

УДК 532.526.2.013.4

© 1990 г.

А. Б. ИГУМНОВ, А. С. СОЛОВЬЕВ

О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТРУКТУРЕ ДВУМЕРНЫХ ВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В работе авторов [1] на основе численного интегрирования уравнений Навье — Стокса исследовалась нелинейная эволюция двумерных возмущений вида бегущих волн в пограничном слое плоской пластины. Рассматривался процесс взаимодействия двух волн с различными волновыми числами и начальными амплитудами.

Данная работа посвящена дальнейшему изучению таких взаимодействий. Особое внимание уделено пространственной структуре возмущений по координате, направленной поперек течения (по продольной координате возмущения считаются периодическими), в различные моменты времени. Показано, что если начальная амплитуда одной из волн достаточно велика, т. е. превосходит некоторое пороговое значение, в процессе взаимодействия устанавливается незатухающий квазистационарный режим. При меньших амплитудах процесс вырождается и волны развиваются независимо друг от друга.

Эволюция пространственного распределения амплитуд возмущений в обоих случаях качественно различна. В первом случае форма амплитуд меняется во времени незначительно, во втором — существенно зависит от параметров волновых чисел и числа Рейнольдса. Когда параметры таковы, что какая-либо из волн конечной амплитуды затухает, ее амплитудное распределение быстро эволюционирует к виду, характерному для возмущений сплошного спектра линейной задачи устойчивости.

1. Рассматривается обтекание плоской пластины вязкой несжимаемой жидкостью при больших числах Рейнольдса $Re = \sqrt{U_\infty} L / \nu$, где L — длина пластины, U_∞ — скорость набегающего потока, ν — коэффициент кинематической вязкости. Предполагается, что в пограничном слое пластины поток представляет собой суперпозицию невозмущенного (основного) течения и возмущений вида бегущих волн конечной амплитуды. Основное течение описывается уравнениями Прандтля, а поведение возмущений — решениями нестационарных уравнений Навье — Стокса.

Граничные условия для возмущений имеют вид

$$v(x, z, t) = 0, \quad z = 0, \quad z \rightarrow \infty \quad (1.1)$$

Они выражают требования прилипания и непротекания жидкости на поверхности пластины и отсутствие возмущений вдали от нее. Здесь t , x , z — время, продольная и поперечная координаты, $v \equiv (u, v)$ — вектор скорости возмущающего течения. Предполагается также, что взаимодействующие волны периодичны в направлении распространения x и имеют кратные периоды: их волновые числа $\alpha_s = s\alpha$ в s раз (s — целое) превосходят некоторую заданную величину $\alpha = 2\pi/X$, где X — максимальный общий период возмущений.

Решение уравнений Навье — Стокса ищется в виде конечных рядов Фурье и Чебышева

$$v(x, t) = \sum_{m=-M}^{M-1} \sum_{l=0}^L v_{ml}(t) \exp(i\alpha m x) T_l(z^*) \quad (1.2)$$

$$p(x, t) = \sum_{m=-M}^{M-1} \sum_{l=0}^L p_{ml}(t) \exp(i\alpha m x) T_l(z^*)$$

$$T_l(z^*) = \cos(l \arccos z^*)$$

Координата z^* меняется в интервале $[-1, 1]$, на который (см. [1]) отображен интервал $[0, \infty]$, p — давление, T_l — полином Чебышева 1-го рода.

В качестве начальных данных используются собственные решения, соответствующие дискретному спектру линейной задачи устойчивости — волны Толлмина — Шлихтинга с постоянными вещественными амплитудами множителями A_1^0 и A_2^0 (начальными амплитудами):

$$\begin{aligned}
 u(x, z, 0) &= \sum_{s=1}^2 u_s(z) \exp(i\alpha_s x) + \text{к. с.}, \\
 w(x, z, 0) &= \sum_{s=1}^2 w_s(z) \exp(i\alpha_s x) + \text{к. с.} \\
 u_s &= A_s^0 \varphi_s'(z), \quad w_s = -i\alpha_s A_s^0 \varphi_s(z), \quad \max_z |\varphi_s'(z)| = 1/2
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Штрих в (1.3) означает дифференцирование по z , $\varphi_s(z)$ — комплексные собственные функции уравнения Орра — Зоммерфельда.

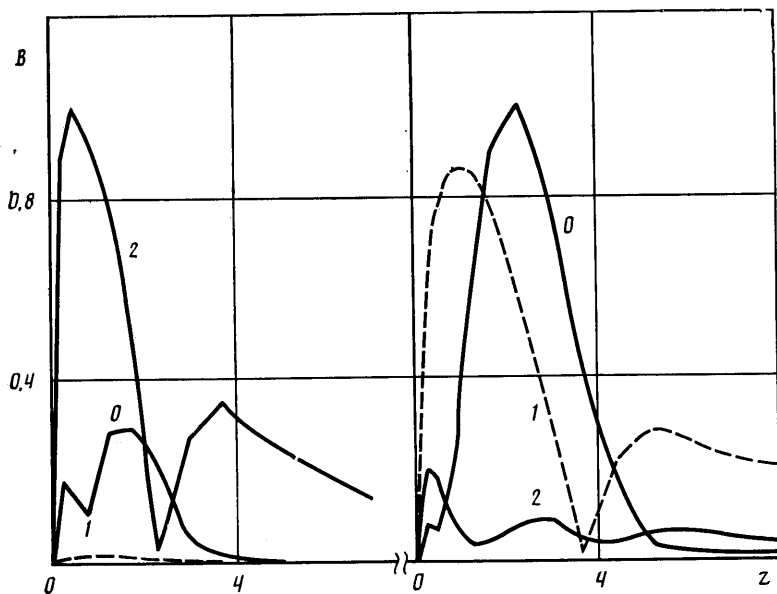
Нелинейные уравнения для возмущений, дополненные граничными и начальными условиями (1.1), (1.3), решаются численно. Метод решения подробно описан в [1–3], и его изложение далее опущено.

Отметим, что сформулированная задача о возмущениях, как видно из (1.2), решается во временной постановке — изменение амплитуд возмущений допускается только по времени, но не по пространству. В экспериментах же по пограничному слою изучаются обычно возмущения, периодические во времени, амплитуды которых меняются с изменением пространственной координаты x [4–6]. Это отличие несколько затрудняет сравнение результатов расчета с экспериментом. Тем не менее в настоящее время имеются работы [7, 8], где проводилось непосредственное сравнение между расчетными данными, полученными из решения эволюционной задачи во временной постановке, и измерениями пространственно растущих возмущений. В [7], в частности, численно изучалась структура сложного трехмерного возмущения («турбулентного» пятна) в пограничном слое и эволюция этого пятна во времени. Для возмущенного течения строились линии равной скорости, завихренности и т. п. Результаты сравнивались с измерениями [4], в которых пятно эволюционировало по x . Сильное сходство результатов указывает на принципиальную возможность адекватного сопоставления расчетных данных с экспериментом, несмотря на различия в постановке задач.

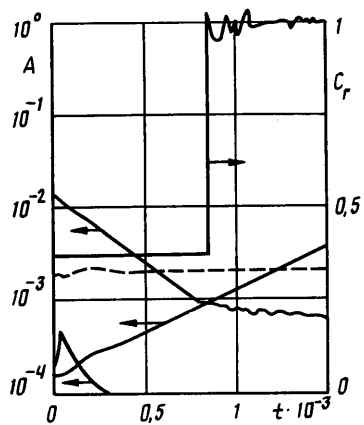
2. Результаты расчетов взаимодействия волновых возмущений представлены на фиг. 1–5. Параметры M , L , Re всюду фиксированы: $M=16$, $L=32$, $Re^*=1185$, где $Re^*=1,72\sqrt{Re}$ — значение числа Рейнольдса, взятое по толщине вытеснения пограничного слоя. Приведены амплитудные распределения B_m от z (m — номер волны, индексом ноль отмечены кривые стационарной составляющей продольной скорости возмущающего движения) и зависимости амплитуд A_m и фазовых скоростей c_{rm} волн от времени. Для величины A_m , c_{rm} , B_m введены следующие определения, связывающие их с продольной скоростью возмущений u_m (см. также [1]):

$$\begin{aligned}
 A_m(t) &= \sqrt{2} \max_z B_m(z, t), \quad B_m = |u_m(z, t)|, \quad A_m(0) \equiv A_m^0 \\
 c_{rm}(t) &= \frac{1}{m\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \arctg \left[-\frac{\text{Im}(u_m(z_0, t))}{\text{Re}(u_m(z_0, t))} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

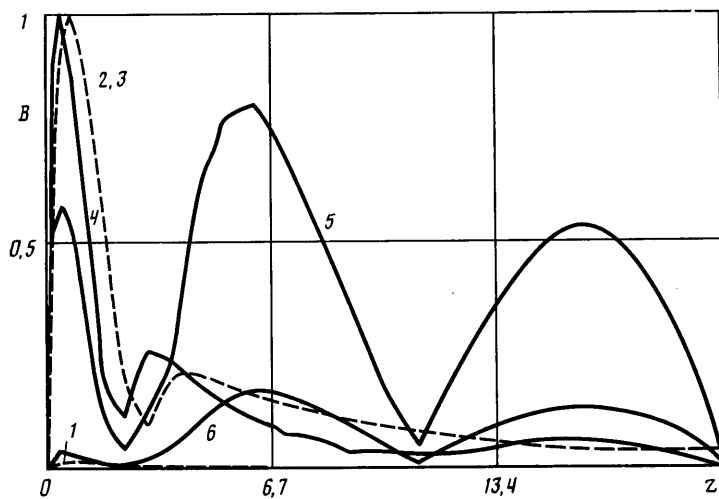
Через z_0 в (2.1) обозначено значение z внутри пограничного слоя, где достигается максимум модуля u_m , а множитель $\sqrt{2}$ введен в соответ-



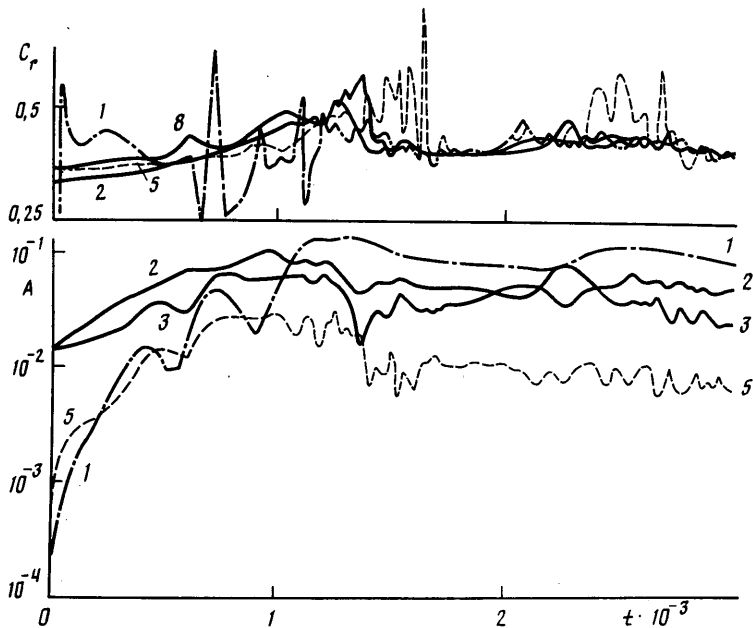
Фиг. 1



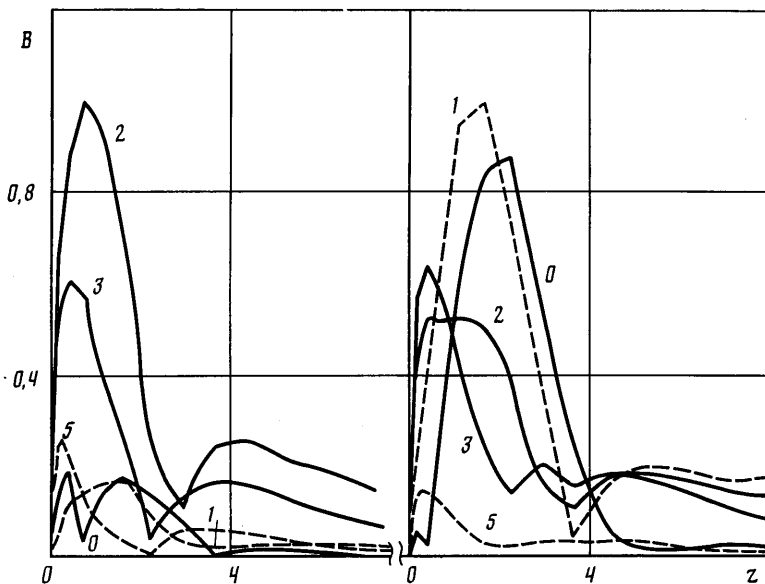
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

ствии с нормировкой (1.4) для сравнения с результатами других работ. При такой нормировке $A_m(t)$ есть мера среднеквадратичной величины продольной скорости m -й гармонической моды, измеряемой в экспериментах.

Особый интерес представляет эволюция формы амплитудных распределений B_m . При больших числах Re , как известно [9–11], вблизи стенки образуется область сильной неоднородности течения, в которой амплитуды возмущений быстро меняются по координате z . Эти изменения определяют характер пристенных процессов — интенсивность обмена энергией между волнами, степень искажения профиля средней скорости в пограничном слое и т. п.

На фиг. 1 показана зависимость B_m от z в некоторые фиксированные моменты времени $t_1=0,5 \cdot 10^3$ (левая часть фиг. 1) и $t_2=2 \cdot 10^3$ (на фиг. 1 — справа). Здесь и всюду на других фигурах функции B_m нормированы так, что $\max_{m, z} B_m(z, t)=1$. Эта нормировка удобна при анализе амплитудных распределений — на диаграмме в этом случае видна относительная величина амплитуд. Результаты расчета соответствуют процессу субгармонического взаимодействия двух волн — гармонике с волновым числом $\alpha_2=0,396$ и субгармонике (волновое число $\alpha_1=\alpha_2/2$). Начальные амплитуды заданы следующим образом: $A_2(0)=0,057$, $A_1(0)=1,41 \cdot 10^{-4}$. В данной работе нет необходимости приводить зависимости A_m и c_{rm} от времени — они приведены в [1] (фиг. 4), где обсуждаются также резонансные свойства возмущений. Подчеркнем лишь, что при столь большой начальной амплитуде одной из гармоник A_2 процесс является незатухающим.

В процессе эволюции амплитуды волн сначала растут, после $t \simeq t_1$ несколько убывают, а при больших $t \simeq t_2$ достигают некоторых конечных пределов $A_1 \simeq 0,2$, $A_2 \simeq 3 \cdot 10^{-2}$ [1, фиг. 4]. Соответствующие амплитудные распределения волн B_1 и B_2 , как видно из фиг. 1, в течение всего процесса, вплоть до $t \simeq t_2$, устойчиво сохраняют форму начальных распределений. Этот факт представляется неожиданным, поскольку процесс при $A_m \sim 10^{-2} - 10^{-1}$ существенно нелинеен. Следует отметить также сильное увеличение распределения амплитуды стационарного течения B_0 , которое при $t=t_2$ становится даже больше амплитуд самих взаимодействующих волн. Зависимость B_0 от z в различные моменты времени имеет характерный двугорбый вид.

На фиг. 2 приведены амплитуды $A_m(t)$ и фазовые скорости $c_{rm}(t)$ при тех же значениях параметров, что и на фиг. 1, но для $A_2(0)=1,41 \cdot 10^{-2}$, т. е. уменьшенной примерно на порядок. Видно, что в этом случае происходит вырождение процесса взаимодействия — обе волны развиваются независимо в соответствии с законами линейной теории. Обращает внимание, однако, несколько необычное поведение затухающей гармоники $A_2(t)$ при $t \simeq 9 \cdot 10^2$. Кривая A_2 здесь меняет угол наклона, а ее фазовая скорость резко возрастает и колеблется вблизи линии $c_r=1$. В теории устойчивости такие значения c_r , как известно, характерны для возмущений сплошного спектра [12—14]. Соответствующие распределения амплитуд (собственных функций) сплошного спектра также качественно отличаются по виду от собственных функций дискретного спектра — они не имеют выраженного максимума вблизи стенки и сильно колеблются по z при удалении от нее.

Фигура 3, где приведены распределения амплитуд для различных моментов времени (кривым 1—3 соответствуют значения B_1 при заданных $t_1=25$, $t_2=900$, $t_3=1500$, а кривым 4—6 значения B_2 в те же моменты времени), показывает, что в рассматриваемом случае действительно происходит трансформация пространственной структуры гармоники B_2 от дискретного спектра к непрерывному. Этот факт находится в соответствии с выводами линейной теории (см., например, [13]): коэффициенты затухания сплошного спектра $\sim \alpha^2/\text{Re}$ при больших Re очень малы, поэтому в общем случае из произвольного возмущения, включающего полный набор возмущений того и другого вида, «выживают» те составляющие, коэффициенты затухания которых минимальны. Возможность изменения формы амплитудного распределения затухающих возмущений конечной амплитуды следует иметь в виду и в физических экспериментах, поскольку датчик термоанемометра при измерениях интенсивности и фазовой скорости волн располагается обычно в точке максимума амплитуды.

На фиг. 4 в отличие от предыдущих результатов показано взаимодействие двух гармоник при более общих соотношениях между волновы-

ми числами $\alpha_3=0,342$ и $\alpha_2=2\alpha_3/3$. Здесь индексами 2 и 3 обозначены параметры амплитуд и фазовых скоростей самих гармоник, а индексами 1 и 5 — параметры их комбинационных гармоник с волновыми числами $\alpha_3-\alpha_2$ и $\alpha_3+\alpha_2$ соответственно (теми же цифрами обозначены кривые). Значения α_2 и α_3 выбраны на основе результатов задачи устойчивости из области нарастания возмущений (внутри нейтральной кривой).

Начальные амплитуды $A_2(0)=A_3(0)=1,41 \cdot 10^{-2}$ сравнительно велики и процесс с самого начала является нелинейным. Хорошо видны различия в поведении комбинационных составляющих при больших t — их амплитуды стремятся к разным квазистационарным состояниям, причем таким образом, что величина A_1 остается на порядок больше A_5 . Это в целом согласуется с общетеоретическими выводами о более высокой скорости затухания коротковолновых возмущений — длина волны суммарной гармоники $\lambda \sim (\alpha_3+\alpha_2)^{-1}$ здесь в 5 раз меньше, чем разностной, у которой $\lambda \sim (\alpha_3-\alpha_2)^{-1}$.

Что касается зависимости кривых фазовых скоростей комбинационных гармоник от времени, обращают внимание довольно сильные колебания вблизи значений фазовых скоростей основных мод. Размах колебаний $c_r(t)$ особенно значителен, когда происходят быстрые изменения амплитуды $A(t)$ соответствующей гармоники. По мере установления квазистационарного режима кривые фазовых скоростей сближаются и колебания уменьшаются. Отметим, что после $t \sim 1700$ значение фазовых скоростей волн близко по величине своим начальным значениям.

На фиг. 5 приведены амплитудные распределения всех волн в фиксированные моменты времени $t_1=500$ (левая часть фигуры) и $t_2=2000$ (правая часть). Форма амплитудных распределений с изменением t меняется незначительно, за исключением стационарной составляющей течения B_0 и разностной гармоники B_1 (ср. соответствующие кривые в левой и правой частях фиг. 5; нумерация кривых та же, что на фиг. 4). Интересно, что B_1 в процессе взаимодействия принимает вид, характерный для волн бесконечно малой амплитуды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Игумнов А. Б., Соловьев А. С. О резонансных свойствах двумерных волновых возмущений в пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 2. С. 37–44.
2. Игумнов А. Б., Соловьев А. С., Яненко Н. Н. О численном методе изучения волновых явлений в нелинейных средах с дисперсией // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985. Т. 16. № 1. С. 49–66.
3. Игумнов А. Б., Соловьев А. С. Устойчивый псевдоспектральный метод решения начально-краевых задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26. № 12. С. 1895–1900.
4. Kovaszny L. S. G., Komoda H., Vasudeva B. R. Detailed flow field in transition // Proc. Heat Transfer and Fluid Mech. Inst., Washington, 1962. Stanford, Calif.: Univ. press, 1962. P. 1–26.
5. Nishioka M. N., Morkovin M. V. Boundary-layer receptivity to unsteady pressure gradients: experiments and overview // J. Fluid Mech. 1986. V. 171. P. 219–261.
6. Bernal L. P., Roshko A. Streamwise vortex structure in plane mixing layers // J. Fluid Mech. 1986. V. 170. P. 499–525.
7. Wray A., Hussaini M. Y. Numerical experiments in boundary-layer stability // Proc. Roy. Soc. London. 1984. V. A392. № 1803. P. 373–389.
8. Meicalfe R. W., Orszag S. A., Brachet M. E. et al. Secondary instability of a temporally growing mixing layer // J. Fluid Mech. 1987. V. 184. P. 207–243.
9. Бетцов Р., Кримиале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971. 350 с.
10. Герценштейн С. Я., Штеглер Ю. М. О возмущениях конечной амплитуды в пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 1. С. 150–153.
11. Orszag S. A., Patera A. T. Secondary instability of wall-bounded shear flows // J. Fluid Mech. 1983. V. 128. P. 347–385.
12. Case C. E. Stability of inviscid plane Couette flow // Phys. Fluids. 1960. V. 3. № 2.
13. Grosch C. E., Salwen H. The continuous spectrum of the Orr – Sommerfeld equation. Pt 1. The spectrum and eigenfunctions // J. Fluid Mech. 1978. V. 87. № 1. P. 33–54.
14. Маслюк С. А. Неустойчивости и переход в сдвиговых течениях // Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. М.: Мир, 1984. С. 218–270.

Новосибирск

Поступила в редакцию
14.X.1989