; $p_* = 0,006$, $g_* = -3,7 \cdot 10^{-7}$, значительны. Это говорит о неприменимости линейных приближений к определению безразмерного напряжения трения τ_* или τ_s в «турбулентном ядре». Как далее будет показано, применение линейного приближения совершенно достаточно для расчета профилей скорости в сечениях внутренней подобласти турбулентного пограничного слоя. Промежуточное сечение, где

$$v_* = v_s, \quad \lambda_* = \lambda_s, \quad y_* = y_s, \quad \tau_* = \tau_s, \quad p_* = \pi_s = 1$$

назовем нейтральным. Оно может служить границей между безотрывной и предотрывной зонами пограничного слоя.

3. «Незамкнутые» уравнения турбулентного пограничного слоя во внутренней подобласти. Согласно второй строке прототипных уравнений (1.5), получим в прандтлевской и стрэтфордской системах переменных и параметров (точка — производная по y_* и y_s соответственно)

$$\ddot{\Phi}_* - g_* \dot{\Phi}_*^2 - p_* + \theta_{i*} = 0 \quad (3.1)$$

$$\ddot{\Phi}_s - g_s \dot{\Phi}_s^2 - 1 + \theta_{is} = 0 \quad (3.2)$$

Для замыкания этих имеющих в своем составе по две неизвестные функции Φ_* , θ_{i*} ; Φ_s , θ_{is} уравнений воспользуемся законом Прандтля

$$\tau_i = \rho l^2 (du/dy)^2 \quad (3.3)$$

Будем иметь

$$\theta_{i*} = \tau_{i*} = l_*^2 \left(\frac{du_*}{dy_*} \right)^2, \quad \theta_{is} = \tau_{is} = l_s^2 \left(\frac{du_s}{dy_s} \right)^2 \quad \left(l_* = \frac{lv_*}{\nu}, \quad l_s = \frac{lv_s}{\nu} \right) \quad (3.4)$$

$$\ddot{\Phi}_* - g_* \dot{\Phi}_*^2 - p_* + (d/dy_*) (l_*^2 \ddot{\Phi}_*^2) = 0 \quad (3.5)$$

$$\ddot{\Phi}_s - g_s \dot{\Phi}_s^2 - 1 + (d/dy_s) (l_s^2 \ddot{\Phi}_s^2) = 0 \quad (3.6)$$

Несмотря на принятые зависимости (3.4), уравнения (3.5) и (3.6) останутся незамкнутыми, пока не будут установлены закономерности распределения путей смещения l_* и l_s .

4. Современный аспект теории Прандтля пути смещения. Первая модификация.

В своей основоположной статье [8] Прандтль, опубликовав известную формулу напряжения турбулентного трения (3.3), ничего не сказал о распределении введенной им величины пути смещения l , удовлетвовавшись некоторыми о ней соображениями в случае свободной турбулентности. Сознавая этот недостаток, позже в специально предназначенной для инженеров статье [9] Прандтль применил свою формулу для ограниченного случая плоскопараллельного сдвигового движения вдоль безграничной плоскости при $\tau = \text{const} = \tau_w$, приняв простейший линейный закон пути смещения $l = \kappa y$, где y — расстояние точки от плоскости, а κ — опытная постоянная, принятая им равной $\kappa = 0,4$. Приведа наглядное объяснение этого линейного закона распределения пути смещения, Прандтль [9] предостерег своих читателей от использования этого, завидного по своей простоте линейного закона в общем случае потока с переменным касательным напряжением трения τ , а тем самым с произвольным продольным градиентом давления [9].

Первой попыткой учесть влияние перенности τ на распределение пути смещения стала формула [10]

$$l = xy \sqrt{\tau/\tau_w}, \quad l_* = xy_* \sqrt{\tau_*} \quad (4.1)$$

Обоснованием этой формулы служит наличие логарифмического профиля скоростей в турбулентном ядре безградиентного ($dp/dx=0$) сечения пограничного слоя, где вязким (молекулярным) трением по сравнению с турбулентным (молярным) можно пренебречь. Положив в формуле Прандтля (3.3) значения пути смещения по формуле (4.1), примем в турбулентном ядре $\tau = \tau_i$ и, сократив обе части полученно-го таким образом равенства на τ_i , получим

$$\tau_w = \rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2, \quad v_* = \kappa y \left(\frac{du}{dy} \right), \quad \frac{u}{v_*} = \frac{\ln y}{\kappa} + C$$

или в прандтлевских переменных (2.1)

$$u_* = (1/\kappa) \ln y_* + C_* \quad (4.2)$$

Точно так же в отрывном сечении ($\tau_w=0$), заменив τ_i на $y(dp/dx)$, получим уравнение и его интеграл

$$\frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}} = \bar{y} \frac{du}{dy}, \quad u' / \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}} = \left(\frac{2}{\kappa} \bar{y} + C_s \right)$$

или в стретфордских переменных (2.2)

$$u_* = (2/\kappa) \bar{y}_* + C_s \quad (4.3)$$

Наличие этих двух различных профилей скорости (логарифмического (4.2) и степенного (4.3)) в безградиентном ($dp/dx=0$) и отрывном ($\tau_w=0$) сечениях турбулентных ядер пограничного слоя уже давно не представляет новизны. Некоторое своеобразие составил факт консервативности существования этих профилей скорости в промежуточных между безградиентным и отрывным сечениями внутренней подобласти пограничного слоя. А. Е. Перри [11], обработав существующие экспериментальные исследования, установил следующую клиновидную двухъярусную структуру распределения скоростей в сечениях турбулентных ядер пограничного слоя. Согласно установленной им модели, логарифмический клин располагается в нижнем ярусе, непосредственно граничащем с переходным участком, имеет основание в безградиентном сечении внутренней подобласти, а вершину — в отрывном сечении. Степенной клин занимает верхний ярус, лежит на «щеке» логарифмического клина, являющейся границей между логарифмическим и степенным участками турбулентного ядра. При этом основание логарифмического клина находится в безградиентном сечении турбулентного ядра, а вершина — в отрывном его сечении, в то время как ос-

нование степенного клина, наоборот, размещается в отрывном сечении, а вершина в безградиентном.

Дадим теоретическое обоснование структуры турбулентных ядер внутренней подобласти пограничного слоя, причем количественно определим положение границы между логарифмическим и степенным клиньями и установим распределение пути смещения в сечениях внутренней подобласти.

Обозначим через $y_{*m}(x)$ и $y_{sm}(x)$ ординаты границы между логарифмическим и степенным участками турбулентного ядра. Тогда для существования структуры Перри надо принять распределение пути смещения по всем сечениям внутренней подобласти в форме

$$l_* = \kappa y_* \sqrt{\tau_*} \quad (0 \leq y_* \leq y_{*m}), \quad l_s = \kappa \sqrt{y_s \tau_s} \quad (y_{sm} \leq y_s) \quad (4.4)$$

Первое из этих равенств совпадает с формулой (4.1), второе — отлично от нее. Во второй формуле системы (4.4) перейдем к прандтлевским переменным по следующим формулам:

$$l_s = \frac{lv_s}{\nu} = \frac{lv_*}{\nu} \left(\frac{v_s}{v_*} \right) = \frac{l_*}{\sqrt{\pi_s}} = p_*^{1/2} l_* \quad (4.5)$$

$$y_s = \frac{yv_s}{\nu} = \frac{yv_*}{\nu} \left(\frac{v_s}{v_*} \right) = \frac{y_*}{\sqrt{\pi_s}} = p_*^{1/2} y_*$$

$$\tau_s = \frac{\tau}{\rho v_s^2} = \frac{\tau}{\rho v_*^2} \left(\frac{v_*}{v_s} \right)^2 = \tau_* \pi_s = p_*^{-2/3} \tau_*$$

$$l_* = \kappa y_* \sqrt{\tau_*} \quad (0 \leq y_* \leq y_{*m}), \quad l_* = \kappa \sqrt{y_* / p_*} \sqrt{\tau_*} \quad (y_{*m} \leq y_*) \quad (4.6)$$

Аналогично, совершая преобразования, обратные совокупности (4.5), придем к системе равенств в стрэтфордских переменных (2.2)

$$l_s = \kappa (y_s / \sqrt{\pi_s}) \sqrt{\tau_s} \quad (0 \leq y_s \leq y_{sm}), \quad l_s = \kappa \sqrt{y_s \tau_s} \quad (y_{sm} \leq y_s) \quad (4.7)$$

Определяя ординаты y_{*m} и y_{sm} как пересечения выбранных для распределения путей смещения l_* и l_s равенств (4.6) и (4.7), найдем искомые значения этих ординат

$$y_{*m} = 1/p_*, \quad y_{sm} = \pi_s \quad (4.8)$$

Вспоминая еще выведенные ранее значения напряжений трения τ_* по (2.4) и τ_s по (2.5), получим следующие распределения пути смещения в развернутой форме в прандтлевских или стрэтфордских переменных и параметрах:

$$\begin{aligned} l_* &= \kappa y_* \sqrt{1 + p_* y_* + g_* I_*} \quad (0 \leq y_* \leq y_{*m} = 1/p_*) \\ l_* &= \kappa \sqrt{y_* / p_*} \sqrt{1 + p_* y_* + g_* I_*} \quad (y_{*m} = 1/p_* \leq y_*) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} l_s &= \kappa_s (y_s / \sqrt{\pi_s}) \sqrt{\pi_s + y_s + g_s I_s} \quad (0 \leq y_s \leq y_{sm} = \pi_s) \\ l_s &= \kappa_s \sqrt{y_s \tau_s} \sqrt{\pi_s + y_s + g_s I_s} \quad (y_{sm} = \pi_s \leq y_s) \end{aligned} \quad (4.10)$$

В последних системах равенств принят во внимание опытный факт возрастания κ от начального значения $\kappa = 0,4$ в безградиентном сечении, в связи с чем вместо одного и того же κ введены различные обозначения κ_* и κ_s . Возрастание κ_* укладывается в эмпирическую формулу [5]

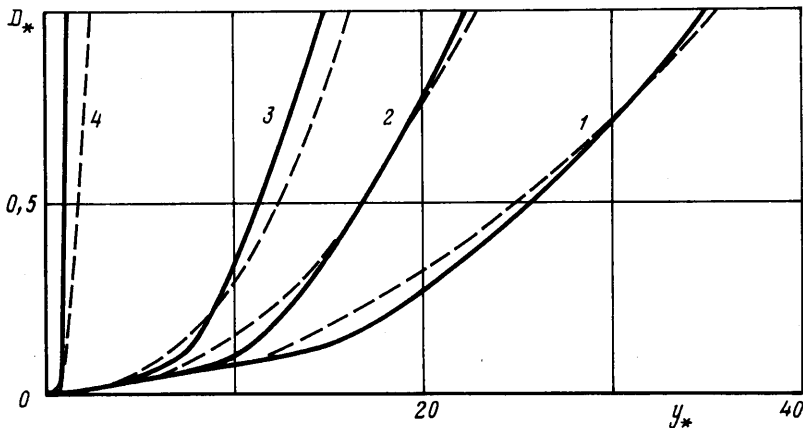
$$\kappa_* = 0,4 \quad (p_* \leq 0,006); \quad \kappa_* = 3,6 + 7,2p_* \quad (p_* > 0,006) \quad (4.11)$$

Отдельные ветви распределения пути смещения в каждой паре равенств (4.9) или (4.10) в точках границы $y_* = y_{*m} = 1/p_*$, $y_s = y_{sm} = \pi_s$ сращиваются непрерывно.

Такова первая модификация формулы Прандтля (3.3), учитывающая влияние переменности τ , а следовательно, и продольного градиента давления dp/dx на распределение пути смешения.

5. Вторая модификация формулы Прандтля. Общая формула пути смешения. Второй модификацией формулы Прандтля (3.3) служит введение учета влияния вязкого (молекулярного) трения на турбулентное (молярное), имеющее первостепенное значение в переходном участке турбулентного пограничного слоя от вязкого подслоя к турбулентному ядру.

Общая теория взаимодействия молекулярного и молярного обмена была изложена в [12], имеющей уже более чем полувековую давность, а также в последующей серии статей, итоговый результат которых можно найти в § 135 учебника [1]. Хотя на с. 699 в [1] даны формулы (16), (17), пригодные для общего случая переменного τ , но все дальнейшее изложение в § 135 в [1] относится лишь к частному случаю потока с постоян-



Фиг. 2

ным $\tau = \tau_w$, что соответствует частному значению $R_* = 11$ в интерполяционной формуле (21) из [1] для переходной функции $f(R)$, построенной по двум асимптотам при малых и больших R .

В [5] проведен расчет общего случая и определено значение демпфирующего фактора D_* в этом предположении при значениях параметра $p_* = 0; 0,01; 0,02; 0,10$ и предложена зависимость R_* от p_* (см. [5, рис. 2, справа]). Результаты расчета показаны на рис. 3в [5], воспроизведенного на фиг. 2 настоящей статьи сплошными кривыми. Для удобства приложений этих графиков в расчетах автором [5] рекомендована аппроксимирующая формула ($D_*(y_{*0}) = 1$ определяет значение y_{*0})

$$D_* = \begin{cases} 0,0008 \cdot \exp(50p_*) (1 + p_* y_*)^2 y_*^2 & (y_* \leq y_{*0}) \\ 1 & (y_* > y_{*0}) \end{cases} \quad (5.1)$$

совпадение которой (штриховые кривые) с расчетными в применении к определению профиля скорости можно признать удовлетворительными.

Напомним, что влияние обычной вязкости на турбулентное трение выражается умножением прандтлевского неучитывающего влияния вязкости пути смешения на $\sqrt{D_*}$, так что окончательными выражениями модифицированного пути смешения будут

$$l_* = \begin{cases} \kappa_* y_* \sqrt{1 + p_* y_* + g_* I_* \sqrt{D_*}} & (0 \leq y_* \leq y_{*m}) \\ \kappa_* \sqrt{y_* / p_*} \sqrt{1 + p_* y_* + g_* I_*} & (y_{*0} < y_{*m} \leq y_*) \end{cases} \quad (5.2)$$

Модифицированная влиянием переменности τ или dp/dx и вязкости жидкости формула касательного напряжения турбулентного трения при-

мет вид

$$\tau_{i*} = \theta_{i*} = \begin{cases} \kappa_*^2 y_*^2 (1 + p_* y_* + g_* I_*) D_* \ddot{\Phi}_*^2 & (0 \leq y_* \leq y_{*m}) \\ \kappa_*^2 (y_*/p_*) (1 + p_* y_* + g_* I_*) \ddot{\Phi}_*^2 & (y_{*m} \leq y_*) \end{cases} \quad (5.3)$$

6. Запнутая форма дифференциальных уравнений турбулентного пограничного слоя во внутренней подобласти. Исключим в уравнении (3.5) значение l_* согласно (5.2). Кроме того, с целью упрощения численного расчета остановимся на приближенном представлении уравнения, основанном на малости параметров g_* , I_* . Это позволит откинуть последние слагаемые в трехчленном выражении напряжения трения и опустить слагаемое $g_* \ddot{\Phi}_*^2$.

При этом существенным упрощением явится переход к единственному параметру p_* . Присоединяя очевидные граничные условия, составим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$\begin{aligned} \kappa_*^2 \left(\frac{d}{dy_*} \right) [y_*^2 (1 + p_* y_*) D_* \ddot{\Phi}_*^2] + \ddot{\Phi}_* - p_* &= 0 & (0 \leq y_* \leq y_{*m}) \\ \Phi_* = \dot{\Phi}_* = 0, \quad \ddot{\Phi}_* = \frac{\tau}{\tau_w} = 1 & \quad (y_* = 0) \\ \kappa_*^2 \left(\frac{d}{dy_*} \right) \left[\left(\frac{y_*}{p_*} \right) (1 + p_* y_*) \ddot{\Phi}_*^2 \right] - p_* &= 0 & (y_{*m} \leq y_*) \\ \Phi_* = \Phi_{*m} = \Phi_*(y_{*m}), \quad \dot{\Phi}_* = \dot{\Phi}_{*m} = \dot{\Phi}_*(y_{*m}) \\ \ddot{\Phi}_* = \ddot{\Phi}_{*m} = \ddot{\Phi}_*(y_{*m}) & \quad (y_* = y_{*m}) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Имеем простую вычислительную задачу с граничными условиями типа Коши. Она может быть сведена к квадратурам.

Действительно, непосредственно интегрируя обе части этих уравнений соответственно в интервалах $(0, y_*)$ и (y_{*m}, y_*) , придем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \kappa_*^2 y_*^2 (1 + p_* y_*) D_* \ddot{\Phi}_*^2 + \dot{\Phi}_* - (1 + p_* y_*) &= 0 & (0 \leq y_* \leq y_{*m}) \\ \Phi_* = \dot{\Phi}_* = 0 & \quad (y_* = 0) \\ \kappa_*^2 \left(\frac{y_*}{p_*} \right) (1 + p_* y_*) \ddot{\Phi}_*^2 - \kappa_*^2 \left(\frac{y_{*m}}{p_*} \right) (1 + p_* y_{*m}) \ddot{\Phi}_{*m}^2 - \\ - p_* (y_* - y_{*m}) &= 0 & (y_{*m} \leq y_*) \\ \Phi_* = \Phi_{*m}, \quad \dot{\Phi}_* = \dot{\Phi}_{*m} & \quad (y_* = y_{*m}) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Во втором уравнении опущено слагаемое $\dot{\Phi}_*$, имеющее порядок ламинарного трения, в турбулентном ядре ($y_* \geq y_{*m}$) малого по сравнению с турбулентным.

Применяя первое уравнение системы (6.2) к внешней границе логарифмического участка $y_* = y_{*m}$, опустим по той же причине слагаемое $\ddot{\Phi}_{*m}$ и напомним, что $p_* y_{*m} = 1$. Тогда будет $\ddot{\Phi}_{*m} = p_*/\kappa_*$ и второе уравнение системы (6.2) примет вид

$$\kappa_*^2 (y_*/p_*) \ddot{\Phi}_*^2 - 1 = 0 \quad (6.3)$$

Разрешая первое из уравнений системы (6.2) и уравнение (6.3) относительно $\dot{\Phi}_*$ и интегрируя получим

$$\dot{\Phi}_* = u_*(y_*) = \int_0^{y_*} \frac{2(1 + p_* y_*) dy_*}{1 + \sqrt{1 + 4\kappa_*^2 y_*^2 (1 + p_* y_*)^2 D_*}} \quad (0 \leq y_* \leq y_{*m}) \quad (6.4)$$

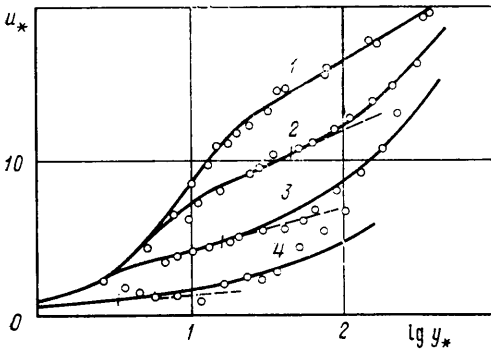
$$\dot{\Phi}_* = (2/\kappa_*) \sqrt{p_* y_* + \dot{\Phi}_{*m}} \quad (y_{*m} \leq y_*)$$

Не будем приводить форму для безразмерной функции тока Φ_* , получаемую из предыдущих повторным интегрированием в тех же двух интервалах.

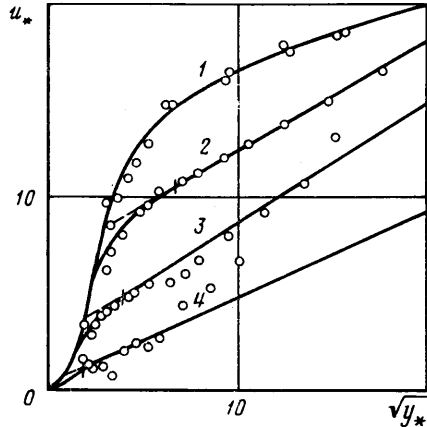
Подчеркнем автономность этих решений от соответствующих решений во внешней подобласти.

7. Универсальные профили скоростей в сечениях внутренней подобласти турбулентного пограничного слоя. В. В. Зябриков выполнил вычисление квадратур (6.4) и получил распределения универсальных скоростей в виде семейства с одним параметром p_* , которому придавал значения 0; 0,021; 0,062; 0,282, относящиеся к имеющимся опытным распределениям скоростей [13, 14]. Результаты расчета показаны сплошными линиями на фиг. 3 и 4 в анаморфозах: $(u_*, \lg y_*)$ и $(u_*, \sqrt{y_*})$; на расчетные края нанесены опытные точки [13, 14].

Совпадение теоретического расчета с опытом можно признать вполне удовлетворительным. Некоторый разброс экспериментальных точек и отклонение теоретических



Фиг. 3



Фиг. 4

кривых наблюдается при наибольшем значении $p_* = 0,282$. Это находит объяснение как трудностями эксперимента при появлении на поверхности модели отрыва, так и общим недостатком точности локального приближения, о чем уже упоминалось в начале статьи.

Изложенная в разд. 1 общая теория справедлива как для внутренней, так и для внешней подобластей пограничного слоя. Различие сказывается в необходимости по-разному описывать законы турбулентного трения в этих подобластях: законом Прандтля во внутренней и законом Клаузера во внешней. Граница между подобластями зависит от принятых законов сращивания решений по отдельным подобластям.

Кроме того, во внешней подобласти имеют место другие масштабы скоростей и длин. Применение метода обобщенного подобия не представляет трудности и в этой части расчета турбулентного пограничного слоя. Однако при этом значительно усложняется численная сторона расчета благодаря возникновению наряду с локальными еще глобальных параметров, таких, как местный коэффициент трения c_f , параметр формы H и число Re^{**} , характерных для пограничного слоя в целом. Параметры эти сложно переплетаются с локальными, что и создает трудности в числовых расчетах. В настоящее время эти расчеты производятся и результаты их составят содержание следующей публикации.

При составлении настоящей статьи большую помощь оказал автору В. В. Зябриков. Он не только проявил активное участие при обсуждении ее содержания, но провел численные расчеты и снабдил ее рисунками. Автор выражает ему искреннюю благодарность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
2. Кочин Н. Е., Лойцянский Л. Г. Об одном приближенном методе расчета ламинарного пограничного слоя // Докл. АН СССР. 1942. Т. 36. № 9. С. 278–284.
3. Stratford B. S. The prediction of separation of the turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. 1959. V. 5. № 1. P. 1–16.
4. Кадер Б. А., Яглом А. М. Применение соображений подобия к расчету замедляющихся турбулентных пограничных слоев // Докл. АН СССР. 1977. Т. 233. № 1. С. 52–55. Законы подобия для пристенных турбулентных течений // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Механика жидкости и газа. 1980. Т. 15. С. 81–155.
5. Зябриков В. В. Закономерности внутренней области турбулентного пограничного слоя // Инж.-физ. журн. 1989. Т. 56. № 5. С. 719–725.
6. Колес Д. «Закон стенки» в потоке с турбулентным касательным напряжением // Проблема пограничного слоя и вопросы теплопередачи. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1960. С. 138–147.
7. Bradshaw P., Ferriss D. H., Atwell N. P. Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation // J. Fluid Mech. 1967. V. 28. № 3. P. 593–616.
8. Prandtl L. Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz // Z. angew. Math. und Mech. 1925. B. 5. № 2. S. 136–139.
9. Prandtl L. Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung. VDI-Ztschr. 1933. B. 77. № 5. (Рус. перев.: Результаты работ последнего времени по изучению турбулентности // Проблемы турбулентности. М.; Л.: ОНТИ, 1936. С. 9–34.)
10. Reeves B. L. Two-layer model of turbulent boundary layers // AIAA Journal. 1974. V. 12. № 7. P. 932–939.
11. Perry A. E. Turbulent boundary layers in decreasing adverse pressure gradients // J. Fluid Mech. 1966. V. 26. № 3. P. 481–506.
12. Лойцянский Л. Г. Турбулентное движение жидкости и внутренняя задача // Изв. НИИ Гидротехники. 1933. Т. 9. С. 1–13.
13. Simpson R. L., Chew Y.-T., Shivaprasad B. G. The structure of a separating turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. 1981. V. 113. P. 23–51.
14. Simpson R. L. A review of some phenomena in turbulent flow separation // Trans. ASME, J. Fluids Eng. 1981. V. 103. № 4. P. 520–533.

Ленинград

Поступила в редакцию
15.XI.1989