

УДК 532.5.013.4:532.613.4:536.24

© 1990 г.

В. А. БУЧИН, М. П. ЗЕКЦЕР

ТЕРМОКАПИЛЛЯРНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА
ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ
ПРИ НАЛИЧИИ ОБЪЕМНЫХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

Термокапиллярный механизм потери устойчивости, приводящий к возникновению конвективных движений жидкости, был теоретически рассмотрен в [1]. В ряде дальнейших исследований [2–4] явление термокапиллярной конвекции было исследовано применительно к задачам различной физической природы. В настоящей работе рассмотрена задача об устойчивости границы раздела двух бесконечных слоев различных несмешивающихся жидкостей. При этом предполагается, что внутри жидкости задан распределенный объемный источник тепла, моделирующий джоулев нагрев. Исследуется устойчивость состояния покоя по отношению к малым нестационарным возмущениям. Особенностью данной работы является то, что исследование проводится при использовании реальных граничных условий на границе раздела двух жидкостей, а не модельных граничных условий, обычно используемых в аналогичных задачах [5]. Рассматриваемая задача связана с практически важной проблемой изучения устойчивости процессов в электролизерах. В данном случае изучается один из возможных механизмов возникновения колебаний поверхности раздела электролит – алюминий, имеющий пороговый характер. Рассмотренный числовой пример с параметрами жидкостей, совпадающими с параметрами электролита и алюминия, показывает, что механизм термокапиллярной потери устойчивости действительно может быть причиной возникновения поверхностных волн на границе раздела электролит – алюминий.

1. Рассмотрим два слоя вязких, несжимаемых электропроводящих несмешивающихся жидкостей, ограниченных снизу и сверху плоскими электродами, между которыми в стационарном состоянии течет ток плотности j_s . Магнитное число Рейнольдса предполагается малым, так что индуцированными магнитными полями можно пренебречь. Толщина верхнего слоя H_1 , нижнего H_2 . Совместим ось X с невозмущенной границей раздела сред, а ось Y направим вверх, перпендикулярно электродам.

Состояние, которое исследуется на устойчивость, стационарно и одномерно. Потенциалы Φ и температуры T электродов поддерживаются постоянными. На границе раздела сред β , плоской ($\beta=0$) в стационарном состоянии, должны выполняться условия непрерывности потенциала, нормальной компоненты плотности электрического тока, температуры и теплового потока. Условия для тензора напряжения Π будут выписаны с учетом искривления границы раздела сред (давление Лапласа P_l) и зависимости поверхностного натяжения Σ от температуры, определяющей термокапиллярную конвекцию, которая, как будет показано ниже, является причиной потери устойчивости. Все теплофизические характеристики: плотность ρ , кинематическую вязкость ν , проводимость σ , теплопроводность χ и температуропроводность a , будем считать постоянными и различными для двух сред.

Для плоской задачи, переходя от компонент скорости u_x и u_y к функции тока W ($u_x = \partial W / \partial y$, $u_y = -\partial W / \partial x$), получим следующую систему уравнений и граничных условий:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta W &= \nu \Delta^2 W + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta W - \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \Delta W \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= a \Delta T + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\rho \nu a}{\chi} \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] + \frac{j^2 a}{\sigma \chi} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= -\sigma \nabla \Phi, \quad \Delta \Phi = 0 \\ y = H_j; \quad \Phi_j &= \Phi_{wj}, \quad T_j = T_{wj} \\ y = \beta; \quad [\Phi] &= 0, \quad [j_n] = 0, \quad [T] = 0, \quad \left[\chi \frac{\partial T}{\partial n} \right] = 0, \quad [P_n] = P_l, \quad [P_\tau] = \frac{\partial \Sigma}{\partial s} \end{aligned} \quad (1.2)$$

где s – координатное направление, касательное к границе раздела сред.

Индекс j принимает значения 1 (верхняя жидкость) и 2 (нижняя жидкость). Система (1.1) имеет стационарное решение, соответствующее покоящейся жидкости, определяемое соотношениями

$$W_{j_s}=0, \quad \frac{d^2 T_{j_s}}{dy^2} = -\frac{j_s^2}{\sigma_j \chi_j}, \quad \frac{d^2 \Phi_{j_s}}{dy^2} = 0, \quad \frac{dP_{j_s}}{dy} = -\rho_j g \quad (1.3)$$

С учетом (1.2) легко получить решение (1.3)

$$T_{j_s} = -b_j y^2 + \tau_j y + T_0, \quad b_j = \frac{j_s^2}{2\sigma_j \chi_j}, \quad \tau_2 = \frac{T_{w1} - T_{w2} + b_2 H_2^2 - b_1 H_1^2}{-\chi_2 H_1 + \chi_1 H_2}$$

$$T_0 = \frac{\chi_1 T_{w1} H_2 - \chi_2 T_{w2} H_1 + H_1 H_2 (\chi_1 b_1 H_1 - \chi_2 b_2 H_2)}{-\chi_2 H_1 + \chi_1 H_2}, \quad \tau_1 = \tau_2 \frac{\chi_2}{\chi_1} \quad (1.4)$$

$$P_{j_s} = -\rho_j g y, \quad \Phi_{j_s} = \frac{j_s}{\sigma_j} y + \Phi_0, \quad j_s = \frac{(\Phi_{w1} - \Phi_{w2}) \sigma_1 \sigma_2}{H_1 \sigma_2 - H_2 \sigma_1}, \quad \Phi_0 = \frac{\Phi_{w2} H_1 \sigma_2 - \Phi_{w1} H_2 \sigma_1}{H_1 \sigma_2 - H_2 \sigma_1}$$

2. Линеаризуем (1.1) относительно стационарного состояния (1.4). Сохраняя для возмущений обозначения, принятые в (1.1), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta W_j = \nu_j \Delta^2 W_j, \quad \Delta \Phi_j = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} = a_j \Delta T_j + (\tau_j - 2b_j y) \frac{\partial W_j}{\partial x} + \frac{2j_s a_j}{\chi_j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y}$$

Анализ, проведенный по теории размерности, показал, что (2.1) содержит кроме отношений характеристик двух сред два безразмерных параметра: число Прандтля $Pr = \nu_1/a_1$ и параметр $N = 2b_1 l_*^2/T_*$, определяющий влияние Джоулева нагрева.

Будем искать решение (2.1) вида $\exp(ikx + \lambda t)$, где k – волновое число, а λ – спектральный параметр с амплитудами, зависящими от координаты y . Обезразмеривая все величины по некоторым характерным значениям: длины l_* (равной, например, H_1), температуры $T_* = \tau_1 l_*$, функции тока $W_* = \nu_1$, потенциала $\Phi_* = \Phi_{w1} - \Phi_{w2}$, времени $t_* = l_*^2/\nu_1$, получим для безразмерных амплитуд $\theta_j = T_j/T_*$, $\varphi_j = \Phi_j/\Phi_*$, $w_j = W_j/W_*$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\lambda \left(\frac{d^2 w_j}{dy^2} - k^2 w_j \right) = q_{j1} \left(\frac{d^4 w_j}{dy^4} - 2k^2 \frac{d^2 w_j}{dy^2} + k^4 w_j \right)$$

$$\lambda \theta_j = q_{j2} \left(\frac{d^2 \theta_j}{dy^2} - k^2 \theta_j \right) + ik w_j (q_{j3} - q_{j4} y) + q_{j5} \frac{d\varphi_j}{dy} \quad (2.2)$$

$$\frac{d^2 \varphi_j}{dy^2} - k^2 \varphi_j = 0$$

$$q_{11} = 1, \quad q_{21} = \nu, \quad q_{12} = \frac{1}{Pr}, \quad q_{22} = a q_{12}, \quad q_{13} = \frac{\tau_1 l_*}{T_*}, \quad q_{23} = \frac{q_{13}}{\chi}$$

$$q_{14} = N, \quad q_{24} = \frac{q_{14}}{\chi \sigma}, \quad q_{15} = \frac{2N}{Pr} h_1 \left(1 - \frac{h}{\sigma} \right), \quad q_{25} = q_{15} \frac{a}{\chi}$$

Величины ρ , ν , a , χ , σ , h являются отношениями соответствующих параметров второй и первой сред. Уравнения (2.2) имеют следующее решение:

$$w_j = A_{j1} e^{ky} + A_{j2} e^{-ky} + A_{j3} e^{r_j y} + A_{j4} e^{-r_j y}$$

$$\varphi_j = B_{j1} e^{ky} + B_{j2} e^{-ky} \quad (2.3)$$

$$\theta_j = C_{j1} e^{s_j y} + C_{j2} e^{-s_j y} + \frac{ik}{\lambda} q_{j3} \left[A_{j1} e^{ky} (1 - k d_{j1} - d_{j2} y) + A_{j2} e^{-ky} (1 + k d_{j1} - d_{j2} y) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{d_{j3}} \left(A_{j3} e^{r_j y} \left(1 - \frac{r_j}{d_{j3}} d_{j1} + d_{j2} y \right) + A_{j4} e^{-r_j y} \left(1 + \frac{r_j}{d_{j3}} d_{j1} + d_{j2} y \right) \right) \right] + \frac{k}{\lambda} q_{j5} (B_{j1} e^{ky} - B_{j2} e^{-ky})$$

$$r_j = \sqrt{k^2 + \frac{\lambda}{q_{j1}}}, \quad s_j = \sqrt{k^2 + \frac{\lambda}{q_{j2}}}, \quad d_{j1} = \frac{2}{\lambda} \frac{q_{j4} q_{j2}}{q_{j3}}, \quad d_{j2} = \frac{q_{j4}}{q_{j3}}, \quad d_{j3} = 1 - \frac{q_{j2}}{q_{j1}}$$

Возмущение давления легко восстановить, используя уравнение движения. После обезразмеривания по $P_* = \rho_1 v_1^2 / l_*^2$ получим

$$p_j = i \lambda q_{j3} (A_{j1} l^{ky} - A_{j2} l^{-ky}), \quad q_{16} = 1, \quad q_{26} = \rho v^2$$

3. Система (2.3) содержит 17 неизвестных величин: A_{jm} , B_{jn} , C_{jn} и безразмерное возмущение границы раздела сред β . Для их определения используем линеаризованные граничные условия (1.2) и условия прилипания

$$y = h_j: \quad \theta_j = 0, \quad \varphi_j = 0, \quad w_j = 0, \quad \frac{\partial w_j}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

$$y = \beta: \quad -ikw_1 = -ikw_2 = \lambda\beta, \quad \frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{\partial w_2}{\partial y}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \frac{1 - \sigma}{h_1(\sigma - h)} \beta, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \sigma \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \quad (3.2)$$

$$\theta_1 = \theta_2 + \beta \left(\frac{1}{\chi} - 1 \right), \quad -N\beta + \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = \chi \left(-N \frac{\beta}{\sigma \chi} + \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right)$$

$$p_1 + 2ik \frac{\partial w_1}{\partial y} = p_2 + 2i\rho v k \frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\beta}{Pr} \left(M \frac{\Sigma}{\epsilon T_*} k^2 + G \right)$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + k^2 w_1 = \rho v \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + k^2 w_2 \right) - \frac{M}{Pr} (\theta_1 + \beta) \frac{k}{i}$$

$$\epsilon = \frac{\partial \Sigma}{\partial T}, \quad M = \frac{\epsilon l_* T_*}{\rho_1 v_1 a_1}, \quad G = \frac{(\rho_2 - \rho_1) g l_*^3}{\rho_1 v_1 a_1}$$

Здесь M и G — два дополнительных к Pr и N безразмерных параметра, определяющих задачу: число Марангони и аналог числа Грасгофа, характеризующие роль термокапиллярного эффекта и силы тяжести.

Уравнения (3.1), (3.2) образуют систему однородных алгебраических уравнений, нетривиальное решение которых существует, если определитель системы равен нулю.

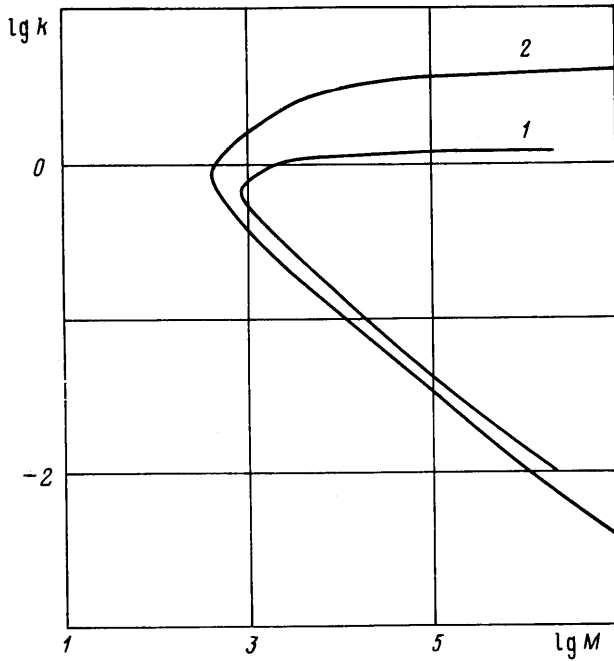
Система (3.1), (3.2) решалась численно для электролита (среда 1) и жидкого алюминия (среда 2), имеющих следующие теплофизические константы [6]:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 2,1 \text{ г/см}^3, \quad v_1 = 0,015 \text{ см}^2/\text{с} \\ a_1 &= 0,079 \text{ см}^2/\text{с}, \quad \chi_1 = 0,15 \text{ Вт/см} \cdot \text{град} \\ \sigma_1 &= 2 \text{ (Ом} \cdot \text{см)}^{-1}, \quad \rho_2 = 2,4 \text{ г/см}^3, \quad v_2 = 0,004 \text{ см}^2/\text{с} \\ a_2 &= 0,277 \text{ см}^2/\text{с}, \quad \chi_2 = 0,6 \text{ Вт/см} \cdot \text{град}, \quad \sigma_2 = 10^5 \text{ (Ом} \cdot \text{см)}^{-1} \\ \Sigma &= 550 \text{ эрг/см}^2, \quad \epsilon = -0,3 \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{град} \end{aligned}$$

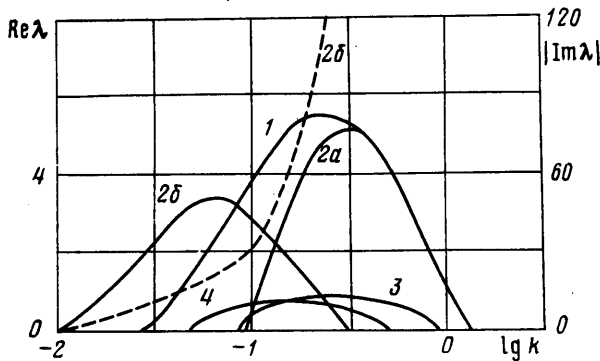
Особый интерес обычно вызывают нейтральные кривые, соответствующие $\text{Re } \lambda = 0$ и определяющие границы области неустойчивости. На фиг. 1 они представлены на плоскости $k-M$ для $N=0,3$ и 3 (кривые 1, 2). Изменение числа Марангони достигалось в расчетах варьированием величины ϵ . Видно, что с ростом джоулева тепловыделения (увеличение N) область неустойчивости расширяется.

Оставляя неизменными теплофизические постоянные сред, будем теперь варьировать толщины слоев H_1 и H_2 , а также разность потенциалов Φ_* (и, следовательно, j_*) и температуры стенок T_{w1} и T_{w2} . В основном варианте (с которым будут сравниваться все остальные, отличающиеся изменением какой-либо одной величины) примем $H_1=5$ см, $H_2=-15$ см, $\Phi_*=2,5$ В ($j_*=1$ А/см²), $T_{w1}=1200^\circ$ С, $T_{w2}=750^\circ$ С. В этом случае безразмерные параметры задачи имеют следующий порядок величин: $M \sim 10^5$, $N \sim 1$, $Pr \sim 0,1$, $G \sim 10^7$.

На фиг. 2 представлена зависимость λ от волнового числа k , позволяющая оценить время развития неустойчивости. В качестве l_* выбрана величина $H_1=5$ см; в таком случае $l_* = 1,67 \cdot 10^3$ с. Основному варианту соответствует кривая 1, состоящую из двух ветвей ($G=0$) — кривая 2. Последняя состоит из двух ветвей: 2а, соответствующей действительным значениям λ , которая при больших значениях k переходит в кривую 1, и 2б, соответствующей комплексным значениям λ (два комплексно-сопряженных значения; пунктиром дана зависимость для $\text{Im } \lambda$). Отсюда



Фиг. 1



Фиг. 2

следует, что учет силы тяжести может качественно изменить характер спектра: от комплексного при $G=0$ к действительному при $G \sim 10^7$.

С увеличением j_s область неустойчивости (диапазон чисел k , соответствующих неустойчивым состояниям) и максимум $\text{Re } \lambda$ увеличиваются, оставаясь конечными и при $j_s=0$.

С уменьшением $|H_2|$ или увеличением H_1 область неустойчивости уменьшается, причем система становится устойчивой при $|H_2| \leq 9,1$ см или $H_1 > 9$ см. На фиг. 2 кривая 3 соответствует $H_2 = -10$ см, а кривая 4 — $H_1 = 8$ см. Изменение T_{w1} от 1000 до 1500°C и T_{w2} от 660 до 950°C не приводит к существенному изменению спектра.

Поскольку уменьшение H_1 приводит к снижению джоулевых потерь, что весьма желательно по экономическим соображениям, приведем для нескольких значений H_1 необходимые для выполнения критерия устойчивости максимальные значения $|H_2|$:

H_1 , см	5	4	3	2	1
$ H_2 $, см	2,1	7,4	5,6	3,8	1,9

Таким образом, система электролит — жидкий алюминий оказывается неустойчивой в некотором диапазоне чисел по отношению к малым возмущениям, причем характерное время развития неустойчивых возмущений составляет величину порядка нескольких минут. Это свидетельствует о медленном развитии неустойчивости, что совпадает с имеющимися данными по электролизерам.

Для предотвращения появления неустойчивых режимов можно рекомендовать уменьшение глубины слоя жидкого алюминия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pearson J. R. A.* On convection cells induced by surface tension // *J. Fluid. Mech.* 1958. V. 4. № 5. P. 489–497.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидромеханика. М.: Наука, 1986. 736 с.
3. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
4. *Sternling C. V., Seriven L. E.* Intervacial turbulence: hydrodynamic instability and the Marangoni effect // *AIChE J.* 1959. V. 5. № 4. P. 514–523.
5. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Физматгиз, 1972. 392 с.
6. *Гудима Н. В., Шейн Я. П.* Краткий справочник по металлургии цветных металлов. М.: Металлургия, 1975. 535 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.VI.1989

УДК 532.517.4

© 1990 г.

В. В. МОЖАЕВ, В. Е. СКОРОВАРОВ, А. А. ШЕРОНОВ

ВЛИЯНИЕ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ ПОТОКА СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ НА ОБРАЗОВАНИЕ ОБЛАСТЕЙ ЗАВИХРЕННОСТИ В СЛЕДЕ ЗА ЦИЛИНДРОМ

Приводятся экспериментальные результаты исследования влияния конечной глубины канала линейно стратифицированной жидкости на образование турбулентных областей, возникающих при горизонтальном движении цилиндра. Найденны границы области внутреннего числа Фруда и безразмерной глубины канала (по диаметру цилиндра), при которых возникают локальные неустойчивости в распределении плотности возмущенного потока, приводящие к образованию областей завихренности. Исследована динамика образования этих областей и их эволюция. Найденны нестационарные периодические режимы.

В работе [1] приводятся экспериментальные результаты исследования особенностей в структуре волнового поля внутренних гравитационных волн, возникающих при горизонтальном движении цилиндра в линейно стратифицированной жидкости. Речь идет о двух типах особенностей: возникновение локальных неустойчивостей в распределении плотности жидкости, приводящих к обрушению внутренних волн [2, 3], и появление периодически чередующихся областей завихренности, возникающих непосредственно в следе за цилиндром. Эти результаты были получены практически для случая безграничной жидкости, при отношении глубины канала H к диаметру цилиндра d больше 10, т. е. когда влиянием дна и свободной поверхностью жидкости можно пренебречь. В этом случае влияние волновых возмущений в виде внутренних гравитационных волн на обтекание цилиндра определяется с помощью двух безразмерных параметров: внутреннего числа Фруда F_d ($F_d = U/Nd$), где U — скорость набегающего потока, N — частота плавучести, и числа Рейнольдса Re .

В случае, когда относительная глубина канала $H/d \sim \pi F_d$, структура внутренних гравитационных волн в канале имеет чисто модовый характер и определяется уже новым безразмерным параметром: числом Фруда $F_H = U/NH$ [4]. Длина внутренней волны в этом случае не зависит от диаметра цилиндра и определяется номером моды n ($n=1, 2, \dots$), U , N и H . Диаметр цилиндра влияет только на амплитуду внутренних волн, возбуждаемых цилиндром. Однако при малых значениях параметра H/d обтекание цилиндра будет определяться не только числом Рейнольдса, но и отношением H/d . Еще одним важным параметром для этого случая является глубина погружения цилиндра в канале. От этого параметра зависит эффективность возбуждения соответствующих мод [4]. Так, при движении цилиндра по центру канала в основном будет возбуждаться моды четных номеров ($n=2, 4, \dots$). В работе рассматривались два случая: движение цилиндра по центру канала и полуцилиндра по дну канала.

Эксперименты проводились в двух лабораторных бассейнах с размерами $3,0 \times 0,3 \times 0,25$ м³ и $1,5 \times 0,5 \times 0,25$ м³. Линейная стратификация рабочей жидкости достигалась заполнением лабораторного бассейна водным раствором поваренной соли пе-