МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1990

УДК 432.68:536.25

А. Е. РЕДНИКОВ, Ю. С. РЯЗАНЦЕВ

ВЛИЯНИЕ ВНУТРЕННЕГО ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ НА ДЕЙСТВУЮЩУЮ НА КАПЛЮ КАПИЛЛЯРНУЮ СИЛУ И НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КАПЕЛЬ ДРУГ С ДРУГОМ И СО СТЕНКОЙ

Непостоянство коэффициента поверхностного натяжения вдоль поверхности капли приводит к возникновению на ней касательных капиллярных напряжений, которые ввиду необходимости компенсации их вязкими напряжениями существенно влияют на движение жидкости вне и внутри капли и на движение капли как целого, а в отсутствие гравитации и других внешних сил полностью определяют движение. Поскольку поверхностное натяжение в общем случае зависит от температуры, концентрации, электрического заряда и т. п., то неоднородное поле какой-либо из этих величин может обусловить указанный выше капиллярный эффект.

В работе [1] в стоксовом приближении выводится выражение для силы, действующей на каплю, если на ее поверхности задано произвольное распределение коэффициента поверхностного натяжения (назовем эту силу капиллярной). При этом не конкретизируется причина его непостоянства, важно лишь, чтобы такое распределение не зависело от движения жидкости вне и внутри капли. Используя это выражение из баланса всех сил, действующих на каплю, можно найти скорость дрейфа капли. Результаты работ [2–5], а также работы [6] для нулевого приближения, относящиеся к капиллярной силе и скорости дрейфа, могут быть получены из достаточно общих результатов [1].

Другой тип капиллярного эффекта, когда капиллярные напряжения на поверхности капли не являются независимыми, данными помимо движения, а, напротив, возникают только в процессе движения и обратно влияют на него, отмечен в [7] и в дальнейшем исследован в [8–11]. В [11] такой эффект рассмотрен в стоксовом приближении для случая однородного тепловыделения постоянной мощности внутри капли. Показано, что внутреннее тепловыделение, как и другие факторы, изученные ранее в [7–10], может существенно изменять силу сопротивления при равномерном поступательном движении капли вплоть до превращения в силу тяги.

В данной работе в стоксовом приближении и в предположении малости чисел Пекле выводятся выражения для действующей на каплю капиллярной силы и для скорости стационарного дрейфа капли, когда на поверхности последней задано произвольное распределение коэффициента поверхностного натяжения, при наличии однородного внутреннего тепловыделения.

Рассматривается обусловленное внутренним тепловыделением термокапиллярное взаимодействие двух капель, находящихся в неограниченной внешней жидкости, друг с другом или одиночной капли с твердой стенкой. Приводятся квазистационарные выражения для скорости движения капель в таких процессах в отсутствие гравитации.

Обсуждается ограничение применимости полученных результатов.

1. Капиллярная сила, действующая на каплю, при наличии однородного внутреннего тепловыделения. Рассматривается капля вязкой несжимаемой жидкости, находящаяся в другой не смешивающейся с ней вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство. Капля и жидкость на бесконечности покоятся. Считается, что коэффициент поверхностного натяжения непостоянен вдоль поверхности и складывается из двух слагаемых.

Во-первых, это произвольная заданная функция σ точек поверхности капли, не зависящая от движения жидкости. Такая ситуация может осуществляться, например, в силу температурной или концентрационной зависимости коэффициента поверхностного натяжения, если в жидкостях имеется некоторое неоднородное стационарное поле температуры или концентрации какого-либо вещества и числа Пекле (тепловые или диффузионные) малы, так что можно пренебречь конвективным переносом тепла или вещества.

Во-вторых, это изменение, связанное с предполагаемым в данной работе наличием внутри капли источников (стоков) тепла с постоянной мощностью в расчете на единицу объема $q>0$ ($q<0$). Оно проявляется только при наличии движения жидкостей вне и внутри капли (поскольку иначе внутреннее тепловыделение не внесет вклада в непостоянство температуры вдоль поверхности, а значит, и коэффициента поверхностного натяжения) и в свою очередь обратно влияет на движение.

При указанных выше обстоятельствах вне и внутри капли возникнет некоторое стационарное течение, на каплю будет действовать гидродинамическая сила. Найдем эту силу (назовем ее здесь капиллярной) в стоксовом приближении. Кроме того, делаются еще следующие предположения. Во-первых, рассматривается только стационарный случай. Во-вторых, форма капли остается сферической, т. е. перепады нормальных напряжений и капиллярного давления вдоль поверхности капли много меньше величины капиллярного давления. В-третьих, плотности, вязкости, теплопроводности, теплоемкости сред капли и внешней жидкости считаются постоянными, а коэффициент поверхностного натяжения — линейной функцией температуры, причем следует еще раз подчеркнуть, что изменения коэффициента поверхностного натяжения, обусловленные двумя указанными выше факторами, можно суммировать. В-четвертых, тепловые числа Пекле малы.

Последнее предположение позволяет искать поле температуры, обусловленное внутренним тепловыделением, при помощи метода возмущений: $T_i=T_i^{(0)}+\mathrm{Pe}\,T_i^{(1)}$, где Pe — число Пекле, причем в нулевом приближении это поле вне и внутри капли, как нетрудно показать, есть [11]:

$$T_1^{(0)}=\frac{qa^3}{3\lambda_1 r},\quad T_2^{(0)}=\frac{qa^2}{3\lambda_1}\left(1+\frac{\delta^{-1}}{2}\left(1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\right),\quad \delta=\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \tag{1.1}$$

где индексы $i=1$, 2 здесь и в дальнейшем относятся к величинам вне и внутри капли соответственно, a — радиус капли, r — расстояние, отсчитанное от центра капли, λ_i — коэффициенты теплопроводности.

Поле температуры нулевого приближения по числу Пекле (1.1) не дает вклада в изменение коэффициента поверхностного натяжения вдоль поверхности, поэтому, чтобы учесть влияние внутреннего тепловыделения, необходимо рассмотреть первое приближение, что и будет сделано ниже.

При отсутствии тепловыделения выражение для капиллярной силы выведено в [1]

$$\mathbf{F}_k=-\frac{1}{2(1+\beta)}\int\limits_{S_a}\nabla_s\sigma\,dS,\quad \beta=\frac{\mu_2}{\mu_1} \tag{1.2}$$

где μ_i — коэффициенты вязкости, ∇_s — оператор поверхностного градиента, интеграл берется по всей площади поверхности капли. В данном пункте производится обобщение результата (1.2) с учетом внутреннего тепловыделения, причем последнее обстоятельство, как будет видно из дальнейшего, может оказать существенное влияние как на величину силы, так и на ее направление.

Для того чтобы найти силу, вовсе не обязательно находить все поле течения. Как отмечено, например, в [12], если поле скорости представить в виде разложения с помощью сферических функций, то только одна гармоника даст вклад в силу. В этой связи, как видно из выражения для напряжения ([12, с. 84]) и граничного условия для баланса касательных напряжений на поверхности капли (см., например, [1]), в разложении заданной функции σ по сферическим функциям

$$\sigma=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n \tag{1.3}$$

представляет интерес лишь гармоника с номером $n=1$, ибо именно она индуцирует ту часть течения, которая отвечает за силу, действующую на каплю.

Рассмотрение проводим в сферической системе координат, в которой расстояние r отсчитывается от центра капли, а угол θ — от направления вектора $-\mathbf{F}_k$ из (1.2). При этом гармоника с номером $n=1$ в (1.3) имеет простой вид $\sigma'\cos\theta$ и индуцируемое ею течение является аксиально-симметричным. В силу сказанного выше ограничимся нахождением только этой составляющей течения.

Проведем обезразмеривание, выбрав величину σ'/μ_1 за масштаб скорости, a — расстояния, qa^2/λ_1 — температуры. Для безразмерных температуры и радиуса сохраним прежние обозначения. Ввиду аксиальной симметрии удобно ввести функцию тока ψ_i

$$v_{ir}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi_i}{\partial\theta},\qquad v_{i\theta}=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_i}{\partial r}$$

где v_{ir}, $v_{i\theta}$ — соответственно радиальная и тангенциальная компоненты скорости.

В рамках сформулированных допущений безразмерные уравнения и граничные условия для искомого течения в терминах функции тока и для соответствующего ему первого приближения по числу Пекле $\mathrm{Pe}=a\sigma'/(\chi_1\mu_1)$ (χ_i — коэффициент температуропроводности) к полю температуры, обусловленному однородным внутренним тепловыделением, запишутся в виде

$$\begin{gathered}E^4\psi_i=0,\qquad E^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1-\mu^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\\ r\to\infty,\quad \psi_1/r^2\to0,\ r\to0,\quad \psi_2/r^2<\infty\\ r=1,\quad \psi_1=\psi_2=0,\quad \partial_r\psi_1=\partial_r\psi_2\end{gathered} \tag{1.4}$$

$$\left(2\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)(\psi_1-\beta\psi_2)=(1-\mu^2)\left(1+M\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial\mu}\right) \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{r^2}\frac{\partial(\psi_1,T_1^{(0)})}{\partial(r,\mu)}=\Delta T_1^{(1)},\qquad \frac{\varkappa^{-1}}{r^2}\frac{\partial(\psi_2,T_2^{(0)})}{\partial(r,\mu)}=\Delta T_2^{(1)}\\ r\to\infty,\quad T_1^{(1)}\to0,\quad r\to0,\quad T_2^{(1)}<\infty\\ r=1,\quad T_1^{(1)}=T_2^{(1)},\quad \partial_rT_1^{(1)}=\delta\partial_rT_2^{(1)}\\ \varkappa=\frac{\chi_2}{\chi_1},\quad \delta=\frac{\lambda_2}{\lambda_1},\quad M=\frac{d\sigma}{dT}\frac{qa^3}{\lambda_1\mu_1\chi_1},\quad \mu=\cos\theta\end{gathered} \tag{1.6}$$

где $d\sigma/dT$ — производная коэффициента поверхностного натяжения по температуре, предполагаемая постоянной, остальные обозначения пояснены ранее.

Решение задачи (1.4) есть [12]

$$\psi_1=A\left(r-\frac{1}{r}\right)\frac{1-\mu^2}{2},\qquad \psi_2=A(r^4-r^2)\frac{1-\mu^2}{2} \tag{1.7}$$

Решение задачи (1.6) с учетом выражений (1.7), а также обезразмеренных соотношений (1.1) есть

$$T_1^{(1)}=\frac{A}{3}\left[\frac{1}{2r}+\frac{1}{4r^3}-\frac{{}^5/_4+{}^3/_4\delta+{}^2/_{35}\varkappa^{-1}}{(\delta+2)r^2}\right]\mu$$
$$T_2^{(1)}=\frac{A}{3}\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{18\delta^{-1}+17}{140\varkappa}\right)\frac{r}{\delta+2}+\frac{{}^1/_{10}r^3-{}^1/_{28}r^5}{\varkappa\delta}\right]\mu \tag{1.8}$$

Подстановкой выражений (1.7) и (1.8) в (1.5) находим

$$A={}^1/_3[1+\beta+m({}^1/_4-{}^2/_{35}\varkappa^{-1})]^{-1},\qquad m=-M/9(2+\delta) \tag{1.9}$$

Согласно [12], гидродинамическая сила, действующая на каплю, может быть записана следующим образом (в размерном виде):

$$\mathbf{F}=-4\pi aA\sigma'\mathbf{e} \tag{1.10}$$

где $\mathbf{e}$ — орт в направлении вектора $-\mathbf{F}_k$ из (1.2).

С учетом (1.9), а также простого соотношения, которое легко доказывается, исходя из свойств сферических функций

$$\int\limits_{S_a}\nabla_s\sigma\,dS=\frac{8\pi}{3}a\sigma'\mathbf{e}$$

из (1.10) получается выражение для капиллярной силы

$$\mathbf{F}_k=-\frac{1}{2}\left[1+\beta+m\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{35}\varkappa^{-1}\right)\right]^{-1}\int\limits_{S_a}\nabla_s\sigma\,dS \tag{1.11}$$

При отсутствии внутреннего тепловыделения (1.11) сводится к выражению (1.2), выведенному в [1].

Скорость стационарного дрейфа капли $\mathbf{U}$ находится из условия обращения действующей на каплю полной силы в нуль

$$\mathbf{F}_k+\mathbf{F}_c+\mathbf{F}_a+\mathbf{G}=0 \tag{1.12}$$

где $\mathbf{G}$ — сила тяжести, $\mathbf{F}_a$ — сила Архимеда, $\mathbf{F}_c$ — сила сопротивления, выражение для которой в случае наличия однородного внутреннего тепловыделения получено в [11] при тех же основных предположениях, что и (1.11) (стоксово приближение, малость чисел Пекле, стационарность, жидкость на бесконечности покоится)

$$\mathbf{F}_c=-4\pi\mu_1 a\frac{1+{}^3/_2\beta+m({}^3/_4-{}^3/_{35}\varkappa^{-1})}{1+\beta+m({}^1/_4-{}^2/_{35}\varkappa^{-1})} \tag{1.13}$$

Отметим, что в некоторой области значений параметров (1.13) является силой тяги. В отсутствие гравитации из (1.12) с учетом (1.11) и (1.13) получается следующее соотношение для скорости дрейфа:

$$\mathbf{U}=-\frac{1}{8\pi\mu_1 a}\left[1+\frac{3}{2}\beta+m\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{35}\varkappa^{-1}\right)\right]^{-1}\int\limits_{S_a}\nabla_s\sigma\,dS \tag{1.14}$$

Имея в виду приложения в последующих пунктах данной работы, конкретизируем (1.11) и (1.14) для случая, когда капля помещена в жидкость, в которой в отсутствие капли имелось некоторое произвольное стационарное поле температуры T_∞ (оно, безусловно, удовлетворяет уравнению Лапласа). Помня, что тепловые числа Пекле малы, т. е. можно пренебречь конвективным переносом тепла, получим (подробности см. в [1])

$$\mathbf{F}_k=-\frac{d\sigma}{dT}\frac{4\pi a^2}{2+\delta}\left[1+\beta+m\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{35}\varkappa^{-1}\right)\right]^{-1}(\nabla T_\infty)_0 \tag{1.15}$$

$$\mathbf{U}=-\frac{d\sigma}{dT}\frac{a}{\mu_1(2+\delta)}\left[1+\frac{3}{2}\beta+m\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{35}\varkappa^{-1}\right)\right]^{-1}(\nabla T_\infty)_0 \quad (1.16)$$

где $(\nabla T_\infty)_0$ — градиент температуры T_∞, взятый в центре капли.

Как видно из (1.11), (1.14) или (1.15), (1.16), наличие внутреннего тепловыделения может кардинальным образом изменить как величину, так и направление капиллярной силы и скорости дрейфа капли. В пределе с увеличением мощности тепловыделения (если все остальные параметры остаются неизменными, $\varkappa^{-1}\neq 34/5,\ 35/8$) величины капиллярной силы и скорости дрейфа в отсутствие гравитации стремятся к нулю. Физически это понятно: при большой мощности тепловыделения уже небольшой скорости движения жидкостей достаточно, чтобы существенно ослабить перепад коэффициента поверхностного натяжения вдоль поверхности капли.

В случае, когда градиент поля температуры T_∞ постоянен во всем пространстве, результат (1.15) для скорости дрейфа капли в отсутствие гравитации применим при произвольных числах Рейнольдса (но требование малости чисел Пекле сохраняется). Это следует из того, что соответствующее поле скоростей, как нетрудно проверить, удовлетворяет полным уравнениям Навье — Стокса (см., например, [5]).

При некотором значении параметра $m=m_*$ (если $\varkappa^{-1}\neq{}^{35}/_{4}$) обращается в нуль знаменатель в (1.14), а при некотором $m=m_{**}$ (если $\varkappa^{-1}={}^{35}/_{8}$) – знаменатель в (1.11). То же самое имеет место и в частных случаях (1.15) и (1.16). Рассмотрим эти особенности (аналогичное отмечено в [11]). Выражение (1.14) будет некорректным для параметров m из некоторой окрестности значения $m=m_*$, поскольку скорости становятся большими и нарушается, например, условие малости чисел Пекле и Рейнольдса. При уменьшении величины интеграла в (1.14) эта окрестность также уменьшается и в пределе стягивается в точку. Однако если исследуются такие ситуации, когда капля как целое остается в покое (например, если нужно найти величину градиента температуры, необходимого для удержания капли неподвижной в поле тяжести), то особенность при $m=m_*$ отсутствует.

При рассмотрении особенности $m=m_{**}$ следует помнить, что в данной работе полная гидродинамическая сила, действующая на каплю, искусственно разбита на два слагаемых $\mathbf{F}_k$ и $\mathbf{F}_c$, каждое из которых имеет особенность при $m=m_{**}$, но в результате их суммирования эта особенность исчезает, поскольку числитель дроби, являющейся суммой дробей (1.11) и (1.13), при выполнении (1.14) обращается в нуль. Интересно, что при $m=m_{**}$ выражение (1.14) уже будет определять скорость дрейфа капли и при наличии поля тяжести, причем последнее никак не влияет на скорость. Особенность $m=m_{**}$ проявляется лишь при такой постановке задачи, когда скорость движения капли, отличная от (1.14), считается заданной и ищется сила (например, сила тяжести), необходимая для поддержания такого движения. При этом анализ будет некорректным для параметров m из некоторой окрестности значения $m=m_{**}$; при приближении заданной скорости к (1.14) эта окрестность также уменьшается и в пределе стягивается в точку.

2. Термокапиллярное взаимодействие капель друг с другом. Пусть в заполняющей все пространство жидкости находятся две капли другой не смешивающейся с ней жидкости. Гравитация отсутствует. Внутри капель действуют источники (стоки) тепла постоянной мощности. При этом каждая из капель создает неоднородное распределение температуры вдоль поверхности другой и, таким образом, капли не могут остаться в покое и начнут двигаться вдоль оси, соединяющей их центры (осй x, ее положительное направление выбирается произвольно). Установившаяся скорость такого движения и вычисляется в данном пункте.

Помимо изложенных ранее допущений здесь используются предположения о квазистационарности полей скорости и температуры и о малости размеров капель по сравнению с расстоянием между ними. Первое из этих предположений позволяет решать стационарную задачу вместо нестационарной. Второе предположение позволяет приближенно рассмотреть каждую каплю так, будто она находится в однородном внешнем градиенте температуры. Его величину в этом приближении можно определить, взяв градиент от создаваемого одной из капель и не возмущенного другой каплей поля температуры в том месте, где находится центр другой капли. Таким образом, скорость дрейфа каждой капли в рассматриваемой ситуации дается формулой (1.16), в которой величину $(\nabla T_\infty)_0$ нужно заменить соответствующим выражением.

Для простоты рассмотрим случай, когда капли состоят из одного и того же вещества и выделяемая (поглощаемая) мощность, отнесенная к единице объема, одинакова для обеих капель, хотя не представляет никакого труда распространить этот анализ на случай капель из различных веществ с различными тепловыми источниками.

Пусть a — радиус капли, центр которой расположен на оси x левее, b — радиус второй капли, x_0 — расстояние между центрами капель. Как уже отмечалось, выполняются условия $a/x_0 \ll 1$, $b/x_0 \ll 1$. Градиент температуры, в котором будет двигаться первая капля, и скорость ее дрейфа, как следует из разд. 1, есть

$$(\nabla T_\infty)_0 = \frac{qb^3}{3\lambda_1 x_0^2}\mathbf{e}_x$$

$$\mathbf{U}_a = -\frac{qab^3}{3(2+\delta)\mu_1\lambda_1 x_0^2}\frac{d\sigma}{dT}\left[1+\frac{3}{2}\beta+m_a\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{35}\varkappa^{-1}\right)\right]^{-1}\mathbf{e}_x \qquad (2.1)$$

$$m_a = -\frac{qa^3}{9(2+\delta)\mu_1\lambda_1\chi_1}\frac{d\sigma}{dT}$$

Для второй капли все аналогично

$$(\nabla T_\infty)_0 = -\frac{qa^3}{3\lambda_1 x_0^2}\mathbf{e}_x$$

$$\mathbf{U}_b = \frac{qa^3 b}{3(2+\delta)\mu_1\lambda_1 x_0^2}\frac{d\sigma}{dT}\left[1+\frac{3}{2}\beta+m_b\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{35}\varkappa^{-1}\right)\right]^{-1}\mathbf{e}_x \qquad (2.2)$$

$$m_b = -\frac{qb^3}{9(2+\delta)\mu_1\lambda_1\chi_1}\frac{d\sigma}{dT}$$

Здесь $\mathbf{e}_x$ — орт оси x.

Как видно из выражений (2.1), (2.2), в лабораторной системе отсчета (связанной с жидкостью на бесконечности) в зависимости от значений параметров задачи капли могут двигаться как в одинаковых, так и в противоположных направлениях. В частности, возможна такая ситуация, когда обе капли дрейфуют в одном и том же направлении с одинаковыми скоростями и расстояние между ними остается постоянным.

Введем скалярную скорость относительного движения капель $U_* = (\mathbf{U}_b - \mathbf{U}_a)\cdot\mathbf{e}_x$ или с учетом (2.1), (2.2)

$$U_* = \frac{d\sigma}{dT}\frac{qab[(a^2+b^2)(1+{}^3/_2\beta)+({}^3/_4-{}^3/_{35}\varkappa^{-1})(a^2m_a+b^2m_b)]}{3(2+\delta)\mu_1\lambda_1 x_0^2[(1+{}^3/_2\beta+m_a({}^3/_4-{}^3/_{35}\varkappa^{-1}))(1+{}^3/_2\beta+m_b({}^3/_4-{}^3/_{35}\varkappa^{-1})]} \qquad (2.3)$$

Нетрудно видеть, что если величина U_* положительна, то капли удаляются друг от друга, если отрицательна — сближаются. В общем случае капли в зависимости от их размера могут как сближаться, так и удаляться друг от друга. Однако $q\,d\sigma/dT<0$ и ${}^3/_4-{}^3/_{35}\varkappa^{-1}>0$, как следует из (2.3), капли любых размеров будут сближаться, а при $q\,d\sigma/dT>0$ и ${}^3/_4-{}^3/_{35}\varkappa^{-1}<0$ — расходиться. Поэтому можно предположить, что если в некоторой жидкости имеется много капель, то в первом случае все они соберутся в одну каплю, а во втором случае количество капель останется неизменным.

Если мощность источников (стоков) тепла достаточно велика (а величина $\varkappa^{-1}$ достаточно далека от ${}^{35}/_4$), то, устремляя формально в (2.1)—(2.3) параметр q к бесконечности, получим предельные значения скоростей, зависящие от минимального числа характеристик

$$\mathbf{U}_a=\frac{3\chi_\perp b^3}{x_0{}^2a^2}\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{35}\varkappa^{-1}\right)^{-1}\mathbf{e}_x,\quad \mathbf{U}_b=-\mathbf{U}_a\frac{a^5}{b^5}$$

$$U_*=-\frac{3\chi_\perp(a^5+b^5)}{x_0{}^2a^2b^2}\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{35}\varkappa^{-1}\right)^{-1}$$

Анализ, аналогичный проведенному выше, можно сделать и в случае взаимодействия трех и более капель. При этом градиент температуры, в котором происходит движение одной из капель, есть сумма градиентов, создаваемых по отдельности всеми остальными каплями.

3. Термокапиллярное взаимодействие капли со стенкой. Пусть капля с однородным внутренним тепловыделением находится во внешней жидкости, которая ограничена с одной стороны плоской твердой стенкой. Гравитация отсутствует. Жидкость вдали от капли покоится и поддерживается вместе со стенкой при постоянной температуре T_0. При этих обстоятельствах капля ввиду непостоянства температуры вдоль ее поверхности будет двигаться перпендикулярно стенке.

В данном пункте вычисляется установившаяся скорость такого движения. Для этого здесь, как и в разд. 2, помимо изложенных в разд. 1 допущений делаются предположения о квазистационарности и малости размера капли по сравнению с расстоянием между каплей и стенкой.

Нетрудно видеть, что взаимодействие капли со стенкой, поддерживаемой при постоянной температуре, равной температуре жидкости на бесконечности, можно представить как взаимодействие этой капли с другой каплей того же радиуса, симметричной первой относительно плоскости стенки, когда стенки нет и жидкость заполняет все пространство (аналогия с методом электрических изображений в электростатике). Причем эта вторая мнимая капля обладает тем же по абсолютной величине, но противоположным по знаку внутренним тепловыделением. Из сказанного следует, что выражение для скорости дрейфа можно сразу написать, исходя из (2.2), после необходимого пересчета и переобозначения

$$\mathbf{U}=-\frac{qa^4}{12(2+\delta)\mu_1\lambda_1x_0{}^2}\frac{d\sigma}{dT}\left[1+\frac{3}{2}\beta+m\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{35}\varkappa^{-1}\right)\right]^{-1}\mathbf{e}_x \tag{3.1}$$

$$m=-\frac{qa^3}{9(2+\delta)\mu_1\lambda_1\chi_1}\frac{d\sigma}{dT}$$

где $\mathbf{e}_x$ — орт оси x, направленной в сторону жидкости и перпендикулярной стенке, x_0 — расстояние между центром капли и стенкой.

Как видно из (3.1), в зависимости от значений параметров задачи капля будет двигаться либо к стенке, либо от стенки.

Если мощность источников (стоков) тепла достаточно велика, то, формально устремляя, как и в разд. 2, величину q к бесконечности из (3.1), получим выражение для предельной скорости дрейфа капли, зависящее от минимального числа характеристик

$$\mathbf{U}=\frac{3\chi_1 a}{4x_0{}^2}\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{35}\varkappa^{-1}\right)^{-1}\mathbf{e}_x$$

Если стенка теплопроницаема, т. е. на ней выполняется условие $\partial T/\partial x=0$, то скорость дрейфа определяется выражением (3.1), взятым с противоположным знаком. Последнее следует из того, что в этом случае мнимая капля должна обладать в точности таким же внутренним тепловыделением, что и исходная.

Сравнивая результаты, полученные для этих двух предельных случаев теплового режима на стенке, можно заключить, что в некотором промежуточном случае скорость капли должна обратиться в нуль.

4. Заключительные замечания. Как отмечено в [11], движение при тех значениях параметров, когда сила (1.13) является силой тяги, по-видимому, неустойчиво. В частности, при выполнении такого условия режимы движения капли, скорость которого определяется формулами (1.14), (2.1), (3.1) и т. п., будут неустойчивыми и практически не реализуются. При этом, по-видимому, при тех же значениях параметров существуют другие режимы движения, не найденные в данной работе. Следует иметь в виду, что вклад в неустойчивость могут давать и моды более высокого порядка (см. [11]).

Для получения результатов данной работы потребовалось рассмотреть только одну моду (гармонику). При этом само собой подразумевалось, что решение, соответствующее другим модам, существует, хотя и неинтересно для настоящих целей. Однако следует отметить, что такое решение может существовать не всегда, и это накладывает еще одно ограничение на применимость полученных результатов. Действительно, при тех значениях параметров, когда в [11] постоянные в модах более высокого порядка не обращаются в нуль, а принимают произвольные значения (причем, по-видимому, эти значения параметров находятся на границе устойчивости этих мод), в исследуемой здесь ситуации должно получиться так, что решение для этих мод обращается в бесконечность, если, конечно, функция σ имеет составляющие, относящиеся к этим модам. Поэтому полученные результаты будут некорректны в некоторой окрестности таких значений параметров задачи.

Более подробное обсуждение вопросов об устойчивости и особенностях в решении выходят за рамки данной работы.

Рассмотрим, насколько стеснительными являются ограничения (малые числа Пекле и Рейнольдса, квазистационарность) в случае взаимодействия капель. Как следует из (2.1), (2.2), (3.1), числа Рейнольдса и Пекле квадратично зависят от малого параметра a/x_0, а числа $a^2/(\nu_i\tau)$, $a^2/(\chi_i\tau)$, малость которых является критерием квазистационарности, кубически зависят от параметра a/x_0. Здесь ν_i — коэффициент кинематической вязкости, τ — масштаб времени, который можно определить так: $\tau\sim x_0/|U|$. Данное рассуждение показывает, что во многих случаях (но не во всех, например когда знаменатель в (2.1), (2.2) или (3.1) близок к нулю) малость отношения a/x_0 является по существу единственным предположением, которое необходимо сделать, а малость чисел Пекле и Рейнольдса, а также квазистационарность получаются при этом автоматически.

Все исследованные здесь эффекты будут иметь место и при наличии других факторов (вместо внутреннего тепловыделения), влияющих в процессе движения на изменение коэффициента поверхностного натяжения вдоль поверхности капли (см., например, [7, 8, 10, 11]). Их рассмотрение можно провести аналогичным образом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Subramanian R. S.* The Stokes force on a droplet in an unbounded fluid medium due to capillary effects // J. Fluid Mech. 1985. V. 153. P. 389–400.
2. *Yuong N. O., Goldstein J. S., Block M. G.* The motion of bubbles in a vertical temperature gradient // J. Fluid Mech. 1959. V. 6. Pt 3. P. 350–356.
3. *Яламов Ю. И., Санасарян А. С.* Движение капель в неоднородной по температуре вязкой среде // Инж.-физ. журн. 1975. Т. 28. № 6. С. 1061–1064.
4. *Редников А. Е., Рязанцев Ю. С.* О термокапиллярном движении капли под действием излучения // ПМТФ. 1989. № 2. С. 179–183.
5. *Гупало Ю. П., Редников А. Е., Рязанцев Ю. С.* Термокапиллярный дрейф капли при нелинейной зависимости поверхностного натяжения от температуры // ПММ. 1989. Т. 53. № 3. С. 433–442.
6. *Братухин Ю. К.* Термокапиллярный дрейф капельки вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 5. С. 156–161.

7. *Рязанцев Ю. С.* О термокапиллярном движении реагирующей капли в химически активной среде // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 3. С. 180–183.
8. *Головин А. А.* О влиянии поверхностного натяжения на движение реагирующих капель // Элементарные процессы в химически реагирующих средах. М.: МФТИ, 1985. С. 106–111.
9. *Головин А. А., Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С.* О хемотермокапиллярном эффекте при движении капли в жидкости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 290. № 1. С. 35–39.
10. *Головин А. А., Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С.* Хемоконцентрационный капиллярный эффект при движении капли в жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 1. С. 147–154.
11. *Редников А. Е., Рязанцев Ю. С.* О термокапиллярном движении капли с однородным внутренним тепловыделением // ПММ. 1989. Т. 53. № 2. С. 271–277.
12. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.VIII.1989