5. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967). М.: Наука, 1969. 545 с.
6. *Коновалов А. Н.* Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск: Наука, 1988. 165 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
1.VI.1989

УДК 533.6.011.55



С. А. ГОРОХОВ, В. В. ЕРЕМИН, А. М. ПОЛЯКОВ

# ГИПЕРЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ТРЕУГОЛЬНЫХ КРЫЛЬЕВ С ЗАТУПЛЕННЫМИ КРОМКАМИ

Рассматривается гиперзвуковое установившееся обтекание идеальным газом треугольного крыла со сферическим носком и цилиндрическими передними кромками.

Исследованию этой задачи посвящен ряд теоретических и экспериментальных работ [1–3]. Среди них отметим работу [2], где впервые аналитически установлен эффект растекания газа в окрестности плоскости симметрии крыла.

В работах [4, 5] разрабатывались численные методы и алгоритмы решения этой задачи, однако численные результаты получены для малых удлинений крыла $\lambda=x/r_0\leqslant 10$ (фиг. 1) в ограниченном диапазоне определяющих параметров задачи – числа $M_\infty$, угла стреловидности $\chi$ и угла атаки $\alpha$.

В настоящей работе предложен метод, позволяющий проводить расчеты гиперзвукового обтекания идеальным газом треугольных крыльев с затупленными кромками для удлинений $\lambda=100-200$. Проведены систематические расчеты обтекания крыльев в диапазонах $6\leqslant M_\infty\leqslant 20$, $0\leqslant\alpha\leqslant 20°$, $60°\leqslant\chi\leqslant 80°$, результаты обработаны в параметрах гиперзвукового подобия.

Рассмотрим стационарное сверхзвуковое обтекание идеальным газом треугольного крыла с цилиндрическими кромками, затупленного в носке по сфере (фиг. 1). В поле течения выделим три характерные области: область носового притупления (I); область вблизи кромки с большими градиентами газодинамических параметров (II); область над плоскими наветренной и подветренной сторонами крыла (III).

В каждой из областей I–III введем свои системы координат: соответственно сферическую, цилиндрическую и декартову.

Уравнения, описывающие стационарное сверхзвуковое течение идеального газа, в указанных областях имеют вид

$$\frac{d}{dq_1}\iint\limits_S \mathbf{a}\,dq_2dq_3=\oint\limits_\Gamma [(\mathbf{c}-\mathbf{a}\xi^{q_3})\,dq_2-(\mathbf{b}-\mathbf{a}\xi^{q_2})\,dq_3]+\iint\limits_S \mathbf{f}\,dq_2\,dq_3 \tag{1}$$

$$\mathbf{a}=a_0\begin{bmatrix}\rho u\\ p+\rho u^2\\ \rho uv\\ \rho uw\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=b_0\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ p+\rho v^2\\ \rho vw\end{bmatrix},\quad \mathbf{c}=c_0\begin{bmatrix}\rho w\\ \rho uw\\ \rho vw\\ p+\rho w^2\end{bmatrix}$$

Здесь $\Gamma$ – некоторый замкнутый контур, ограничивающий площадку $S$ на поверхности $q_1=\mathrm{const}$, вектор $\xi=d\mathbf{n}/dq_1$, где $d\mathbf{n}$ – проекция смещения $\Gamma$ на свою внешнюю нормаль $n$ и $\xi^{q_2}$, $\xi^{q_3}$ – проекции вектора $\xi$ на оси $q_2$ и $q_3$; $q_1$, $q_2$, $q_3$ – обобщенная ортогональная система координат.

В декартовой системе координат

$$q_1\equiv x,\qquad q_2\equiv y,\qquad q_3\equiv z,\ a_0=b_0=c_0=1,\qquad \mathbf{f}=0$$

В цилиндрической системе координат

$$q_1\equiv x,\qquad q_2\equiv r,\qquad q_3\equiv\varphi,\qquad a_0=b_0=1.\qquad c_0=r$$

$$\mathbf{f}=\frac{\rho}{r}\begin{bmatrix}v\\ uv\\ v^2-w^2\\ 2vw\end{bmatrix}$$

В сферической системе координат

$$q_1\equiv\theta,\qquad q_2\equiv r,\qquad q_3\equiv\varphi,\qquad a_0=r\sin\theta,\qquad b_0=r^2\sin^2\theta,\qquad c_0=r$$

$$\mathbf{f} = r \sin\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 2p + \rho(v^2 + w^2) \\ (p + \rho w^2)\, ctg\theta - \rho uw \\ -\rho w\,(v \operatorname{ctg}\theta + u) \end{bmatrix}$$

Система уравнений (1) замыкается уравнением постоянства полной энтальпии

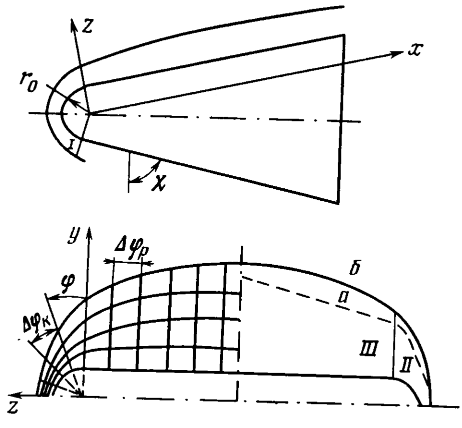
$$\frac{2\gamma}{\gamma-1}\,\frac{p}{\rho} + u^2+v^2+w^2 = \frac{1}{(\gamma-1)M_\infty{}^2} + 1$$

Здесь и далее давление $p$ отнесено к удвоенному скоростному напору на бесконечности $\rho_\infty V_\infty{}^2$, плотность $\rho$ – к плотности на бесконечности $\rho_\infty$, компоненты скорости $u$, $v$, $w$ – к величине скорости на бесконечности $V_\infty$. На поверхности тела ставится условие непротекания, а на головной ударной волне – условия Гюгонио.

Для численного интегрирования уравнений (1) разработан алгоритм, позволяющий использовать три варианта метода Годунова: схему Годунова первого порядка [7], схему Годунова – Колгана, обладающую вторым порядком по поперечным направлениям [8], и схему Годунова второго порядка по всем направлениям, предложенную в [9].

Отличительной особенностью данного алгоритма является также использование аналогично [4] направленной вдоль кромки крыла маршевой координаты $x$ (фиг. 1). Такой прием позволяет естественным образом производить стыковку систем координат в областях II и III и использовать разностные сетки, строящиеся аналитически следующим образом.

На кромке крыла используется цилиндрическая система координат, связанная с кромкой, при этом сохраняется постоянное количество ячеек по меридиональному



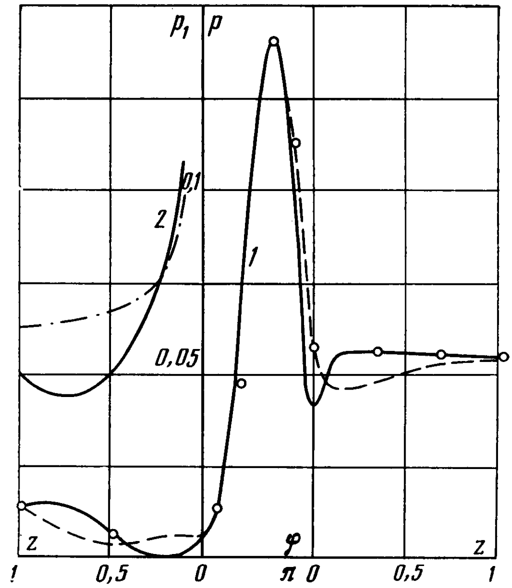

Фиг. 1

углу $\varphi$ (фиг. 1) и шаг $\Delta\varphi_k$=const. При сохранении постоянного количества ячеек на плоскости крыла шаг сетки в области III становится переменным ввиду растущего поперечного размера крыла. Алгоритм построен так, что $\Delta\varphi_p = (1-2)\Delta\varphi_k$.

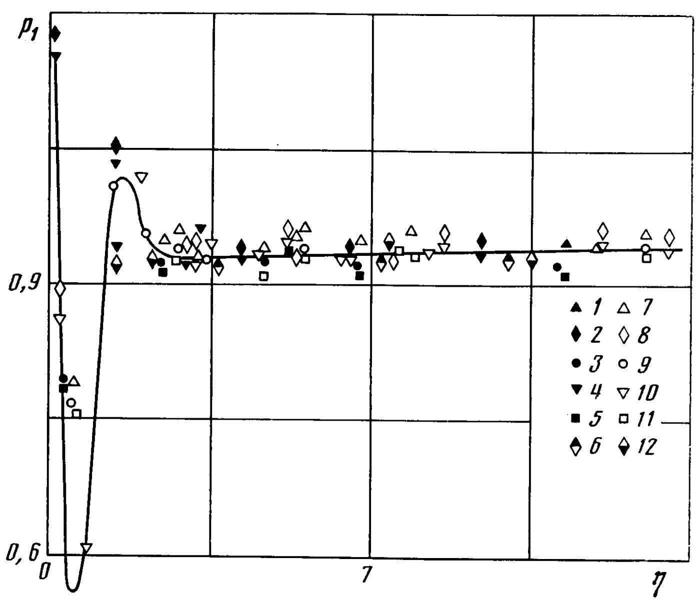
При невыполнении этого условия узлы сетки на плоскости крыла добавляются до тех пор, пока позволяют ресурсы ЭВМ. Ограниченность этих ресурсов приводит к тому, что при значительных удлинениях крыла $\lambda \gtrsim 100$ размеры $\Delta\varphi_p$ и $\Delta\varphi_k$ могут различаться на порядок. В этом случае использование схемы Годунова приводит к появлению значительных осцилляций и нефизических особенностей в распределении параметров, что отмечалось также в [6].

Этого недостатка практически лишена схема второго порядка, что иллюстрирует фиг. 1, где приведены формы ударной волны в поперечном сечении $\lambda=15$ при обтекании крыла с $\chi=70°$ при $\alpha=0°$, $M_\infty=10$, полученные по двум схемам (Годунова (*а*) и Годунова – Колгана (*б*)) на одинаковых разностных сетках. Расчеты, проведенные по схеме Годунова – Колгана, практически совпадают с данными, полученными по схеме второго порядка, но в силу того, что шаг по маршевой координате в этой схеме можно выбирать почти в 2 раза больший и сократить время расчетов примерно в 1,5 раза, в дальнейшем все расчеты проводились с ее использованием.

На фиг. 2 представлено распределение давления (*1*) в сечении $\lambda=8$ при $\chi=70°$, $\alpha=10°$, $M_\infty=6{,}8$, $\gamma=1{,}4$, полученное настоящим методом (сплошная линия) и данные, полученные из решения параболизованных уравнений Навье – Стокса (штриховая линия) [5]. Точками показаны экспериментальные результаты [5]. Данные хорошо согласуются в области кромки крыла, небольшое различие результатов на плоской поверхности обусловлено влиянием эффектов вязкости. Зоны, где они про-




Фиг. 2




Фиг. 3

являются, достаточно локализованы и вклад их в интегральные аэродинамические характеристики невелик.

Как уже отмечалось, известные авторам численные результаты, где возможны сравнения, ограничены весьма малыми величинами удлинения крыла $\lambda \leqslant 10$. Поэтому достоверность результатов, полученных при больших значениях удлинений крыла, проверялась путем проведения расчетов с использованием различных схемных модификаций и на различных разностных сетках с экстраполяцией на нулевой шаг. Результаты расчетов для крыла с $\chi=70°$ при $\alpha=0$, $M_\infty=10$ приведены в таблице в зависимости от количества ячеек разностной сетки в поперечном сечении $N$. Относительные погрешности определения величины давления на теле $p_т$ и радиуса головной ударной волны $r_в$

$$\Delta p_т = \frac{p_т - p_0}{p_0} \cdot 100\%, \quad \Delta r_в = \frac{r_в - r_0}{r_0} \cdot 100\%$$

| $N$ | $\Delta P_{\text{т}}$, % | | | $\Delta R_{\text{в}}$, % |
|---|---|---|---|---|
| | $x=15,\ z=0$ | $x=15,\ z=3$ | $x=30,\ z=0$ | $x=30,\ z=0$ |
| 259 | 7 | 10 | 1 | 2,2 |
| 453 | 4 | 5 | 0,5 | 1,4 |
| 732 | 2,5 | 3 | 0,3 | 0,5 |
| 1008 | 1,7 | 2 | 0,2 | 0,3 |

где $p_0$, $r_0$ – давление и радиус волны, получены экстраполяцией на нулевой шаг сетки.

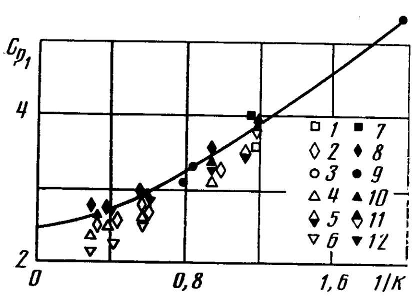
Анализ этих данных показывает, что погрешности $\Delta p_{\text{т}}$, $\Delta r_{\text{в}}$ уменьшаются почти линейно с возрастанием $N$ и поэтому, несмотря на применение схемы, имеющей второй порядок на гладких решениях, в целом решение получается с первым порядком аппроксимации, что соответствует выводам [9]. Это объясняется, как уже отмечалось, значительными различиями в размерах ячеек $\Delta\varphi_k$ и $\Delta\varphi_p$.

Остановимся на некоторых особенностях гиперзвукового обтекания затупленных треугольных крыльев достаточно большого удлинения ($\lambda \gtrsim 50$–$60$). На фиг. 3 представлено распределение максимального давления $p_1 = p/\sin^2\alpha_n$ на кромке крыла в зависимости от параметра гиперзвукового подобия

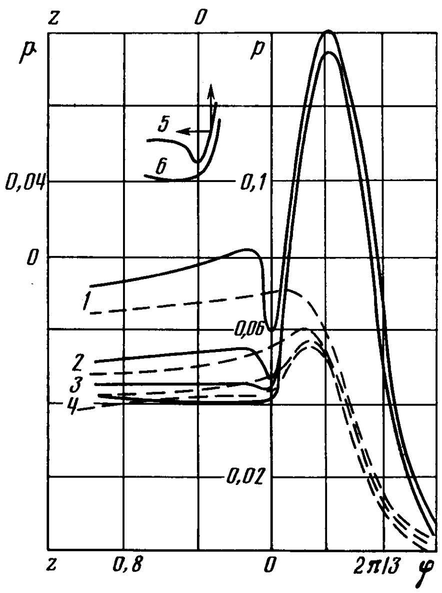
$$\eta = \frac{x}{r_0}\sqrt{\frac{2}{C_{x_0}}}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha_n, \qquad \sin\alpha_n = \frac{M_n}{M_\infty},$$

$$M_n = M_\infty\sqrt{1-\cos^2\alpha\,\sin^2\chi}$$

где $\alpha_n$ – местный угол атаки, $C_{x_0}$ – коэффициент волнового сопротивления сферическо притупления. Точками *1–6* и *7–12* на фиг. 3 отмечены режимы течения при $\alpha=0$ и $10°$ соответственно: *1* и *7* – $M_\infty=10$, $\chi=65°$; *2* и *8* – $M_\infty=10$, $\chi=70°$; *3* и *9* – $M_\infty=15$, $\chi=65°$; *4* и *10* – $M_\infty=15$, $\chi=70$; *5* и *11* – $M_\infty=20$, $\chi=65°$; *6* и *12* – $M_\infty=20$, $\chi=70°$.




Фиг. 4




Фиг. 5

Давление на кромке крыла как для $\alpha=0$, так и для $\alpha=10°$ при $\eta \gtrsim 2$ выходит на асимптотическое значение, а его уровень хорошо описывается ньютонианской теорией

$$p_{\text{т}} = 0{,}92\sin^2\alpha_n + \frac{1}{\gamma M_\infty^2}$$

Попытка использования того же параметра подобия $\eta$ для представления распределения давления в плоскости симметрии крыльев дала отрицательный результат.

Для представления данных при больших удлинениях ($\lambda \gtrsim 20$) оказывается целесообразным использование параметра сверхзвукового подобия $K = (M_\infty^2-1)\sin^2\alpha_n$. Результаты обработки величины $C_{p_1} = C_p/\sin^2\alpha_n$ с использованием этого параметра представлены на фиг. 4. Точками *1–6* и *7–12* отмечены режимы течения при $\lambda=30$ и 100 соответственно: *1* и *7* – $\chi=70°$, $\alpha=5°$; *2* и *8* – $\chi=70°$, $\alpha=10°$; *3* и *9* – $\chi=75°$, $\alpha=5°$; *4* и *10* – $\chi=75°$, $\alpha=10°$, *5* и *11* – $\chi=80°$, $\alpha=5°$; *6* и *12* – $\chi=80°$, $\alpha=10°$.

Видно, что с увеличением $\lambda$ точность корреляции улучшается. Сплошными линиями показана аппроксимационная зависимость для плоских треугольных крыльев, взятая из работы [10]

$$C_p=2\sin^2\alpha_n\left(\frac{\gamma+1}{4}+\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2+\frac{1}{K}}\right)$$

Проведенный анализ показывает, что использование этих зависимостей для затупленных крыльев допустимо при $M_n\gtrsim 2$ и $\eta\gtrsim 4$.

Характерные распределения давления в поперечном направлении в зависимости от координат $z'=z/x\,\mathrm{ctg}\,\chi$ на плоской поверхности крыла и $\varphi$ на кромке для $\lambda=100$ и $\alpha=10°$ представлены на фиг. 5. Сплошными кривыми показаны распределения давления для крыла с углом стреловидности $\chi=70°$, штриховыми – для крыла с $\chi=80°$: *1* – $M_\infty=6$, *2* – 10, *3* – 15, *4* – 20.

При гиперзвуковом обтекании затупленных крыльев достаточно большого удлинения распределение давления в поперечных сечениях крыла приближается к асимптотическому и примерно соответствует обтеканию затупленного клина с углом полураствора $\beta=\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,\alpha/\cos\chi)$ при $M_\infty=M_n$.

В рассмотренных диапазонах углов стреловидности $\chi$, чисел $M_\infty$ и углов атаки можно выделить два характерных режима течения. Первый тип течения определяется такими величинами $M_n$ и $\beta$, при которых разворот потока на затупленном клине осуществляется до сверхзвуковой скорости. Для плоских треугольных крыльев этот режим характеризуется присоединенным к кромкам крыла скачком. Для такого режима течения характерен провал давления в окрестности точки сопряжения кромки крыла с плоскостью (фиг. 5). Величина этого провала возрастает с уменьшением числа $M_\infty$ (сплошная линия на фиг. 5), а уровни давления хорошо совпадают с данными таблиц сверхзвукового обтекания плоских тел [11] (кривым *5* и *6* на фиг. 5 соответствуют числа $M_n=2{,}5$ и 3).

С увеличением $M_n$ до значения, при котором поток на кромке не успевает развернуться до сверхзвуковой скорости, реализуется второй тип течения с дозвуковой поперечной скоростью на наветренной стороне крыла. Для плоских треугольных крыльев этот режим характеризуется отходом скачка от кромок крыла. Типичные распределения давления для этого режима течения изображены на фиг. 5 штриховыми кривыми: *1* – $M_n=1{,}5$; *2* – 2,4; *3* – 3,7; *4* – 4,8.

В заключение отметим, что в настоящей работе численно подтверждены данные о наличии растекания в окрестности плоскости симметрии треугольных крыльев с затупленными кромками, полученные в [2, 3], что иллюстрируют результаты расчетов обтекания крыла с углом стреловидности $\chi=60°$ при $\alpha=5$, $M_\infty=20$ (кривая *2* на фиг. 2 ($p_1=0{,}5p$)). На эффект растекания в плоскости симметрии указывает минимум давления при $z=0{,}75$. Вблизи кромки расчетные значения хорошо совпадают с асимптотическим, соответствующим обтеканию затупленного клина [11] (штрихпунктирная кривая на фиг. 2).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Черный Г. Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
2. *Лунев В. В.* Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 327 с.
3. *Иванов В. В., Красильников А. В.* Экспериментальное исследование распределения давления на треугольном крыле с притупленными кромками при малых углах атаки // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 2. С. 166–169.
4. *Магомедов К. М., Холодов А. С.* О сверхзвуковом пространственном обтекании треугольного крыла с притупленными кромками // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 4. С. 159–163.
5. *Таннехил А., Венкатанатхи Э., Рэкич Дж. В.* Расчет сверхзвукового вязкого обтекания затупленных треугольных крыльев // Ракетная техника и космонавтика. 1982. Т. 20. № 3. С. 46–55.
6. *Ганжело А. Н., Крайко А. Н., Макаров В. Е., Тилляева Н. И.* О повышении точности решения газодинамических задач // Современные проблемы аэромеханики. М.: Машиностроение. 1987. С. 87–102.
7. *Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
8. *Колган В. П.* Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Уч. зап. ЦАГИ, 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
9. *Родионов А. В.* Монотонная схема второго порядка аппроксимации для сквозного расчета неравновесных течений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27. № 4. С. 585–593.
10. *Лапыгин В. И.* Нормальная сила плоского треугольного крыла в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 3. С. 162–164.
11. *Лебедев М. Г., Пчелкина Л. В., Сандомирская И. Д.* Сверхзвуковое обтекание плоских затупленных тел. М.: Изд-во МГУ, 1974. 238 с.



Москва

Поступила в редакцию
16.VIII.1988