

УДК 532.592

© 1990 г.

Ю. Я. ТРИФОНОВ

**БИФУРКАЦИИ ДВУМЕРНЫХ ВОЛНОВЫХ РЕЖИМОВ ТЕЧЕНИЯ
К ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ДЛЯ ВЕРТИКАЛЬНО СТЕКАЮЩЕЙ
ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ**

Исследуются трехмерные стационарно бегущие волновые режимы стекания тонкого слоя вязкой жидкости по вертикальной стенке, ответвляющиеся от двумерных нелинейных волн. Расчеты производились численно на основе модельной системы уравнений, справедливой при умеренных числах Рейнольдса. Показано, что существует два принципиально различных типа трехмерных стационарно бегущих волн, ответвляющихся от плоских. Один из них обладает шахматной симметрией в расположении максимумов толщины волнового профиля и является более интересным. продемонстрировано также существенное различие в «развале» плоских волн 1-го и 2-го семейств. Рассчитаны волновые характеристики некоторых трехмерных режимов в зависимости от бифуркационного параметра.

Практически при всех числах Рейнольдса поверхность стекающего по вертикальной стенке слоя жидкости покрыта волнами. Это связано с тем, что течение пленки с гладкой свободной поверхностью неустойчиво [1]. Без соблюдения специальных мер предосторожности, связанных с созданием однородных по периметру трубы условий на входе, волны трехмерные и нерегулярные [2], к тому же пленка чрезвычайно чувствительна к внешним возмущениям. В экспериментах в целях регуляризации волнового течения применялись искусственно наложенные пульсации расхода жидкости, а также создавались равномерные условия на входе течения [2, 3]. В этих условиях существовал участок двумерных (кольцевых) регулярных волн, длина которого существенно зависела от свойств жидкости и ее расхода [3]. В дальнейшем течение эволюционировало к трехмерному [3, 4].

Накладывая пульсации различных частот, можно было реализовать двумерные волны с различными длинами, причем существовало два резко различающихся по свойствам типа волн – квазигармонические и одиночные [2, 3]. В теоретических работах [5, 6] на основе модельной системы уравнений для мгновенных толщины и расхода жидкости [7] рассчитаны различные двумерные нелинейные стационарно бегущие волновые режимы, некоторые из них количественно хорошо согласуются с экспериментом. В [8, 9] исследована устойчивость найденных режимов относительно плоских, бесконечно малых возмущений и проведен бифуркационный анализ. Выделенными в смысле устойчивости оказались волны двух типов, в дальнейшем 1-е и 2-е семейства, которые соответствуют в экспериментах режимам квазигармонических и одиночных волн.

В [10], осредняя уравнения движения поперек слоя (координата y) и закладывая определенный вид профилей скорости в x - (вдоль вектора силы тяжести) и z -направлениях, была получена система уравнений, обобщающая систему работы [7] на случай трехмерных возмущений, имеющая вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + 1,2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{q^2}{h} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{qQ}{h} \right) &= - \frac{3\nu q}{h^2} + gh + \frac{\sigma h}{\rho} \left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 h}{\partial x \partial z^2} \right) \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + 1,2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{qQ}{h} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{Q^2}{h} \right) &= - \frac{3\nu Q}{h^2} + \frac{\sigma h}{\rho} \left(\frac{\partial^3 h}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 h}{\partial z \partial x^2} \right) \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь h – мгновенная толщина пленки, q – мгновенный расход в пленке в x -направлении, ν – коэффициент кинематической вязкости, Q – мгновенный расход в z -направлении, σ – коэффициент поверхностного натяжения, g – ускорение свободного падения, ρ – плотность жидкости.

В [11], линеаризуя систему уравнений (1) около найденных в [6] двумерных периодических волновых режимов $h_0(\xi)$, $q_0(\xi)$, была исследована устойчивость волн 1-го и 2-го семейств к пространственным возмущениям вида

$$(h', q', Q') = (\Psi(\xi), \Phi(\xi), \chi(\xi)) e^{i\alpha L \xi} e^{i\beta z} e^{-\gamma t} + \text{к.с.} \quad (2)$$

Здесь к.с. означает комплексное сопряжение, β , L – вещественные параметры, $L \in [0, 1]$, $\xi = x - ct$, где c – фазовая скорость двумерной волны, α – волновое число исходного режима, (Ψ, Φ, χ) – периодические функции с периодом $2\pi/\alpha$.

Расчеты [11] показали, что двумерные волны как 1-го, так и 2-го семейств во всей области их существования по волновым числам и числам Рейнольдса неустойчивы к пространственным возмущениям. Самыми опасными, как правило, являются возмущения с $L=0,5$. Для некоторых волновых режимов рассчитаны нейтральные кривые для различных пространственных возмущений.

Обезразмеривая переменные аналогично [6], для расчета трехмерных стационарно бегущих волн имеем систему

$$\begin{aligned} -c \frac{\partial q}{\partial \xi} + 1,2 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{q^2}{h} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{qQ}{h} \right) &= -p \frac{q}{h^2} + Fh + 3h \left(\frac{\partial^3 h}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^3 h}{\partial \xi \partial z^2} \right) \\ -c \frac{\partial Q}{\partial \xi} + 1,2 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{qQ}{h} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{Q^2}{h} \right) &= -p \frac{Q}{h^2} + 3h \left(\frac{\partial^3 h}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 h}{\partial z \partial \xi^2} \right) \\ -c \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{\partial Q}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$p = \left(\frac{27\text{Fi}}{\text{Fr Re}^{10}} \right)^{1/6}, \quad \text{Fi} = \frac{(\sigma/\rho)^3}{g\nu^4}, \quad \text{Fr} = \frac{\langle q \rangle^2}{g \langle h \rangle^3}, \quad \text{Re} = \frac{\langle q \rangle}{\nu}$$

Здесь $\langle \rangle$ означает среднее по длинам волн, $\xi = x - ct$, c – фазовая скорость трехмерных волн. Критерий F в (3) определяемый, и имеет ясный физический смысл $\langle h \rangle / h_n = (F/p)^{1/6}$, где h_n – толщина безволновой пленки для данного значения параметра p , рассчитываемая по формуле Нуссельта.

Численный алгоритм расчета использует представление функций в виде конечных сумм от двойных рядов Фурье

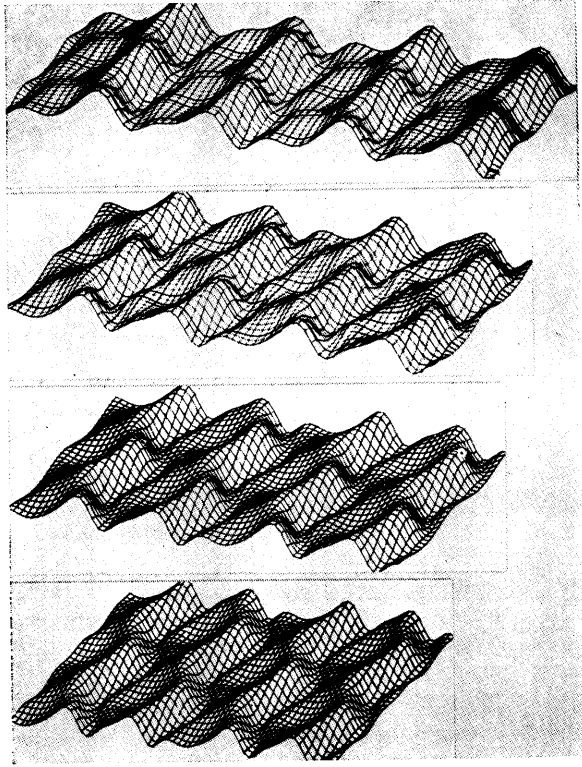
$$(h, q) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N (H_{mn}, q_{mn}) e^{i\alpha m \xi + i\beta n z} \quad (4)$$

процедуру быстрого фурье-преобразования, итерационный метод Ньютона для решения системы нелинейных алгебраических уравнений и аналогичен изложенному в [6] для расчета плоских волн. Число N для излагаемых ниже результатов равнялось трем, число M менялось в зависимости от исходной двумерной волны и для большинства результатов величина отброшенных в (4) фурье-гармоник была примерно в 100 раз меньше величины максимальной гармоники.

При фиксированном значении параметра p для любой стационарно бегущей двумерной волны из диапазона существования по волновым числам α всегда существуют нарастающие и соответственно нейтральные пространственные возмущения вида (2) с $\text{Real}(\gamma) = 0$ [11]. Используя собственный вектор нейтрального возмущения, для конструирования начального приближения вблизи точки бифуркации имеем

$$(h, q) = \sum (h_{0m}, q_{0m}) e^{i\alpha m \xi} + A \left(e^{i\alpha L \xi} e^{i\beta z} e^{-i\gamma t} \sum_m (\Psi_m, \Phi_m) e^{i\alpha m \xi} + \text{к.с.} \right) \quad (5)$$

Как видно из (5), стационарно бегущие пространственные режимы могут ответвляться в точках, где $\gamma_i = 0$. Такие точки для волнового режима с фиксированным α могут лежать на линии $L=0,5$ или $L=0$ [11].



Фиг. 1

При этом волновые числа (α^*, β^*) рождающихся пространственных режимов, как следует из (5), будут соответственно $(\alpha/2, \beta)$ и (α, β) . Для трехмерных волновых режимов, отвечающих с $(\alpha/2, \beta)$, существует дополнительная симметрия кроме общего для всех решений свойства

$$H(\xi, -z) = H(\xi, z), \quad q(\xi, -z) = q(\xi, z), \quad Q(\xi, -z) = -Q(\xi, z) \quad (6)$$

Условия (6) непосредственно следуют из уравнений (3). Дополнительное свойство симметрии легко увидеть, если представить (5) в виде

$$(h, q) = \sum_m (h_m^*, q_m^*) e^{i(\alpha/2)m\xi} + A \left(e^{i(\alpha/2)\xi} e^{i\beta z} \sum_m (\Psi_m, \Phi_m) e^{2i(\alpha/2)m\xi} + \text{к. с.} \right) \quad (7)$$

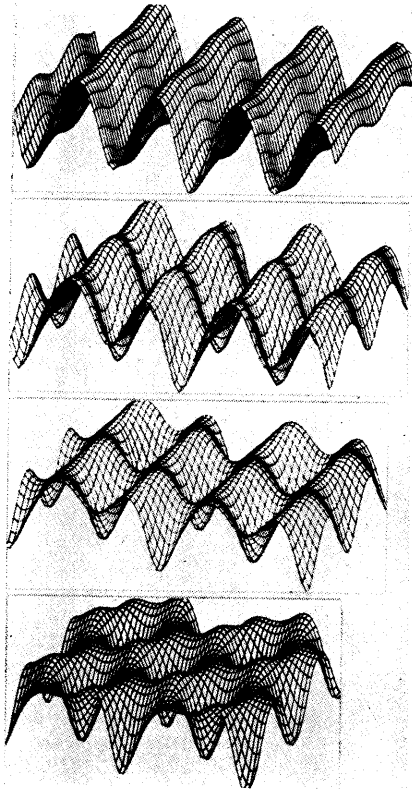
Здесь все нечетные гармоники (h_m^*, q_m^*) равны нулю, а для четных связь $(h_m^*, q_m^*) = (h_{0, m/2}, q_{0, m/2})$. Из (7) следует

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi + \pi/\alpha^*, \quad z_1 = z + \pi/\beta^* \\ (h(\xi_1, z_1), q(\xi_1, z_1)) &= (h(\xi, z), q(\xi, z)) \end{aligned} \quad (8)$$

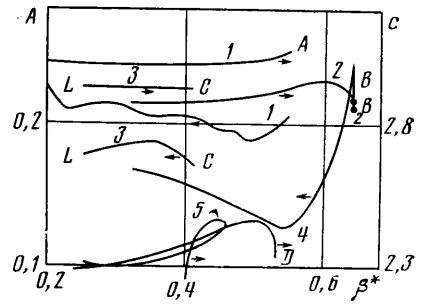
где $\alpha^* = \alpha/2$, $\beta^* = \beta$. В дальнейшем, при удалении от точки бифуркации, свойство (8) будет сохраняться, давая определенные ограничения на набор гармоник H_{mn} пространственной волны. Из (8) следует, в частности, что максимумы профиля толщины пленки будут расположены в шахматном порядке.

Использование свойств (6) и (8) существенно сокращает объем вычислений.

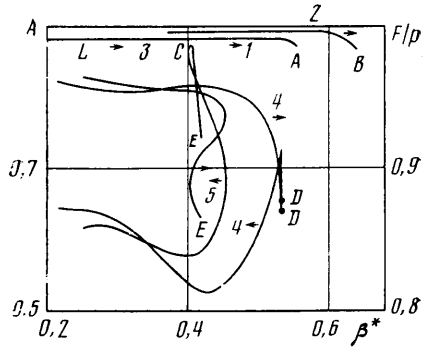
В окрестности точек ветвления в качестве бифуркационного параметра использовалась амплитуда пространственных возмущений A из (5), а достаточно далеко от места бифуркации параметром служило волновое число β^* .



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 1 приведены характерные профили толщины пространственных режимов, отвечающих от двумерной волны второго семейства с $\alpha=0,52$, при значении параметра $p=10$. Здесь бифуркационным параметром служит волновое число β^* . Волновые числа пространственных режимов $\alpha^*=0,26$, в точке бифуркации $\beta^*\approx 0,55$; на фиг. 1, а, б, в, г $\beta=0,53, 0,41, 0,35, 0,26$ соответственно.

Аналогичные результаты для ветвления от волны первого семейства с $\alpha=0,7$ при $p=1$ приведены на фиг. 2. Волновое число $\alpha^*=0,35$, в точке бифуркации $\beta^*\sim 0,532$; на фиг. 2а, б, в, г $\beta^*=0,533, 0,53, 0,49, 0,36$ соответственно.

На фиг. 1, 2 приведены два периода как по оси ξ , так и по z .

Отметим некоторое качественное различие в картине «развала» двумерных волн 1-го и 2-го семейств. Как видно из фиг. 1, при всех значениях параметра β^* прослеживается квазидвумерность пространственных волн. Фронт плоской волны постепенно искривляется, начинают прослеживаться отдельные «капли» характерной подковообразной формы, но тем не менее все время видна структура первоначальной двумерной волны. В отличие от этого развал плоских волн 1-го семейства, как следует из фиг. 2, приводит к образованию существенно трехмерной структуры течения.

Такое различие на основе визуальных наблюдений эволюции волн на поверхности пленки впервые было отмечено в экспериментах [12].

На фиг. 3, 4 приведены амплитуды пространственных режимов (определяются как разность между максимальной и минимальной толщинами пленки), фазовые скорости и отношения F/p в зависимости от волнового числа β^* . Линии 1 на этих рисунках соответствуют ветвлению от плоской волны второго семейства с $\alpha=0,52$ при значении параметра $p=10$. Значения волновых чисел пространственного режима в окрестности точки би-

фуркации A на фиг. 3, 4: $\alpha^* = 0,26$, $\beta^* \sim 0,55$. Линии 2–5 на фиг. 3, 4 соответствуют ветвлениям от двумерных волн первого семейства с $\alpha = 0,79$ при $p = 10$, $\alpha = 0,6$ при $p = 10$, $\alpha = 0,7$ при $p = 1$ и $\alpha = 0,55$ при $p = 1$ соответственно. Волновые числа пространственных режимов в окрестностях точек ветвления B, C, D, E соответственно равны: $\alpha^* = 0,395$, $\beta^* \sim 0,64$, $\alpha^* = 0,6$, $\beta^* \sim 0,4$, $\alpha^* = 0,35$, $\beta^* \sim 0,53$, $\alpha^* = 0,275$, $\beta^* \sim 0,42$.

Все указанные пространственные режимы, кроме волн, ответвляющихся по линии 3 на фиг. 3, 4, обладают свойством (8), т. е. шахматным порядком в расположении максимумов толщины пленки. Режимы, ответвляющиеся по линии 3, снова переходят в двумерные волны в точке L на фиг. 3, 4 в отличие от пространственных волн, рождающихся по другим линиям, дальнейшее продвижение по параметру β^* для которых было ограничено возможностями численного счета. Волновой профиль толщины для режимов на всей линии 3, как показали расчеты, слабо отличается от двумерного.

Таким образом, из анализа как линейной, так и нелинейной устойчивости двумерных волн следует вывод, что существует две принципиально различные возможности «развала» плоских волн на пространственные стационарно бегущие волны, причем одна из них — приводящая к образованию волн с шахматной симметрией — более типична. Дальнейшее изложение относится к пространственным волнам, которые обладают свойством (8).

Зависимости амплитуды, фазовой скорости и отношения средней толщины пленки к нуссельтовской, как это следует из фиг. 3, 4, имеют тенденцию выхода на постоянные величины, начиная с определенных значений β^* . Особенно отчетливо это видно для зависимостей фазовых скоростей от параметра β^* .

Отметим также интересное различие в поведении зависимостей для амплитуды пространственных волн, ответвляющихся от волн 2-го (линия 1 на фиг. 3) и 1-го семейства (линии 2, 4, 5 на фиг. 3, 4). В первом случае ветвление имеет мягкий характер вблизи точки бифуркации, во втором жесткий. Это обстоятельство еще раз подчеркивает разный характер «развала» двумерных волн 1-го и 2-го семейств.

Величина отношения F/p , как это видно из фиг. 4, для трехмерных волн всегда больше, чем соответствующая в точке бифуркации. Здесь следует упомянуть гипотезу «оптимальных» режимов В. Я. Шкадова, относящуюся к двумерным волнам, где утверждается, что среди всех возможных в теории волновых режимов в экспериментах преимущество имеют волны, отношение F/p для которых минимально. По всей видимости, эту гипотезу нельзя распространять на переход от двумерных волн к пространственным, так как в соответствии с ней и из фиг. 4 следует, что такой переход невыгоден, несмотря на то, что двумерные волны линейно неустойчивы. Возможно, эта гипотеза справедлива при выборе преимущественных длин волн среди пространственных режимов. Тогда из существования асимптотик на фиг. 4 для отношения F/p следует, что достаточно длинные в z -направлении (малые β^*) пространственные режимы будут равноправны между собой с точки зрения гипотезы оптимальных режимов.

В дальнейшем качественно новые результаты, на наш взгляд, могут быть получены при исследовании устойчивости рассчитанных пространственных режимов, так как они, по всей видимости, должны бифурцировать в новые пространственные волны с потерей шахматной симметрии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yih Chia-Shun. Stability of liquid flow down on inclined plane // Phys. Fluids. 1963. V. 6. № 3. P. 321–334.
2. Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1948. Т. 18. Вып. 1. С. 3–28.

3. *Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Алексеенко С. В.* Стационарные двумерные катящиеся волны на вертикальной пленке жидкости // Инж.-физ. журн. 1976. Т. 30. № 5. С. 780–785.
4. *Salazar R. P., Marschall E.* Three-dimensional surface characteristics of a falling liquid film // Int. J. Multiphase Flow. 1978. V. 4. № 5–6. P. 487–496.
5. *Демехин Е. А., Шкадов В. Я.* Режимы двумерных волн тонкого слоя вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 3. С. 63–67.
6. *Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю.* Нелинейные волны на поверхности пленки жидкости, стекающей по вертикальной стенке // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1985. № 5. С. 15–19.
7. *Шкадов В. Я.* Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 1. С. 43–51.
8. *Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю.* Стационарные двумерные волны на вертикально стекающей пленке жидкости и их устойчивости // Инж.-физ. журн. 1988. Т. 54. № 1. С. 41–47.
9. *Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю.* О ветвлении стационарно бегущих волновых режимов вязкой пленки жидкости // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1988. № 4. С. 55–60.
10. *Демехин Е. А., Шкадов В. Я.* О трехмерных нестационарных волнах в стекающей пленке жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 5. С. 21–27.
11. *Трифонов Ю. Я.* Устойчивость нелинейных волн на вертикально стекающей пленке жидкости к пространственным возмущениям // 3-я Всесоюз. конф. молодых исследователей «Актуальные вопросы теплофизики и физической гидродинамики» 28–30 марта 1989 г.: Тез. докл. Новосибирск, 1989. С. 119–120.
12. *Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г.* Волны на поверхности вертикально стекающей пленки жидкости: Препринт № 36–79. Новосибирск: Ин-т теплотехники СО АН СССР, 1979. 51 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
27.X.1989