

на фиг. 3 отмечены точками 5. Эти области специфичны для чисто модовой структуры внутренних волн в канале.

В случае движения полуцилиндра по дну канала картина, приведенная на фиг. 3, практически полностью сохраняется, если заменить отношение  $H/d$  на  $H/R$ , где  $R$  — радиус цилиндра. В этом случае прямая 1 уже соответствует критическому значению  $F_H$  для первой моды, 2 — для второй.

В заключение авторы выражают благодарность А. Т. Онуфриеву за внимание к работе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксенов А. В., Можяев В. В., Скороваров В. Е., Шеронов А. А. Особенности обтекания цилиндра стратифицированной жидкостью при малых значениях внутреннего числа Фруда // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 4. С. 175–178.
2. Miles J. W. Lee waves in a stratified flow. Pt 2. Semi-circular obstacle // J. Fluid Mech. 1968. V. 33. № 4. P. 803–814.
3. Аксенов А. В., Городцов В. А., Стурова И. В. Моделирование обтекания цилиндра стратифицированной идеальной несжимаемой жидкостью: Препринт № 282. М.: ИПМ АН СССР, 1986. 60 с.
4. Аксенов А. В., Кириллов В. П., Можяев В. В. и др. Структура внутренних волн в канале // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 1. С. 106–110.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.

Москва

Поступила в редакцию  
13.VII.1989

УДК 532.517.4

© 1990 г.

Т. А. БУНГОВА, Г. Н. ВОЛЧКОВА, А. В. ЛАВРОВ

#### К ВОПРОСУ О ВЫБОРЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ РАСЧЕТЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ СО<sub>2</sub>-ЛАЗЕРОВ С СЕЛЕКТИВНЫМ ТЕПЛОВЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

В последнее время в газодинамических СО<sub>2</sub>-лазерах с селективным тепловым возбуждением широко используется смешение осесимметричных сверхзвуковых струй колебательно-возбужденного азота и углекислого газа в сопловых блоках сотовой конструкции (см. [1–3]). В таких блоках смешиваются струи с числами Маха  $M=3-6$  и статическими давлениями  $P=1-10$  кПа. Низкий уровень давления при смешении обуславливает одно из основных их преимуществ по сравнению с блоками, в которых смешение начинается выше по течению внутри плоского сопла при меньших числах Маха и больших давлениях, — малые потери колебательной энергии, вследствие чего максимальная эффективность лазера достигается при больших значениях начального давления  $P_0$ , а следовательно, увеличивается энергоемкость единицы площади выходного сечения. Об этом свидетельствуют, в частности, экспериментальные данные [3]. Одним из основных недостатков блоков сотовой конструкции являются весьма значительные потери давления вследствие смешения с большими числами Маха.

В настоящее время процессы в блоках сотовой конструкции анализируются на основе модели мгновенного смешения или одномерной модели с фиксированной длиной смешения [1, 2]. В первой из моделей процессы смешения вообще не рассматриваются, во второй длина перемешивания является параметром, который должен задаваться заранее из общих закономерностей смешения турбулентных струй.

В данной работе для анализа смешения релаксирующих струй используется система трехмерных параболизированных уравнений Навье — Стокса. Ранее аналогичные уравнения использовались для исследования пространственного смешения инертных блочных струй [4].

Принцип действия ГДЛ с селективным тепловым возбуждением обуславливает важность корректного учета турбулентного смешения при численном моделировании. Поэтому в работе приведены также результаты расчета дозвуковых инертных и сверхзвуковых релаксирующих плоских струй, позволяющие оценить достоинства и недостатки трех моделей турбулентности и ту величину неопределенности получаемых лазерных характеристик, которая определяется выбором модели. Наряду с расчетами течений в газодинамических лазерах разработанный метод может оказаться полезным при анализе однородности потока, создаваемого в аэродинамических трубах и в других устройствах [1, 5].

1. Для получения достоверных результатов расчетов ГДЛ необходимо достаточно корректно описывать процессы турбулентного смешения. Поскольку в лите-

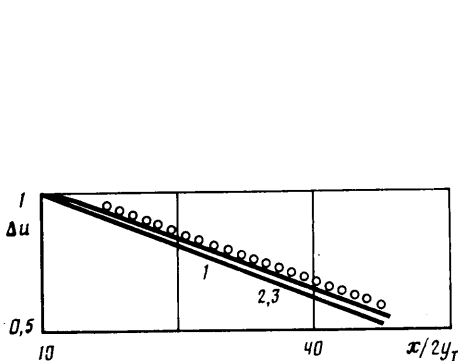
ратуре отсутствуют экспериментальные данные измерений каких-либо гидродинамических параметров, на основе которых можно было бы оценить возможность использования различных моделей турбулентности, исследовалась применимость трех широко используемых полуэмпирических моделей турбулентности к более простым струйным течениям — смешению в системе чередующихся плоских струй и смешению плоской дозвуковой струи со спутным потоком, для которых имеются надежные экспериментальные данные [6, 7].

Рассмотрим задачу о смешении плоской дозвуковой струи со спутным потоком. Для ее решения применяется система уравнений узкого канала [7]. Для определения эффективного коэффициента турбулентной вязкости используется формула Прандтля [8]

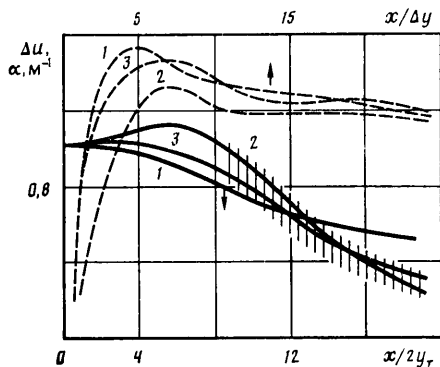
$$\mu = \kappa \rho \delta (u_{\max} - u_{\min}) \quad (1.1)$$

полуэмпирическая теория на основе дифференциального уравнения баланса энергии турбулентных пульсаций [7],  $k$ - $\epsilon$ -модель турбулентности со стандартным набором коэффициентов [9].

Результаты расчетов приведены на фиг. 1, 2, где кривые 1–3 соответствуют указанным моделям турбулентности. Экспериментальные точки [6] и расчетные



Фиг. 1



Фиг. 2

данные по изменению дефекта скорости  $\Delta u = (U_I - U_E) / (U_I - U_E)|_{x=0}$  для одиночной струи приведены на фиг. 1,  $U_E/U_I = 0,67$ ,  $y_I$  — полуширина струи. При использовании (1.1) наилучшее согласие между расчетом и экспериментом достигается при  $\kappa = 0,007$ . При расчете по модели [7] единственным варьируемым параметром является начальный уровень энергии турбулентных пульсаций  $k_0$ , результаты расчета хорошо согласуются с экспериментом при  $k_0 = 0,005$ . Отметим, что в эксперименте энергия турбулентности при  $x=0$  не измерялась, в работе [6] указывается, что ее величина была незначительна.

В ряде работ (см., например, [10]) отмечается, что существенные сложности при использовании  $k$ - $\epsilon$ -модели связаны с выбором начальных распределений  $k$  и  $\epsilon$ . В данной работе предполагается, что

$$k(0, y) = C_k u^2(0, y), \quad \epsilon(0, y) = 0,3 k^{1,5}(0, y) / y I C_\epsilon$$

где  $C_k$  и  $C_\epsilon$  — некоторые константы, которые в методических расчетах варьировались. Наилучшее согласие с экспериментами по дозвуковым струям достигается при  $C_k = 0,005$ ,  $C_\epsilon = 0,1$ .

Экспериментальные [1] и расчетные данные изменения дефекта скорости для системы чередующихся плоских дозвуковых струй показаны штриховкой и сплошными кривыми на фиг. 2 (обозначения те же, что и на фиг. 1), значения  $\kappa$ ,  $k_0$ ,  $C_k$ ,  $C_\epsilon$  приведены выше,  $U_E/U_I = 0,35$ . Видно, что расчетные зависимости, полученные с использованием (1.1), удовлетворительно согласуются с экспериментом. Существенно лучше согласование наблюдается при использовании теории [7] и  $k$ - $\epsilon$ -модели.

Поскольку одной из основных целей работы является оценка точности определения энергетических характеристик лазера, проведен расчет ГДЛ со смешением в режиме усиления слабого сигнала и генерации на основе системы двумерных параболизированных уравнений Навье — Стокса [11] с использованием трех моделей турбулентности с указанными выше значениями  $\kappa$ ,  $k_0$ ,  $C_k$ ,  $C_\epsilon$ . Оказалось, что данные по выходному энергопотреблению различаются не более чем на 10%. Отметим, что этот результат хорошо согласуется с расчетами [11], в которых сравнивались данные по энергопотреблению, полученные с использованием [7] и модели мгновенного смешения.

Изменение среднего значения коэффициента усиления слабого сигнала  $\alpha$  в режиме без генерации при использовании разных моделей турбулентности и двумер-

ных параболизированных уравнений Навье – Стокса также показано на фиг. 2 штриховыми кривыми. Видно, что максимальные значения  $\alpha$  близки, но рост  $\alpha$  на начальном участке смещения при использовании моделей [7] и  $k$ - $\epsilon$  происходит несколько медленнее, чем для модели Прандтля. В целом результаты расчетов показывают, что, учитывая не слишком высокую точность эксперимента, для расчета энергетических характеристик ГДЛ можно использовать любую из рассматриваемых моделей турбулентности.

Учитывая то, что при анализе смещения струй непосредственное использование [7] затруднено вследствие сложности определения масштаба турбулентности для системы осесимметричных взаимодействующих струй, в дальнейшем при расчетах на основе двумерных параболизированных уравнений Навье – Стокса используется модель Прандтля и  $k$ - $\epsilon$ -модель.

2. В данном разделе рассматривается задача о смещении в периодической системе сверхзвуковых осесимметричных струй азота и смеси  $\text{CO}_2 + \text{He}(\text{H}_2\text{O})$ , оси симметрии которых находятся в узлах квадратной сетки или сетки из равносторонних треугольников (пример см. ниже). Значения чисел Рейнольдса, вычисленные по параметрам на срезе струи  $\text{CO}_2$ ,  $\sim 10^4$  и участок перехода от ламинарного режима к турбулентному может быть достаточно протяженным. Однако наличие возмущений, связанных с нерасчетностью струй по давлению, по-видимому, будет способствовать сокращению переходного участка. Учитывая это, предполагается, что смещение турбулентное.

Расчет течения осуществляется на основе системы трехмерных параболизированных уравнений Навье – Стокса, которая наряду с уравнениями неразрывности, движения, энергии и диффузии содержит уравнение диффузии колебательной энергии

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \rho v c_i \epsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial y} \rho v c_i \epsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial z} \rho w c_i \epsilon_{ij} = \\ = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mu_T}{Pr_T} \frac{\partial}{\partial y} c_i \epsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\mu_T}{Pr_T} \frac{\partial}{\partial z} c_i \epsilon_{ij} + Q_{ij} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $c_i$  – массовая концентрация,  $\epsilon_{ij}$  – число колебательных квантов, приходящихся на одну молекулу,  $Q_{ij}$  – источники слагаемые, описывающие процессы  $V$ - $V$ - и  $V$ - $T$ -релаксации, остальные обозначения – общепринятые в гидродинамике. При написании (2.1) предполагалось, что  $Le_{T1} = 1$ , в расчетах полагалось  $Pr_T = 0,7$ . Явные выражения для  $Q_{ij}$  приведены, например, в [10]. В расчете учитываются колебания второй и третьей мод  $\text{CO}_2$ , а также колебания  $\text{N}_2$ .

Метод ориентирован на расчет течения в системе струй, поэтому расчетная область имеет форму параллелепипеда, на боковых гранях которого ставятся условия симметрии

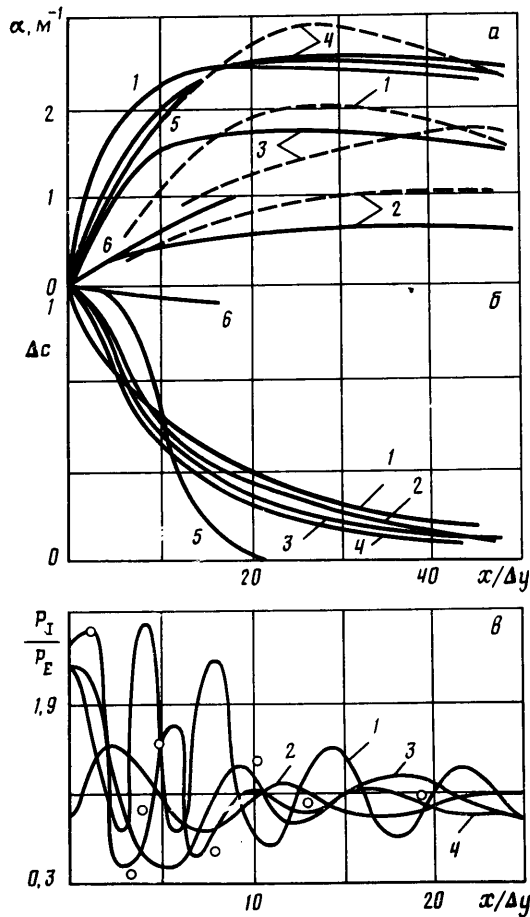
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = v = w = 0, \quad f = \rho, u, h, c_i, c_i \epsilon_{ij} \quad (2.2)$$

В начальном сечении при  $x=0$  задаются распределения всех параметров, которые находятся по изэнтропическим формулам, исходя из известных значений геометрических расширений сопел и площади донных областей. Таким образом, предполагается, что после выхода из сопел струи дорасширяются на величину площади донных областей. Такой подход не учитывает потерь при боковом взаимодействии струй, однако, судя по экспериментальным данным [5], эти потери невелики. Значение  $\epsilon_{ij}$  при  $x=0$  определялось по формуле

$$\epsilon_{ij} = \frac{r_j}{\exp(\theta_j/T_j) - 1}$$

где  $r_j$ ,  $\theta_j$ ,  $T_j$  – соответственно вырождение, характеристическая и колебательная температуры  $j$ -й колебательной моды. Значение  $T_j(\text{N}_2)$  полагалось равным температуре газа в газогенераторе, т. е. предполагалось «замороженное» течение в сопле, значение  $T_j$  для колебательных мод  $\text{CO}_2$  предполагалось равным поступательной температуре газа на срезе.

Для решения (2.1)–(2.2) используется метод, являющийся обобщением двухшаговой неявной продольно-поперечной разностной схемы [4] и предложенной ранее неявной схемы решения системы двумерных параболизированных уравнений Навье – Стокса [11]. На первом полушаге производные по  $y$  «основных» переменных ( $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $h$ ,  $c_i$ ,  $c_i \epsilon_{ij}$ ) аппроксимируются неявно, а производные по  $z$  – явно, а на втором полушаге – наоборот. Производные по давлению, смешанные производные и источники члены аппроксимируются явно по значениям, известным с предыдущей итерации. Суммарная погрешность аппроксимации есть  $O(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$ . Сетка сдвинута относительно границ на половину шага в направлениях  $y$  и  $z$ . Разностная реализация граничных условий симметрии (2.2) основывается на введении



Фиг. 3

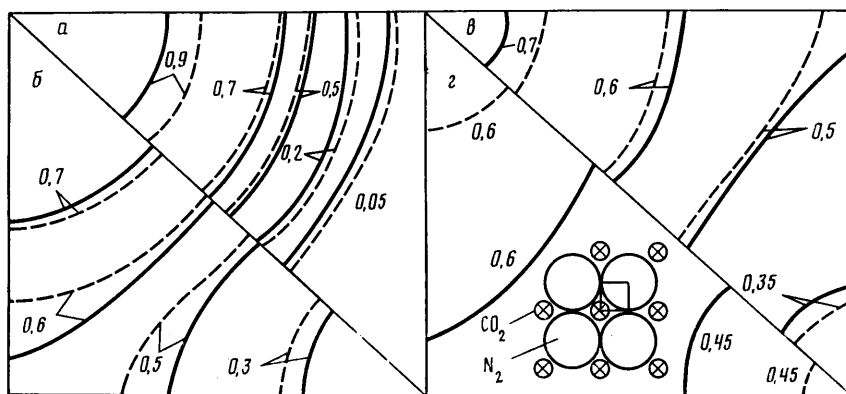
заграничных узлов [12], что позволяет избежать ошибок аппроксимации и сформулировать граничные условия точно. В модельных расчетах в режиме ламинарного смещения с числами Рейнольдса  $Re < 400$  и нерасчетностью  $n < 4$  в отличие от [4] устойчивое решение получается без введения искусственного сглаживания профиля плотности или других переменных, что, по-видимому, объясняется использованием уравнений в близкой к консервативной форме и разностной сетки, сдвинутой на полшага относительно границ. Расчеты проводились на сетках  $15 \times 20$  или  $20 \times 20$  на ЭВМ БЭСМ-6, время расчета варианта 10–15 ч.

3. Коэффициент усиления – один из немногих параметров, который измеряется в экспериментах с соевыми сопловыми блоками. Сравним имеющиеся экспериментальные данные по изменению  $\alpha$  вдоль потока с расчетными зависимостями. Соответствующие результаты приведены на фиг. 3, а, где  $\Delta y$  – расстояние между осями ближайших сопел, из которых истекают струи  $CO_2$  и  $N_2$ , сплошные кривые – результаты расчета, штриховые – экспериментальные данные. Начальные параметры для расчетов на основе параболизированных уравнений Навье – Стокса, заимствованные из экспериментов [1, 2, 13], приведены в таблице. Номера кривых соответствуют номерам вариантов таблицы, кривые 1–4 получены с использованием (1.1), кривая 5 соответствует варианту № 4 таблицы для  $k$ - $\epsilon$ -модели с указанными выше значениями  $C_k$  и  $C_\epsilon$ .

№ п. п.	Литература	$T_E, K$	$T_I/T_E$	$U_E, м/с$	$U_I/U_E$	$P_I/P_E$	Состав после смешения, об. %			
							$CO_2$	$H_2O$	He	$N_2$
1	[2]	236	0,2	1911	0,5	2,1	14	0	41	45
2	[1]	195	0,5	1938	0,5	0,8	8	0,8	0	91,2
3	[1]	195	0,5	1938	0,4	2,2	18	0,8	0	81,2
4	[13]	328	0,25	1921	0,5	2,4	32	0	34	34

Из фиг. 3, а видно, что во всех случаях отличие полученного в расчете максимального значения  $\alpha$  от эксперимента не превышает 30%. Для всех вариантов при использовании (1.1) возрастание  $\alpha$  происходит несколько быстрее, чем в эксперименте. При использовании  $k$ - $\epsilon$ -модели рост  $\alpha$  на начальном участке несколько замедляется. В целом результаты расчетов достаточно хорошо согласуются с экспериментом при использовании любой из двух рассмотренных моделей турбулентности. Для более конкретных выводов о преимуществах той или иной модели при расчете смещения в сопловых блоках сотовой конструкции необходимо сравнение с экспериментом по каким-либо гидродинамическим характеристикам. Отметим, что наблюдаемое в эксперименте [1] резкое падение  $\alpha$  при  $x/\Delta y > 50$  (в расчете оно отсутствует) по мнению авторов [1] связано с существенным повышением температуры в этой области вследствие проникновения скачков из диффузора вверх по потоку в резонатор.

В последнее время в литературе активно исследуется вопрос об уменьшении скорости смещения струй при возрастании числа Маха. Обширная библиография на эту тему имеется в [14]. Учет этого явления в принципе необходим при расчете ГДЛ со смешением. Однако, как отмечается в [14], в спутных струях характерным



Фиг. 4

параметром задачи является разность чисел Маха двух потоков, которая, как правило, в ГДЛ не велика. Кроме того, как сказано выше, отсутствуют какие-либо экспериментальные данные по измерению газодинамических параметров в сотовых блоках, что делает затруднительным практическую проверку возможных модификаций модели турбулентности для рассматриваемых типов течений. Поэтому на данном этапе исследования ГДЛ со смешением неучет влияния сжимаемости на  $\mu$  представляется оправданным.

На фиг. 3, б приведены изменения вдоль потока дефекта концентраций  $\text{CO}_2$   $\Delta c = (c(I) - c(E)) / c(I)$  для различных сопловых блоков. Индексы  $I, E$  соответствуют осям струй  $\text{CO}_2$  и  $\text{N}_2$ . Видно, что в дальней зоне наиболее быстрое смешение достигается для варианта № 4, для которого максимальные отношения начальных скоростей и нерасчетность. Также видно, что при использовании  $k$ - $\epsilon$ -модели смешение в начале происходит достаточно медленно, а затем существенно быстрее, чем в модели Прандтля. Приведенные на фиг. 3, в кривые изменения вдоль потока отношения давлений на осях струй  $\text{CO}_2$  и  $\text{N}_2$  показывают, что затухание скачков приблизительно одинаковое для всех вариантов. Безразмерная длина, на которой в основном затухают скачки, по порядку величины хорошо согласуется с экспериментальными данными [15] по изменению давления на оси сверхзвуковой струи с небольшой нерасчетностью.

Сравнение результатов расчетов с использованием моделей Прандтля и  $k$ - $\epsilon$  (на фиг. 3, в кривая 4 и точки) показывает, что применение различных моделей турбулентности приводит к небольшим различиям в распределении давления на начальном участке. Это, по-видимому, связано с тем, что картина распространения скачков уплотнения в большей степени определяется начальными газодинамическими параметрами и геометрией струй и в меньшей степени — интенсивностью смешения. Ниже по потоку, где слои смешения занимают все большую область течения, различия в распределении давления при расчете по двум моделям возрастают.

Отметим, что расчеты смешения струй в химическом лазере [16] также свидетельствуют о слабом влиянии интенсификации смешения на изменение поля давления.

Как сказано выше, параметры струй таковы, что в принципе не очевидна реализация режима развитой турбулентности в большей части области смешения.

С целью уточнения вопроса о характере смешения для варианта № 4 проведен расчет ламинарного смешения (кривые *b* на фиг. 3, *a*, *b*). Видно, что в этом случае скорость смешения резко уменьшается, а возрастание коэффициента усиления вниз по потоку происходит существенно медленнее, чем в эксперименте. Этот факт косвенно также свидетельствует о реализации турбулентного режима смешения.

На фиг. 4 приведены изолинии концентрации  $\text{CO}_2$  в различных сечениях (*a*, *b*, *c*,  $z - x/\Delta y = 1,1, 7,2, 11,2, 14,5$ ) для варианта № 4, сплошные и штриховые линии соответствуют расчетам по моделям Прандтля и *k*- $\epsilon$ . Там же представлен фрагмент соплового блока. Видно, что в начале потока, пока слои смешения еще не сдвинулись, изолинии концентраций близки к концентрическим окружностям. Ниже по потоку, когда слои смешения смыкаются, картина изолиний концентраций становится более сложной. Различия в распределении концентраций  $\text{CO}_2$  при использовании двух моделей турбулентности весьма значительны.

Авторы благодарят Н. И. Акатнова, Я. М. Любомирова, К. Е. Сокова за помощь в работе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yu G., Wu C. B., Wu C. K. An experimental study of downstream mixing  $\text{CO}_2$  laser // AIAA Pap. 1983. № 1703. 8 p.
2. Ачасов О. В., Борейшо А. С., Быков А. М. и др. Исследование усилительных характеристик  $\text{CO}_2$  - ГДЛ с сопловыми блоками сотовой конструкции: Препринт № 18. Минск: ИТМО АН БССР, 1984. 23 с.
3. Выхубенко Б. А., Дерюгин Ю. Н., Колобякин Ю. В. и др. Сравнение результатов двумерных расчетов смешивания ГДЛ с данными эксперимента. Ч. 2. Трехмерная решетка // Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Методики и программы численного решения задач мат. физики. 1984. Вып. 1(15). С. 59-61.
4. Бондарев Е. Н., Гушин Г. Е. Некоторые особенности распространения пространственных вязких струй // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 5. С. 122-128.
5. Баев В. К., Кгалджерман М. Г., Мальков В. М., Рубан Н. А. Характеристики потока и восстановление давления в прямоугольном канале за решеткой осесимметричных сопел // Газодинамика течений в соплах и диффузорах. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1982. С. 25-40.
6. Лавров А. В., Найдено Н. А., Харченко С. С. К вопросу о применении различных гидродинамических моделей для исследования турбулентного смешения в системе плоских сверхзвуковых релаксирующих струй // Газодинамика проточной части ГДЛ. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1987. С. 30-40.
7. Роуч П. Вычислительная гидродинамика: Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 616 с.
8. Weinstein A. S., Osterle J., Forstall W. Momentum diffusion from a slot jet into a moving secondary // J. Appl. Mech. 1956. V. 23. № 3. P. 437-443.
9. Акатнов Н. И., Герасимова И. Н. Турбулентное течение в периодической системе плоских параллельных струй // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1976. № 352. С. 18-23.
10. Launder B. E., Spalding D. B. The numerical computation of turbulent flows // Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng. 1974. V. 3. № 2. P. 269-289.
11. Головичев В. И., Манжи Ш., Солоухин Р. И., Фомин Н. А. Численное моделирование процессов смешения при получении инверсии газодинамическими методами // Численные методы решения задач переноса: Матер. Междунар. школы-семинара, Минск, 1979. Ч. 2. Минск, 1979. С. 3-46.
12. Hügel H., Schall W., Hoffman P. Experimental Investigations of gasdynamic  $\text{N}_2/\text{CO}_2$  mixing lasers // J. Physique. B. 335-342.
13. Козлов В. Е., Секундов А. Н., Смирнова И. П. Модели турбулентности для описания течения в струе сжимаемого газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 6. С. 38-44.
14. Seiner J. M., Norum D. D. Aerodynamics aspects of Shock containing jet plumes // AIAA Pap. 1980. № 80-0965. P. 14.
15. Zelazny S. W., Rushmore W. L. Effect of mixing rate on pressure fields in chemical laser cavities // Turbul. Combust. Techn. pap. AIAA 15th Aerospace Sci. Meet. 1977. N. Y., 1978. P. 141-161.

Ленинград

Поступила в редакцию  
3.VII.1989