

УДК 532.59:537.4

© 1990 г.

С. В. КОРСУНСКИЙ

ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ В ДВУХСЛОЙНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ДЕЙСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Исследование волновых движений в плоских слоях электропроводных жидкостей представляет практический интерес при расчете волновых режимов работы МГД-устройств с жидкометаллическим рабочим телом [1]. Поверхностные волны в проводящих средах, подверженных действию магнитного поля, исследовались в случае слабой проводимости жидкости в [2, 3], а в приближении идеальной проводимости — в [4, 5]. Анализ волновых движений в указанных работах проводился в предположении об однородной по глубине структуре слоя жидкости. Однако реальные среды могут обладать неоднородными свойствами, например стратификацией плотности или электропроводности. Исследование таких систем связано со значительными трудностями, одна из которых — необходимость рассмотрения нелинейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. Между тем основная информация о влиянии неоднородности на характеристики распространяющихся волн может быть получена в рамках простой модели слоистой среды аналогично тому, как это делается в теории океанических волн [6]. Отметим, что распространение нелинейных внутренних волн в безграничной стратифицированной идеально проводящей жидкости рассматривалось в [7], а в двухслойной магнитной жидкости — в [8].

В настоящей работе исследуется распространение линейных и нелинейных внутренних волн вдоль границы раздела двух слабопроводящих сред, различающихся по плотности и электропроводности, и анализируется влияние эффектов МГД-взаимодействия на их характеристики. Показано, что волны в такой системе распространяются с дисперсией и диссипацией, причем для гармонических волн бесконечно малой амплитуды существует диапазон волновых чисел, где распространяющиеся моды не существуют. Для волн конечной амплитуды получено нелинейное уравнение Шредингера с диссипативным возмущением и найдено его асимптотическое решение. Установлено, что наличие электропроводности и приложенного магнитного поля приводит к уменьшению амплитуды и частоты огибающей дуга волн.

1. В прямоугольной декартовой системе координат x, y, z рассматривается плоская задача о распространении внутренних волн вдоль границы раздела двух электропроводных жидкостей плотностью ρ_1, ρ_2 и проводимостью σ_1, σ_2 , расположенных в плоском канале с непроводящими непроницаемыми стенками. Толщины слоев жидкостей в невозмущенном состоянии d_1 и d_2 соответственно, вся система находится во внешнем невозмущенном магнитном поле $\mathbf{H}_0 = (0, H_0, 0)$ и однородном поле силы тяжести $\mathbf{G} = (0, 0, -g)$, магнитные проницаемости жидкостей и стенок канала равны между собой. Математическая постановка задачи включает уравнения движения слабопроводящих сред в областях $\Omega_1 = \{(x, z) | -\infty < x < \infty, \alpha\eta \leq z \leq \epsilon\}$ и $\Omega_2 = \{(x, z) | -\infty < x < \infty, -1 \leq z \leq \alpha\eta\}$ с граничными условиями на поверхности раздела и стенках канала [2, 3]

$$\beta \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0, \quad j=1, 2 \quad (1.1)$$

$$\varphi_{1z} - \alpha\beta\varphi_{1x}\eta_x = \varphi_{2x} - \alpha\beta\varphi_{2x}\eta_x = \beta\eta_t, \quad z = \alpha\eta \quad (1.2)$$

$$(1.3)$$

$$\eta(1-\delta) + \varphi_{2t} + \frac{\alpha}{2} \varphi_{2x}^2 + \frac{\alpha}{2\beta} \varphi_{2z}^2 + N_2 \varphi_2 = \delta \left(\varphi_{1t} + \frac{\alpha}{2} \varphi_{1x}^2 + \frac{\alpha}{2\beta} \varphi_{1z}^2 + N_1 \varphi_1 \right),$$

$$z = \alpha\eta$$

$$\varphi_{1z}=0, \quad z=\varepsilon; \quad \varphi_{2z}=0, \quad z=-1 \quad (1.4)$$

Здесь φ_1, φ_2 — потенциалы скоростей движения жидкости в областях $\Omega_{1,2}$, функция $\eta(x, t)$ описывает форму возмущенной поверхности раздела сред. В (1.1)–(1.4) введены безразмерные переменные по формулам (звездочки опущены)

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{\lambda}, \quad z^* = \frac{z}{d_2}, \quad \eta^* = \frac{\eta}{a}, \quad t^* = \frac{t\sqrt{gd_2}}{\lambda} \\ \varphi_j^* &= \frac{\varphi_j \sqrt{\beta}}{\alpha d_2 \sqrt{gd_2}}, \quad \alpha = \frac{a}{d_2}, \quad \beta = \frac{d_2^2}{\lambda^2}, \quad \varepsilon = \frac{d_1}{d_2} \\ \delta &= \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad N_j = \frac{\mu^2 \sigma_j H_0^2 \lambda}{\rho_j \sqrt{gd_2}}, \quad j=1, 2 \end{aligned}$$

где λ — характерный линейный масштаб, a — амплитуда волны.

Проанализируем вначале распространение гармонических волн бесконечно малой амплитуды. Опуская в (1.2), (1.3) члены порядка $O(\alpha)$, получаем

$$\varphi_{1z} = \varphi_{2z} = \beta \eta_t, \quad z=0 \quad (1.5)$$

$$(1-\delta)\eta + \varphi_{2t} + N_2 \varphi_2 - \delta \varphi_{1t} - \delta N_1 \varphi_1 = 0, \quad z=0 \quad (1.6)$$

Решения линеаризованной задачи будем отыскивать в виде бегущих волн

$$\varphi_j = \Phi_j(z) \exp[i(kx - \omega t)], \quad j=1, 2; \quad \eta = \eta_0 \exp[i(kx - \omega t)]$$

При этом из (1.1), (1.4)–(1.6) получаем выражения для амплитуд потенциалов φ_1, φ_2

$$\Phi_1 = \frac{i\omega \sqrt{\beta}}{k} \eta_0 \frac{\operatorname{ch} k \sqrt{\beta}(z-\varepsilon)}{\operatorname{sh} k \sqrt{\beta}\varepsilon}, \quad \Phi_2 = -\frac{i\omega \sqrt{\beta}}{k} \eta_0 \frac{\operatorname{ch} k \sqrt{\beta}(z+1)}{\operatorname{sh} k \sqrt{\beta}}$$

и дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned} \omega^2(\varepsilon\omega_\varepsilon^2 + \delta\omega_\beta^2) + i\omega(\varepsilon N_2\omega_\varepsilon^2 + \delta N_1\omega_\beta^2) &= (1-\delta)\varepsilon\omega_\varepsilon^2\omega_\beta^2 \\ \omega_\beta^2 &= k \operatorname{th} k \sqrt{\beta}/\sqrt{\beta}, \quad \omega_\varepsilon^2 = k \operatorname{th} k \sqrt{\beta}\varepsilon/\sqrt{\beta}\varepsilon \end{aligned} \quad (1.7)$$

Из (1.7) находим

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_r - i\omega_{im} \\ \omega_r^2 &= \frac{(1-\delta)\varepsilon\omega_\varepsilon^2\omega_\beta^2}{\varepsilon\omega_\varepsilon^2 + \delta\omega_\beta^2} - \omega_{im}^2 \\ \omega_{im} &= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon N_2\omega_\varepsilon^2 + \delta N_1\omega_\beta^2}{\varepsilon\omega_\varepsilon^2 + \delta\omega_\beta^2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Отсюда видно, что влияние электропроводности проявляется в демпфировании волновых возмущений и уменьшении частоты их колебаний. Кроме того, из (1.8) следует, что распространяющиеся моды существуют в системе только в диапазоне волновых чисел, удовлетворяющих условию

$$4(1-\delta)\varepsilon\omega_\varepsilon^2\omega_\beta^2(\omega_\varepsilon^2 + \delta\omega_\beta^2) > (\varepsilon N_2\omega_\varepsilon^2 + \delta N_1\omega_\beta^2)^2 \quad (1.9)$$

и при этом имеют место неравенства

$$\min(N_1, N_2) < 2\omega_{im} < \max(N_1, N_2)$$

Для тонких слоев жидкостей ($\beta \ll 1$, $\varepsilon \sim 1$) из (1.9) получаем соотношение

$$k > \frac{1}{2} \frac{\varepsilon N_2 + \delta N_1}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon + \delta)(1 - \delta)}}$$

а при $\beta \gg 1$, $\varepsilon \sim 1$ имеем

$$k > \frac{\sqrt{\beta}}{4} \frac{(N_2 + \delta N_1)^2}{1 - \delta^2}$$

Отметим, что здесь всюду предполагается выполнение условия устойчивости плоских слоев несжимаемых жидкостей в гравитационном поле: $\delta < 1$.

В приближении длинных волн, полагая, что $N_{1,2} = O(\beta)$, получаем решение уравнения (1.7) в виде

$$\omega \simeq -\frac{iN_L}{2} + c_0 k \left(1 - \frac{\beta k^2}{6} \frac{\varepsilon(1 + \varepsilon\delta)}{\varepsilon + \delta} \right)$$

$$c_0^2 = \frac{\varepsilon(1 - \delta)}{\varepsilon + \delta}, \quad N_L = \frac{\varepsilon N_2 + \delta N_1}{\varepsilon + \delta}$$

а для коротких волн ($k\sqrt{\beta} \gg \max(1, \beta(N_2 + \delta N_1)^2/4(1 - \delta^2))$, $\beta \sim 1$) находим

$$\omega \approx -i \frac{N}{2} + \left(\frac{1 - \delta}{1 + \delta} k \right)^{1/2}, \quad N = \frac{N_2 + \delta N_1}{1 + \delta} \quad (1.10)$$

В общем случае из (1.8) видно, что декремент затухания волн ω_{im} существенно зависит от волнового числа k . Характер этой зависимости определяется знаком величины $\Delta = (N_1 - N_2)(1 - \varepsilon)$. Если параметры сред таковы, что $\text{sgn}(\Delta) = -1$, то функция $f = 2\omega_{\text{im}}$ возрастает с ростом k от N_L до N , а при $\text{sgn}(\Delta) = +1$ $f(k)$ убывает в тех же пределах. Ясно, что в первом случае быстрее затухают короткие волны, а во втором — длинные.

2. Изучение нелинейных волн в рассматриваемой системе проведем для случая, когда стенки канала отсутствуют и жидкости неограниченны в направлениях $z \rightarrow \pm\infty$. При этом в постановке задачи (1.1)–(1.4) вместо условий непротекания (1.4) имеем

$$\varphi_1 \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty; \quad \varphi_2 \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty \quad (2.1)$$

а дисперсионное соотношение для линейных волн принимает вид (1.10).

Нелинейные периодические волны на границе раздела двух непроводящих жидкостей рассматривались Найфе [9]. Было показано, что дисперсионное соотношение для волн конечной амплитуды имеет вид

$$\omega = \omega_r + \alpha^2 \Omega, \quad \omega_r^2 = \frac{(1 - \delta)k}{1 + \delta}$$

$$\Omega = \frac{\omega_r k^2 (1 + \delta^2)}{2(1 + \delta)^3}$$

При наличии электропроводности и приложенного магнитного поля разложения типа Стокса [9] для искомых функций, удовлетворяющих (1.1)–(1.3), (2.1), приводят к аналогичному результату, но при этом

$$\omega \simeq -i \frac{N}{2} + \omega_r + \alpha^2 \Omega \quad (2.2)$$

где N определено в (1.10).

Допустим, что волновое число k содержит малое возмущение k_1 относительно некоторого постоянного значения k_0 , и разложим дисперсион-

ное соотношение (2.2) в ряд относительно k_0 , сохраняя члены второго порядка малости по возмущениям волнового числа и нелинейности [10, 11]. Тогда получим, что возмущения частоты ω_1 и волнового числа k_1 удовлетворяют уравнению

$$\omega_1 \simeq -i \frac{N}{2} + \frac{\omega_0}{2k_0} k_1 - \frac{\omega_0}{8k_0^2} k_1^2 + \frac{\alpha^2 \omega_0 k_0^2}{2} \rho \quad (2.3)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k_0(1-\delta)}{1+\delta}, \quad \rho = \frac{1+\delta^2}{(1+\delta)^3}$$

Воспользуемся эвристическим подходом [11] и заменим в (2.3) переменные ω_1 и k_1 операторами: $\omega_1 \rightarrow i\partial/\partial t$, $k_1 \rightarrow -i\partial/\partial x$. Таким образом, находим, что эволюция периодических волновых пакетов в рассматриваемой системе описывается возмущенным уравнением Шредингера

$$i(A_t + c_{g0} A_x) - \frac{\omega_0}{8k_0^2} A_{xx} - \frac{\omega_0 k_0^2 \rho}{2} A |A|^2 = -i \frac{N}{2} A \quad (2.4)$$

где $c_{g0} = \partial\omega_0/\partial k_0$ — групповая скорость несущей волны. Отметим, что здесь $\partial\omega/\partial\alpha^2 > 0$, $\partial^2\omega/\partial k^2 < 0$ и, следовательно, периодические волны, описываемые уравнением (2.3), неустойчивы относительно модуляций и могут приводить к образованию солитонов. С помощью замены переменных $\xi = x - c_{g0}t$, $\tau = \omega_0 t / 8k_0^2$, $q = 2k_0^2 \sqrt{\rho} A$ уравнение (2.4) приводится к каноническому виду

$$iq_\tau - q_{\xi\xi} - q|q|^2 = -iN\theta q, \quad \theta = \frac{4k_0^2}{\omega_0} \quad (2.5)$$

При $N=0$ периодическое решение уравнения (2.5) записывается следующим образом:

$$q = F(\xi) \exp(i\gamma^2 \tau) \quad (2.6)$$

$$F(\xi) = f_1 \operatorname{dn} \left(f_1 \frac{\xi}{\sqrt{2}}, m \right), \quad m = \frac{f_1^2 - f_2^2}{f_1^2}$$

$$f_{1,2}^2 = -\gamma^2 \pm \sqrt{\gamma^4 - 2f_0}, \quad f_0 = \text{const}$$

где dn — эллиптическая функция Якоби. При $m=1$ ($f_2=0$) решение (2.6) приводится к солитонному виду

$$q = a \operatorname{sech}(a\xi/\sqrt{2}) \exp(-ia^2\tau/2) \quad (2.7)$$

Точное решение возмущенного уравнения Шредингера (2.5) в настоящее время не найдено. Следуя [12], построим его асимптотическое решение при $N \ll 1$, причем в качестве невозмущенного решения для простоты выберем частный случай решения (2.6), когда $m=1$, т. е. $f_2=0$.

Итак, пусть решение невозмущенного уравнения (2.5) имеет вид (2.7). Решение возмущенного уравнения представляется в аналогичном виде, но предполагается, что $a=a(T)$, где $T=N\tau$. Тогда, подставляя (2.7) в (2.5), раскладывая функцию q в ряд по степеням N и учитывая условие отсутствия секулярного поведения у функций первого приближения [12], находим, что зависимость $a(T)$ определяется формулой

$$a(T) = a_0 \exp(-2\theta T) \quad (2.8)$$

Из (2.7), (2.8) следует, что наличие эффектов МГД-взаимодействия приводит к уменьшению амплитуды и частоты огибающей пуга волн, т. е. по мере распространения волновой пакет растягивается и затухает. Отметим, что этот результат остается справедливым и для периодических движений, описываемых функцией (2.6) при $0 < m < 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кирко И. М.* Жидкий металл в электромагнитном поле. М.; Л.: Энергия, 1964. 160 с.
2. *Hofman M.* Nonlinear waves on the free surface of an electrically conducting liquid // Wave motion. 1983. № 5. P. 115–124.
3. *Корсунский С. В.* Распространение поверхностных гравитационных волн в слое электропроводной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 4. С. 173–175.
4. *Данов К. Д., Рудерман М. С.* Нелинейные волны на мелкой воде в присутствии горизонтального магнитного поля // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 5. С. 110–115.
5. *Корсунский С. В.* Нелинейные волны на поверхности идеально проводящей жидкости в горизонтальном магнитном поле // Магнит. гидродинамика. 1989. № 3. С. 48–52.
6. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. М.: Мир, 1981. Т. 1. 480 с.; Т. 2. 365 с.
7. *Рудерман М. С.* Нелинейные внутренние волны в жидкости бесконечной глубины в присутствии горизонтального магнитного поля // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 6. С. 65–72.
8. *Kant R., Malik S. K.* Nonlinear waves in superposed magnetic fluids // Phys. Fluids. 1985. V. 28. № 12. P. 3534–3537.
9. *Nayfeh A. H.* Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interfaces // Trans. ASME: Ser. E. J. Appl. Mech. 1976. V. 43. № 4. P. 584–588.
10. *Юэн Г. С., Лэйк Б. М.* Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде. М.: Мир, 1987. 179 с.
11. *Корпел А., Банерджи П. П.* Эвристический подход к нелинейным волновым уравнениям с дисперсией и к решениям солитонного типа // ТИИЭР. 1984. Т. 72. № 9. С. 6–30.
12. *Абловиц М. Дж., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 478, [2] с.

Киев

Поступила в редакцию
4.X. 1989