

УДК 532.592:519.63

© 1990 г.

**Б. Е. ПРОТОПОПОВ**

## **ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ТРАНСФОРМАЦИИ УЕДИНЕННОЙ ВОЛНЫ ПРИ ОТРАЖЕНИИ ОТ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПРЕГРАДЫ**

В рамках модели потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости выполнен численный анализ трансформации уединенной волны при ее отражении от вертикальной стенки, которое также может быть интерпретировано как частный случай взаимодействия уединенных волн — встречное столкновение двух одинаковых солитонов. Задача о взаимодействии уединенных волн в силу нелинейности достаточно сложна, но, представляя несомненный интерес, активно исследуется с привлечением как асимптотических методов, так и лабораторного и численного моделирования. По некоторым аспектам проблемы достигнуто хорошее согласие теории, расчета и эксперимента. Это в первую очередь относится к величине максимального заплеска волны на стенку (см. [1], где результаты исследований этой величины представлены достаточно полно).

Что касается изменений параметров волны — амплитуды, скорости, фазы — вследствие ее отражения от стенки, то здесь до недавнего времени картина была довольно неясной в силу наличия существенных разногласий результатов аналитических [2], численных [3] и экспериментальных [4] исследований. Заметный прогресс в преодолении упомянутых разногласий достигнут в более поздних работах [5, 6], где соответственно выполнен теоретический анализ изменения амплитуды волны при откате от стенки и представлены более точные (в сравнении с [4]) экспериментальные данные по амплитуде и фазовому сдвигу отраженной волны.

Проблема, тем не менее, не утратила своей актуальности, что и послужило причиной для численного моделирования процесса взаимодействия уединенной волны с вертикальной стенкой, результаты которого представлены в данной работе.

**1. Постановка задачи и метод решения.** Движение жидкости описывается в терминах возвышения свободной поверхности  $\eta(x, t)$  и потенциала скорости  $\varphi(x, y, t)$  ( $x, y$  — горизонтальная и вертикальная координаты,  $t$  — время). Все переменные обезразмерены таким образом, что глубина жидкости и ускорение силы тяжести равны единице. Потенциал является гармонической функцией в области  $Q(t)$ , занятой жидкостью

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad (1.1)$$

На поверхности жидкости выполняются кинематическое и динамическое условия

$$\eta_t + \eta_x \varphi_x - \varphi_y = 0, \quad \varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + \eta = 0 \quad (y = \eta(x, t)) \quad (1.2)$$

Снизу область  $Q(t)$  ограничена ровным горизонтальным дном  $y = -1$ , слева и справа — вертикальными непроницаемыми стенками  $x = -b$  и  $x = l$ . На твердых границах ставятся условия непротекания

$$\varphi_y = 0 \quad (y = -1), \quad \varphi_x = 0 \quad (x = -b, \quad x = l) \quad (1.3)$$

Начальное состояние жидкости определяется соотношениями

$$\eta = \eta_0(x), \quad \eta_t = \eta_1(x) \quad (t = 0) \quad (1.4)$$

с заданными функциями  $\eta_0(x)$  и  $\eta_1(x)$ , конкретный вид которых, позволяющий смоделировать процесс взаимодействия уединенной волны с вертикальной преградой, будет указан в разд. 2.

Задача (1.1)–(1.4) решается численно методом конечных разностей. Здесь излагаются лишь общие идеи алгоритма, поскольку его подробному описанию посвящена отдельная работа [7], где также приведены и результаты расчета некоторых тестовых задач.

Используется подвижная расчетная сетка (заменой  $y$  на  $z = (\eta - y)/(\eta + 1)$  область  $Q(t)$  отображается на постоянный прямоугольник в плоскости  $(x, z)$ ), что существенно упрощает реализацию граничных условий. Дискретизация эволюционных уравнений (1.2) по схеме Кранка – Николсона обеспечивает высокий запас устойчивости (схема неявная, абсолютно устойчива для линейных задач), второй порядок аппроксимации по времени и низкую счетную вязкость. Итерирование нелинейных членов на каждом временном шаге сочетается с нахождением потенциала внутри области методом установления. Производные по пространственным переменным аппроксимируются также со вторым порядком, причем используются только симметричные разности, что дает однородность схемы.

Расчеты выполнены при следующих значениях шагов сетки по  $x$ ,  $z$  и  $t$  соответственно:  $h_1 = 0,25$ ;  $h_2 = 2/19$ ;  $\tau = 0,125$ .

**2. Моделирование уединенной волны.** Требуется выбрать функции  $\eta_0(x)$ ,  $\eta_1(x)$  и параметры  $b$ ,  $l$  таким образом, чтобы решение системы (1.1)–(1.4) с этими исходными данными описывало набегающую на стенку уединенную волну. Говоря точнее, требуется сгенерировать такую волну, которая бы по своим свойствам с приемлемой точностью соответствовала понятию уединенной волны на некотором интервале времени, предшествующем взаимодействию со стенкой.

Начальный профиль  $\eta(x)$  естественно взять совпадающим на всем отрезке  $-b \leq x \leq l$  с профилем свободной (т. е. удовлетворяющей уравнениям (1.1)–(1.3) при  $b, l \rightarrow \infty$ ) уединенной волны, а начальное значение  $\eta_1$  следует задать в соответствии с тем, что свободная уединенная волна есть бегущая волна

$$\eta_1(x) = -v_0 \frac{d}{dx} \eta_0(x) \quad (2.1)$$

Здесь через  $v_0 = \text{const}$  обозначена скорость волны, положительные значения которой соответствуют направлению движения волны слева направо.

В силу наличия боковых стенок генерируемая таким образом волна будет, вообще говоря, отличаться от свободной уединенной. Однако это отличие можно сделать вполне приемлемым (сопоставимым с влиянием счетной вязкости) на некотором фиксированном начальном интервале  $0 \leq t \leq t_1$  движения волны, если боковые стенки установить достаточно далеко от начального положения ее вершины, т. е. выбрать  $b$  и  $l$  достаточно большими.

В рамках используемой модели отсутствует точное явное выражение свободной уединенной волны. Таким образом, начальный профиль  $\eta_0(x)$  и скорость  $v_0$  могут быть заданы лишь приближенно, что приводит к заметному, по крайней мере при малых временах, непостоянству параметров генерируемой волны – амплитуды и скорости, определяемых соответственно

$$a(t) \equiv \max_x \eta(x, t), \quad v(t) \equiv \left| \frac{d}{dt} X(t) \right|$$

где  $X(t)$  – координата вершины волны:  $\eta(X(t), t) = a(t)$ .

Однако если волна движется достаточно долго (отражающая стенка установлена достаточно далеко), то ее параметры стабилизируются. С некоторого времени  $t_0 < t_1$  амплитуда и скорость волны становятся практически постоянными, а отличие волны от уединенной заключается лишь в наличии у нее «хвоста» – диспергирующего пакета волн малой амплитуды, образовавшегося вследствие нестационарного поведения волны на начальной стадии движения. Эта бегущая за основной волной рябь впоследствии безусловно окажет некоторое влияние на отраженную от стенки волну. Поэтому начальный профиль  $\eta_0(x)$  и скорость  $v_0$  следует взять по возможности более точными, что позволит не только быстрее вывести волну на стационарный режим поведения и сэкономить за счет этого машинные ресурсы, но и уменьшить амплитуды «паразитных» волн в хвосте, сведя тем самым к минимуму его влияние на отраженную волну.

В данном случае начальный профиль комбинируется из двух известных приближенных выражений профиля уединенной волны

$$\eta_0(x) = 0,4\eta_2(x) + 0,6\eta_3(x)$$

$$\eta_2(x) = a_0(1-f_2), \quad f_2(x) = \text{th}^2 \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3a_0}{1+a_0}} x \right]$$

$$\eta_3(x) = a_0 \left[ 1 - \left( 1 + \frac{3}{4}a_0 + \frac{51}{80}a_0^2 \right) f_3 + a_0 \left( \frac{3}{4} + \frac{19}{10}a_0 \right) f_3^2 - \frac{101}{80}a_0^2 f_3^3 \right]$$

$$f_3(x) = \text{th}^2 \left[ \frac{1}{2} \sqrt{3a_0} \left( 1 - \frac{5}{8}a_0 + \frac{71}{128}a_0^2 \right) x \right]$$

$$v_0 = 1 + \frac{1}{2}a_0 - \frac{3}{20}a_0^2 + \frac{3}{56}a_0^3 \quad (2.2)$$

Здесь  $\eta_2(x)$  соответствует точному представлению уединенной волны в длинноволновой нелинейно-дисперсионной модели (см., например, [1]), а  $\eta_3(x)$ , как и скорость  $v_0$ , выбраны согласно приближению третьего порядка по амплитуде (см., например, [2]). Единственным свободным параметром, определяющим состояние жидкости в момент  $t=0$ , является  $a_0 = a(0)$  — начальное значение амплитуды волны, которое в расчетах варьировалось в широком диапазоне:  $0,1 \leq a_0 \leq 0,75$ .

Размещение правой стенки на удалении  $l=35$  от начального положения вершины волны обеспечивает свободный пробег волны протяженностью от одной ее длины в случае  $a_0=0,1$  до трех длин при  $a_0=0,75$ . Здесь под длиной волны  $\lambda(t)$  подразумевается длина отрезка по  $x$ , на котором  $\eta(x, t) \geq 0,01a(t)$ , соответственно свободным пробегом волны считается ее движение до момента времени  $t_1$  такого, что  $\eta(l, t_1) = 0,01a(t_1)$ ,  $\eta(l, t) < 0,01a(t)$  при  $0 \leq t < t_1$ . В окрестности момента времени  $t_1$  параметры волны уже достаточно стабильны, так что ее можно считать уединенной с амплитудой  $\alpha = a(t_1)$  и скоростью  $c = v(t_1)$ .

Таблица 1

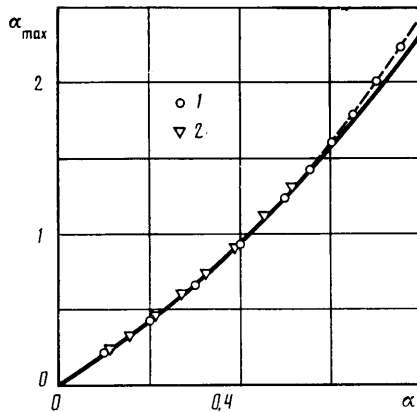
$a_0$	$v_0$	$\lambda_0$	$\alpha$	$c$	$s/\lambda_0$	$ a/\alpha  \cdot 10^4$	$a_p/\alpha \cdot 10^3$
0,1	1,0486	22,92	0,1000	1,0479	0,97	0,3	0,2
0,2	1,0944	16,90	0,2001	1,0938	1,51	0,7	0,3
0,3	1,1379	14,28	0,3004	1,1375	1,88	1	2,4
0,4	1,1794	12,71	0,4009	1,1787	2,18	2	3,4
0,5	1,2192	11,62	0,5014	1,2176	2,44	2	4,1
0,55	1,2385	11,18	0,5518	1,2362	2,54	2	4,4
0,6	1,2576	10,77	0,6022	1,2541	2,66	2	4,8
0,65	1,2763	10,44	0,6529	1,2714	2,76	3	5,1
0,7	1,2949	10,10	0,7038	1,2881	2,87	3	5,4
0,75	1,3132	9,79	0,7552	1,3043	2,98	3	5,8

Таблица 2

$\alpha$	$\alpha_{\max}$	$\alpha_{\min}$	$a_2$	$v_2$	$\Delta T$	$\Delta M_2 \cdot 10^5$
0,1000	0,2054	0,0994	0,0995	1,0486	0,212	125,9
0,2001	0,4239	0,1963	0,1986	1,0944	0,297	4,5
0,3004	0,6600	0,2888	0,2975	1,1378	0,366	25,6
0,4009	0,9221	0,3758	0,3963	1,1785	0,440	7,6
0,5014	1,2243	0,4493	0,4938	1,2165	0,517	3,8
0,5518	1,3953	0,4749	0,5416	1,2341	0,558	2,6
0,6022	1,5804	0,4934	0,5881	1,2509	0,600	1,5
0,6529	1,7786	0,4995	0,6328	1,2664	0,646	1,0
0,7038	1,9882	0,4894	0,6755	1,2809	0,692	0,7
0,7552	2,2067	0,5135	0,7194	1,2951	0,745	0,4

Значения амплитуды  $\alpha$  и скорости  $s$  уединенных волн, получающихся из начальных волн с заданными амплитудами  $a_0$  и им соответствующими, согласно (2.2), скоростями  $v_0$ , приведены в табл. 1. Здесь же указаны значения протяженности свободного пробега волны  $s$ , отнесенные к начальной длине волны  $\lambda_0 = \lambda(0)$ , значения в момент времени  $t_1$  параметра  $|\dot{a}/a|$  (точка означает дифференцирование по  $t$ ), характеризующего степень постоянства амплитуды волны, и отношения  $a_p/\alpha$ , где  $a_p$  есть максимальная амплитуда «паразитных» волн в хвосте, образовавшемся вследствие неточности начальных данных.

Из табл. 1 видно, что на подходе к стенке волна совпадает с уединенной с точностью до изменения амплитуды не более 0,03% за единицу времени (0,2% за время прохождения волной расстояния в одну свою длину) и на-



Фиг. 1

личия слабого по амплитуде (менее 0,6% от амплитуды основной волны) диспергирующего хвоста.

**3. Заплеск волны на стенку и ее параметры после отражения.** Амплитуда волны при накате на стенку быстро растет, достигая максимального значения

$$\alpha_{\max} = \max a(t) = \max \eta(l, t)$$

Рассчитанные значения максимального заплеска волны на стенку  $\alpha_{\max}$  в зависимости от амплитуды набегающей волны  $\alpha$  показаны точками 1 на фиг. 1. Точками 2 представлены результаты расчета [3], сплошной линией — приближенная зависимость [2]

$$\alpha_{\max} = 2\alpha \left(1 + \frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{8}\alpha^2\right) \quad (3.1)$$

Здесь и далее для сопоставления выбраны численные результаты работы [3] как наиболее близкой по постановке задачи и методу решения (в других численных исследованиях либо использованы менее общие модели, либо не затронуты рассматриваемые здесь аспекты проблемы) и наиболее точные — наиболее высокого порядка по амплитуде набегающей волны — аналитические зависимости рассматриваемых величин, заимствованные из [2, 5].

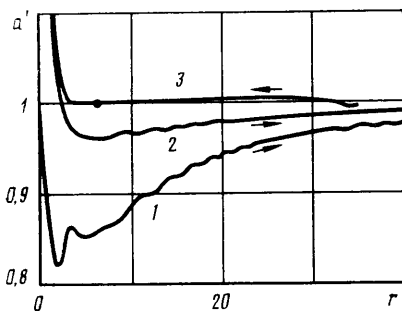
Как видно из фиг. 1, результаты расчета  $\alpha_{\max}$  хорошо согласуются с известными данными, подтверждают высокую точность приближенной зависимости (3.1), расхождение с которой не превосходит 4% во всем рассматриваемом диапазоне амплитуд набегающей волны  $\alpha \leq 0,7552$ . Превышение рассчитанных значений  $\alpha_{\max}$  над приближенными теоретическими (3.1), наблюдаемое в области высоких значений  $\alpha$ , носит закономерный характер — монотонно растет с ростом  $\alpha$ . Наиболее разумной причиной этого превышения представляется влияние членов более высокого, чем в (3.1),

порядка по  $\alpha$ . Добавлением к правой части зависимости (3.1) члена  $1/8\alpha^3$  удается достаточно хорошо (с расхождением не более 1,6%) аппроксимировать результаты расчета  $\alpha_{\max}$  (см. фиг. 1, штриховая линия).

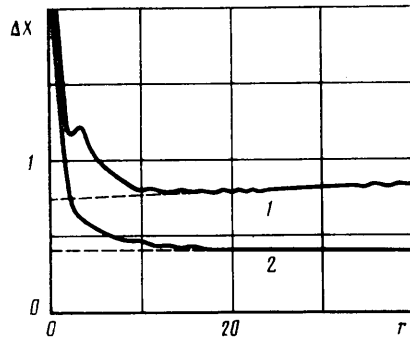
Отражение волны от стенки приводит к изменению амплитуды и скорости волны, искажению ее профиля и фазовому сдвигу. Вблизи стенки поведение отраженной волны существенно нестационарно: за ней формируется хвост из вторичных волн, при этом амплитуда и скорость самой волны претерпевают довольно заметные изменения во времени, что можно видеть из фиг. 2 и 3. На первой из них показана амплитуда волны  $a'(t) = a(t)/\alpha$ , на второй — сдвиг фазы

$$\Delta X(t) = \int_{t_1}^t (c - v(\tau)) d\tau \quad (3.2)$$

Обе эти величины для большей наглядности отложены в зависимости от  $r(t) = l - X(t)$  — расстояния от стенки до вершины волны. Под номе-



Фиг. 2



Фиг. 3

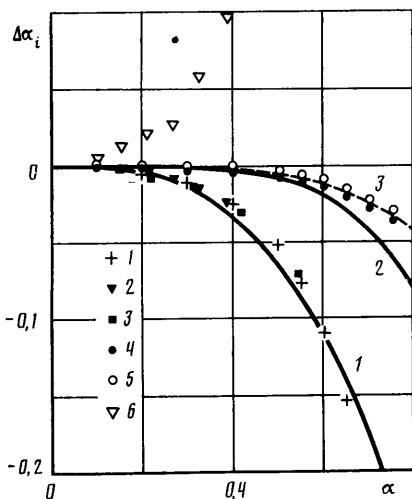
ром 1 на фиг. 2 и 3 представлены изменения соответствующих параметров на стадии отката при  $\alpha = 0,6022$ , под номером 2 — при  $\alpha = 0,3004$ . На фиг. 2, кроме того, для случая  $\alpha = 0,6022$  показано изменение амплитуды волны на стадии наката (кривая 3), обусловленное главным образом неточностью начального приближения уединенной волны. Хорошо видна констатируемая в предыдущем пункте стабилизация  $a(t)$  при подходе волны к стенке: в окрестности момента времени  $t_1$ , помеченного точкой на кривой 3, амплитуда волны уже практически постоянна. Сравнительно быстрее меняется амплитуда отраженной волны (кривая 1) на всем рассматриваемом интервале зависимости от  $r$ . При этом характерный вид изменения  $a(t)$  на стадии отката, построенный по результатам расчета, в общих чертах совпадает с полученным приближенными методами в теоретической работе [5]: резкое понижение амплитуды вблизи стенки до некоторого минимального значения  $\alpha_{\min} = \min a(t)$  сменяется более плавным и продолжительным ростом с выходом на новое значение  $\alpha_*$  (меньшее первоначального значения  $\alpha$  в силу расхода части энергии волны на образование вторичных волн).

Описанное поведение  $a(t)$  есть результат, как наглядно продемонстрировано в [5], наложения на отраженную волну начала хвоста из вторичных волн, амплитуда которых, как и временное уменьшение амплитуды отраженной волны вблизи стенки, есть величина третьего порядка по  $\alpha$  [5]. При этом теоретическая кривая — зависимость от  $t$  главного члена разложения по  $\alpha$  изменения амплитуды  $a(t)/\alpha - 1$  — монотонно растет после достижения минимума [5], в то время как поведение рассчитанной функции  $a(t)/\alpha$ , как видно из фиг. 2, несколько сложнее: рост  $a(t)$  сопровождается колебаниями. Наложение колебаний на возрастающую ветвь кривых 1 и 2 при  $r \geq 8$  можно объяснить взаимодействием отраженной волны с рябью, образовавшейся при генерации уединенной волны. В поль-

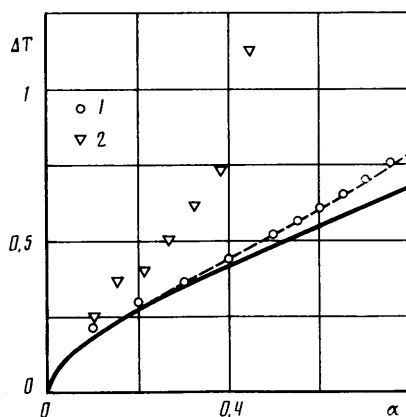
зу такого объяснения говорят величина амплитуды этих колебаний, их структура, характерная для хвоста,— убывание амплитуд и длин осцилляций с ростом  $r$ ,— а также расстояние от волны до стенки, начиная с которого они появляются. Причина ярко выраженной немонотонности кривой  $I$  вблизи стенки ( $2 \leq r \leq 5$ ) не ясна: возможно, подобный вид поведения  $a(t)$  получится при более точном теоретическом рассмотрении этой величины с учетом членов более высокого, чем третий, порядка по  $\alpha$ .

Обращает на себя внимание тот факт, что отраженная волна вступает в стадию отката со сдвигом амплитуды и скорости относительно своих первоначальных значений. Причем амплитуда волны в результате отражения уменьшилась, а скорость возросла (о величине скорости  $v(t)$  в сравнении с  $c$  можно судить по наклону кривой  $\Delta X(t)$ , при малых  $r(t)$  сдвиг фазы  $\Delta X(t)$  быстро убывает, что свидетельствует о заметном превосходстве  $v(t)$  над  $c$ , в то же время  $a(t) < \alpha$ ).

Асимметричный характер сдвига амплитуды и скорости волны при отражении от стенки отмечен и в [3], однако последующей эволюции параметров, продемонстрированной здесь с помощью фиг. 2, 3, не уделено должного внимания. Констатируется лишь очень слабое изменение параметров волны по мере ее удаления от стенки, на основании чего значения амплитуды и скорости приводятся в виде констант без указания момента времени, в который они имели место. Пренебрежение временной зависимостью параметров волны на фазе отката представляется необоснованным, поскольку, во-первых, вряд ли можно согласиться с тем, что скорость



Фиг. 4



Фиг. 5

изменения параметров мала, во-вторых, эти изменения будут продолжаться по крайней мере до тех пор, пока разность амплитуд отраженной и набегающей волн  $\Delta\alpha(t) = a(t) - \alpha$  и разность скоростей  $\Delta c(t) = v(t) - c$  не станут одного знака (в противном случае получится стационарная волна, скорость которой больше скорости уединенной волны той же амплитуды). Действительно, расчеты показывают, что установление скорости  $v(t)$  на некотором постоянном значении  $c_*$  (чему на фиг. 3 соответствует выход сдвига фазы  $\Delta X(t)$  на линейную асимптоту) происходит уже после того, как величина  $\Delta c(t)$  поменяла знак, т. е.  $c_* < c$  (угол наклона асимптоты положительный).

Таким образом, значения  $\Delta\alpha(t)$  и  $\Delta c(t)$  существенно зависят от того, находится ли отраженная волна в данный момент вблизи стенки или же значительно удалена от нее. Это хорошо видно из фиг. 4, где в зависимости от  $\alpha$  представлены  $\Delta\alpha_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) — «ближние» и «дальние» значения  $\Delta\alpha(t)$ . Точками 1 показана разность  $\Delta\alpha_1 = \alpha_{\text{min}} - \alpha$  — максимальное (по абсолютной величине) отклонение амплитуды отраженной волны от  $\alpha$ , точками 2 изображены результаты расчета сдвига амплитуды [3], хорошее согласование которых с величиной  $\Delta\alpha_1$  свидетельствует об измерении в [3]

амплитуды в окрестности точки минимума, т. е. довольно близко к стенке. Кривая 1 построена по зависимости  $\Delta\alpha_1 = -0,5\alpha^3$  согласно приближенным теоретическим результатам [5]. Экспериментальные данные [6] (точки 3) практически совпадают с приведенными численными и теоретическими результатами.

Точками 4 на фиг. 4 представлены «дальние» значения  $\Delta\alpha_2 = \Delta\alpha(t_2)$ , где  $t_2$  — момент времени, когда отраженная волна находится на расстоянии  $r_2 = r(t_2) = 40$  от стенки. О скорости волны в этот момент времени можно судить по изображенным точками 5 значениям величины  $\Delta\alpha_3 = a_3 - \alpha$ , где  $a_3$  — значение амплитуды, соответствующее реальному значению скорости  $v_2 = v(t_2)$  в предположении, что  $a_3$  и  $v_2$  связаны характерной для уединенной волны зависимостью  $v_2 = C(a_3)$ . Эта зависимость здесь аппроксимируется на основе (2.2) полиномом четвертой степени

$$C(a) = 1 + \frac{1}{2}a - \frac{3}{20}a^2 + \frac{3}{56}a^3 + \gamma a^4$$

с коэффициентом  $\gamma = \gamma(\alpha)$ , определяемым для каждого  $\alpha$  из условия  $c = C(\alpha)$  по рассчитанным значениям скорости  $c$  уединенной волны.

На выбранном удалении волны от стенки найденные таким образом значения амплитуды  $a_3$  все еще не совпадают с реальными значениями  $a_2$  (вследствие отмеченного выше нарушения пропорции между амплитудой и скоростью отраженной волны), однако уже очень близки к ним. Для сравнения аналогичным способом по рассчитанным в [3] значениям скорости отраженной волны построены соответствующие им значения амплитуды — точками 6 на фиг. 4 показаны их отклонения от  $\alpha$ , качественно отличающиеся от реальных изменений амплитуды (точек 2), что является следствием, как уже отмечалось, измерения параметров отраженной волны недалеко от стенки.

Приближенная зависимость окончательного изменения амплитуды отраженной волны  $\Delta\alpha_* = \Delta\alpha(\infty)$  [5] и формула, аппроксимирующая результаты расчета величин  $\Delta\alpha_2$  и  $\Delta\alpha_3$

$$\Delta\alpha_* = -\frac{5}{21}\alpha^5, \quad \Delta\alpha_* = -\frac{5}{21}\alpha^5(1 - 3/5\alpha)$$

представлены на фиг. 4 кривыми 2 и 3 соответственно. Эти зависимости не очень хорошо согласуются друг с другом, что объясняется высоким порядком по  $\alpha$  главного члена правых частей приведенных соотношений, требующим более аккуратного численного моделирования, в частности использования более мелкой расчетной сетки.

Скорость отраженной волны вдали от стенки устанавливается на новом постоянном значении  $c_*$ , соответственно сдвиг фазы  $\Delta X(t)$ , определяемый по (3.2), выходит на линейную зависимость от  $t$ , которую можно представить в виде

$$\Delta X(t) \rightarrow (c - c_*)(t - t_*) + c_*\Delta T \quad (t \rightarrow \infty), \quad t_* = t_1 + r(t_1)/c \quad (3.3)$$

Здесь  $\Delta T = \text{const}$  есть временной сдвиг фазы — понятие, введенное в [3]. Результаты расчета величины  $\Delta T$  в зависимости от амплитуды набегающей волны  $\alpha$  представлены на фиг. 5 (точки 1) в сопоставлении с результатами расчета [3] (точки 2) и приближенной зависимостью [2] (сплошная линия)

$$\Delta T = \sqrt{1/3\alpha}(1 + \frac{3}{8}\alpha) \quad (3.4)$$

Штриховая линия — аппроксимация результатов расчета

$$\Delta T = \sqrt{1/3\alpha}(1 + \frac{3}{8}\alpha + \frac{17}{64}\alpha^2 + \frac{5}{64}\alpha^3)$$

Для определения величины  $\Delta T$  требуется измерить сдвиг фазы  $\Delta X(t)$  и скорость  $v(t)$  отраженной волны в момент ее достаточного удаления от стенки, когда скорость волны уже практически постоянна:  $v(t) = c_*$ . С другой стороны, чем дальше от стенки находится отраженная волна, тем

больше разность  $t-t_0$  и, следовательно, тем сильнее ошибка измерения скорости  $c$  влияет на погрешность определения временного сдвига фазы  $\Delta T$ . Все это делает определение величины  $\Delta T$  довольно затруднительным. Невыполнение одного из требований аккуратного определения  $\Delta T$  в [3] (скорость отраженной волны замерена вблизи стенки) привело к существенному расхождению результатов расчета [3] с результатами настоящего расчета и приближенной зависимостью (3.4), которые между собой согласуются вполне приемлемо.

Расхождение точек  $I$  со сплошной линией на фиг. 5 в области больших значений  $\alpha$  обусловлено главным образом влиянием членов более высокого, чем в (3.4), порядка по  $\alpha$ . Заметное (в процентном отношении) расхождение при малых  $\alpha$  объясняется недостаточным удалением отраженной волны от стенки, которое относительно глубины жидкости было одинаковым  $r_2=40$  для всех  $\alpha$ , однако в масштабе длины волны варьировалось весьма заметно. Если в случае  $\alpha=0,7552$  отношение  $r_2/\lambda_0$  составляет 4,1, то для  $\alpha=0,1$  — всего лишь 1,75. При малых значениях  $\alpha$  скорость отраженной волны  $v(t)$  медленнее выходит на константу (так, например,  $v_2 > c$  вплоть до  $\alpha=0,3$ ), что и приводит к заметным относительным погрешностям определения величины  $\Delta T$ .

Результаты расчета  $\alpha_{\max}$ ,  $\alpha_{\min}$ ,  $a_2$ ,  $v_2$ ,  $\Delta T$  в зависимости от  $\alpha$  сведены в табл. 2.

**4. Контроль точности расчетов.** О достоверности описанных выше результатов численного моделирования процесса взаимодействия уединенной волны со стенкой можно судить по следующим фактам.

В расчетах контролировалось сохранение массы по мере эволюции волны прослеживалось изменение во времени интеграла

$$M(t) = \int_{-b}^l \eta(x, t) dx$$

Относительные отклонения массы от начального значения  $\Delta M(t) = M(t)/M(0) - 1$  в момент  $t=t_2$  приведены в табл. 2 в зависимости от  $\alpha$ . Необходимо отметить, что в данном случае основной (по крайней мере при малых  $\alpha$ ) вклад в отклонение  $M(t)$  от  $M(0)$  вносится не погрешностью расчета, а заданием начальных данных в виде (1.4), (2.1) в сочетании с несимметричным расположением боковых стенок относительно начального положения вершины волны ( $b \neq l$ ). В результате при  $t=0$  поток жидкости через границу области течения не равен нулю, хотя и очень мал. С уменьшением  $\alpha$  длина волны растет, соответственно увеличивается начальный поток жидкости через границу и ухудшается сохранение массы.

По этой причине волны малой амплитуды рассчитывались в более длинной области:  $b=20$  в случае  $\alpha \leq 0,2001$  и  $b=15$  для всех остальных значений  $\alpha$ , начиная с 0,3004. Переход с  $b=20$  на  $b=15$ , как видно из табл. 2, вносит монотонность в зависимость от  $\alpha$  величины  $\Delta M_2 = \Delta M(t_2)$ , хорошо коррелирующей с  $\eta_0(-b)$ . В целом даже в худшем варианте (при  $\alpha=0,1$ ) изменение массы на 0,13% можно считать вполне приемлемым, если к тому же учесть, что  $M(t)$  есть масса не всей жидкости, а лишь той ее части, которая отклоняется от нулевого уровня.

Помимо основной серии расчетов были выполнены два контрольных расчета: первый — на более мелкой сетке ( $h_1=1/6$ ,  $\tau=1/12$ ,  $h_2=2/19$ ), второй — на первоначальной сетке, но в более длинной области ( $l=60$ ). В обоих случаях начальное значение амплитуды волны было достаточно большим  $a_0=0,6$ . Расхождение с результатами основной серии расчетов не превысило 3% по всем параметрам, представленным в табл. 2.

Расчет в более длинной области подтвердил предположение о причинах колебаний, наложенных на возрастающие ветви кривых  $I$  на фиг. 2 и 3. В этом случае участок немонотонного поведения кривых на отрезке  $2 \leq r \leq 5$  остался практически неизменным, а последующие ( $r \geq 8$ ) колебания отодвинулись дальше ( $r \geq 12$ ) в соответствии с тем обстоятельством, что с увеличением  $l$  увеличивается и расстояние от основной волны на подходе к стенке до сопровождающей ее ряби, возникающей при генерации волны.

Слабая чувствительность основных результатов расчета к заметным (50%) вариациям шагов сетки и длины области наряду с неплохим сохранением массы жидкости позволяет сделать вывод о высокой точности вычислений.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Железняк М. И. Воздействие длинных волн на сплошные вертикальные преграды // Накат цунами на берег. Горький: ИПФ АН СССР, 1985. С. 122–139.
2. Su C. H., Mirie R. M. On head-on collisions between two solitary waves // J. Fluid Mech. 1980. V. 98. № 3. P. 509–525.
3. Fenton J. D., Rienecker M. M. A Fourier method for solving nonlinear water-wave problems: application to solitary-wave interactions // J. Fluid Mech. 1982. V. 118. P. 441–443.
4. Maxworthy T. Experiments on collisions between solitary waves // J. Fluid Mech. 1976. V. 76. № 1. P. 177–185.
5. Wyatt-Smith J. G. B. The reflection of a solitary wave by a vertical wall // J. Fluid Mech. 1988. V. 197. P. 503–521.
6. Seabra-Santos F. J., Temperville A., Renouard D. On the weak interaction of two solitary waves // Euro. J. Mech. B/Fluids. 1989. V. 8. № 2. P. 103–115.
7. Прокопцов Б. М. Численное моделирование поверхностных волн в канале переменной глубины // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1988. № 84. С. 91–105.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
10.VII.1989