

УДК 532.526.2

© 1990 г.

ВИК. В. СЫЧЕВ

**О ТЕЧЕНИИ ВБЛИЗИ ЗАДНЕЙ ОКОНЕЧНОСТИ ТОНКОГО
ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА**

Рассмотрено стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса около тела вращения конечной длины, радиус которого по порядку величины совпадает с толщиной пограничного слоя. Исследована структура пограничного слоя в окрестности задней оконечности в предположении, что она имеет степенную форму, а значения показателя степени $n \geq 1/2$. Получено также решение для ближнего следа.

Асимптотическая структура плоских ламинарных течений при больших числах Рейнольдса ($R \rightarrow \infty$) в окрестности задних кромок тонких тел к настоящему времени изучена достаточно полно (см. [1]). Исследование соответствующих осесимметричных течений находится пока в начальной стадии. В единственной на эту тему работе [2] было рассмотрено течение несжимаемой жидкости около тела с радиусом порядка $R^{-1/2}$ (т. е. порядка толщины пограничного слоя), имеющего кормовую часть степенной формы. При значениях показателя степени $0 < n < 1/4$ была исследована структура пограничного слоя на теле и показано, что такое течение сопровождается отрывом потока. При $1/4 < n < 1/2$ наряду с течением в пограничном слое была изучена структура ближнего следа, а также показано, что имеет место переход от обтекания с локальными зонами отрыва ($1/4 < n < 1/3$) к безотрывному ($1/3 < n < 1/2$). (Для случая $n = 1/4$ требуется отдельное рассмотрение.) Настоящая работа посвящена изучению течения в пограничном и ближнем следе при $n \geq 1/2$.

1. Рассмотрим стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости около тонкого тела вращения с продольным размером l , расположенного в однородном набегающем потоке под нулевым углом атаки. Введем следующие обозначения. Через lx, lr, θ обозначим цилиндрические координаты, через u_∞, v_∞ и $p_\infty + \rho u_\infty^2$ — соответствующие проекции вектора скорости и давление. Число Рейнольдса $R = u_\infty l / \nu$. Здесь u_∞, p_∞ — скорость и давление в набегающем потоке, ρ — плотность среды и ν — коэффициент кинематической вязкости. Начало системы координат будем считать совпадающим с задней оконечностью тела, а ось x — с осью симметрии течения.

Пусть радиус тела есть величина порядка $R^{-1/2}$. При $R \rightarrow \infty$ течение вблизи поверхности тела и следе за ним описывается уравнениями осесимметричного пограничного слоя Прандтля. Заметим, что для тел с радиусами, большими (по порядку величины) $R^{-1/2}$, уравнения пограничного слоя с помощью преобразования Степанова — Манглера [3, 4] сводятся к не отличающимся от уравнений плоского пограничного слоя.

В качестве независимых переменных будем использовать x и $y = r^2/2$. После введения функции тока $l^2 u_\infty \psi$: $\psi_y = u, \psi_x = -rv$, уравнение пограничного слоя вместе с условием прилипания на поверхности тела ($Y = Y_w(x)$), обычными условиями на оси симметрии следа ($\partial u / \partial r = v = 0$ при $r = 0, x > 0$), а также с условием на внешней границе имеют вид

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial Y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = 2Y \frac{\partial^3 \Psi}{\partial Y^3} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}$$

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0 \quad (Y = Y_w(x), -1 \leq x \leq 0) \quad (1.1)$$

$$\Psi = 0, \quad \left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right| < \infty \quad (Y = 0, x > 0)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \rightarrow 1 \quad (Y \rightarrow \infty)$$

Здесь $Y_w = r_w^2/2$, где $R^{-1/2}r_w(x)$ — форма поверхности тела, и $Y = Ry$, $\Psi = R\psi$. Действие градиента давления в силу малости радиуса тела проявляется лишь в следующем приближении.

Предположим, что тело имеет заднюю оконечность степенной формы, например $r_w = \sqrt{2a}(-x)^n(x+1)^{1/2}$, и тогда при $x \rightarrow -0$

$$r_w = \sqrt{2a}(-x)^n + o(|x|^n), \quad Y_w = a(-x)^{2n} + o(|x|^{2n}) \quad (1.2)$$

В [2] было получено решение задачи (1.1), (1.2) при $x \rightarrow -0$, когда $0 < n < 1/2$. Перейдем к построению решения при $n \geq 1/2$.

2. Прежде всего приведем некоторые результаты, полученные в [2]. При $1/4 < n < 1/2$ пограничный слой при $x \rightarrow -0$ имеет двухслойную структуру. Это область, прилегающая к поверхности тела («нелинейный вязкий» подслои), где $Y = O(|x|^{2n})$, и основная часть пограничного слоя, где $Y = O(1)$. Соответствующие асимптотические представления имеют вид

$$\Psi = (-x)f_0^*(t) + o(|x|), \quad t = \frac{Y}{a(-x)^{2n}} \quad (2.1)$$

$$\Psi = \Psi_0^*(Y) + O(|x|^{2n})$$

Решение уравнения для функции $f_0^*(t)$, удовлетворяющее условию прилипания $f_0^*(1) = f_0^{*'}(1) = 0$ и растущее при $t \rightarrow \infty$ не быстрее, чем некоторая степень t , не существует, если $n \geq 1/2$. Из сращения разложений (2.1) следует, что

$$\Psi_{0Y}^* = O(Y^{(1-2n)/2n})$$

при $Y \rightarrow 0$. Таким образом, чем ближе значения n к $1/2 - 0$, тем медленнее стремится к нулю величина продольной составляющей вектора скорости при $Y \rightarrow 0$. На основании этих результатов следует ожидать, что при $n \geq 1/2$ пограничный слой имеет уже не двухслойную структуру при $x \rightarrow -0$ и продольная составляющая Ψ_Y в области, где $Y = O(1)$, стремится к нулю медленнее, чем любая степень Y при $Y \rightarrow 0$.

Решение задачи (1.1), (1.2) при $n \geq 1/2$ начнем с рассмотрения пристеночной области, где $Y = O(|x|^{2n})$ при $x \rightarrow -0$ (обл. 3, фиг. 1). Для удовлетворения условию прилипания необходимо, чтобы эта область была «вязкой» и инерционные члены в уравнении (1.1) в главном приближении должны быть внепорядковыми. Иначе имеет место разложение (2.1) и несуществование решения для $f_0^*(t)$ при $n \geq 1/2$, [2].

Будем искать решение в виде (обл. 3)

$$\Psi = \alpha_0(x)g_0(t) + \alpha_1(x)g_1(t) + O(\alpha_2(x)), \quad t = \frac{Y}{a(-x)^{2n}} \quad (2.2)$$

При подстановке этого разложения в (1.1), (1.2) на основании сказанного будем полагать, что $\alpha_0 < O(|x|^{2n})$, $\alpha_0' < O(|x|^{2n-1})$. Тогда для коэффициента в главном члене приходим к следующему уравнению:

$$tg_0''' + g_0'' = 0 \quad (2.3)$$

Вид функции $\alpha_1(x)$ найдем из условия, что уравнение для $g_1(t)$ содержит левую часть уравнения (1.1) (инерционные члены), которая, оче-

видно, выражается через $g_0(t)$. В результате получим

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_0^2}{(-x)}, \quad \alpha_0' = \lambda_0 \frac{\alpha_0}{(-x)} + O(\beta_0(x))$$

$$2tg_1''' + 2g_1'' = (2n + \lambda_0)g_0'^2 - \lambda_0 g_0 g_0'', \quad \lambda_0 = \text{const} \quad (2.4)$$

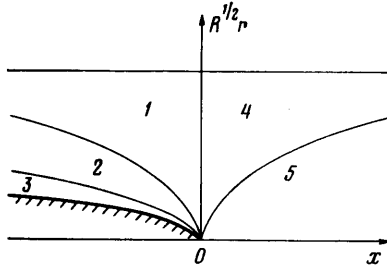
Решение уравнения (2.3), удовлетворяющее условию прилипания $g_0(1) = g_0'(1) = 0$, есть

$$g_0 = A_0(t \ln t - t + 1), \quad A_0 = \text{const} \quad (2.5)$$

Решение уравнения (2.4) при тех же краевых условиях также может быть легко получено и тогда при $t \rightarrow \infty$

$$g_1 = 1/4(2n + \lambda_0)A_0^2 t^2 (\ln t)^2 - 1/2(5n + 3\lambda_0)A_0^2 t^2 \ln t + 1/4(17n + 12\lambda_0)A_0^2 t^2 + O(t(\ln t)^2) \quad (2.6)$$

Функции $\alpha_2(x)$, $\beta_0(x)$ и постоянная λ_0 остаются пока произвольными. Таким образом, в области \mathcal{Z} в главном приближении имеет место стоксовское течение, в то время как в основной части оно локально невязкое.



Фиг. 1

Это указывает на необходимость введения промежуточной области 2, в которой бы осуществлялся баланс между инерционными и «вязкими» членами в уравнении (1.1). Кроме того, поскольку в основной части пограничного слоя, как уже отмечалось, при $Y \rightarrow 0$ продольная составляющая Ψ_Y стремится к нулю медленнее любой степени Y , то в области 2 $\Psi_Y = O(\sigma^{-1})$, причем $\sigma(x): |x|^\beta < O(\sigma^{-1}) < 1$ при $x \rightarrow -0$ и любом $\beta > 0$.

Поэтому, исходя из баланса инерционных и «вязких» членов в уравнении (1.1), представим решение в области 2 в виде

$$\Psi = (-x) [f_0(\eta) + \varepsilon_1(x)f_1(\eta) + \varepsilon_2(x)f_2(\eta) + O(\varepsilon_3(x))], \quad \eta = \frac{Y}{a|x|\sigma(x)} \quad (2.7)$$

При подстановке этого разложения в (1.1) будем полагать

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \kappa_0 \frac{\varepsilon_1}{(-x)}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_1^2, \quad \frac{(-x)\varepsilon_1'}{\varepsilon_1^2} = \pi_0 + o(1) \quad (2.8)$$

где $\kappa_0 = \text{const}$, $\pi_0 = \text{const}$. Такой выбор функций сравнения $\varepsilon_1(x)$ и $\varepsilon_2(x)$ приводит к появлению дополнительных членов в уравнениях для $f_1(\eta)$ и $f_2(\eta)$ (см. (2.9)). Последнее, как будет показано, дает решения этих уравнений, которые обеспечивают сращивание (2.7) с разложениями в областях 1 и 3.

В результате подстановки (2.7), (2.8) в (1.1) получаем

$$2\eta f_0''' - (f_0 - 2)f_0'' = 0$$

$$2\eta f_1''' - (f_0 - 2)f_1'' - f_0'' f_1 = -\kappa_0 f_0'^2$$

$$2\eta f_2''' - (f_0 - 2)f_2'' - f_0'' f_2 = f_1 f_1'' + (\pi_0 - 2\kappa_0) f_0' f_1' - \pi_0 f_0'' f_1$$

Решение первого из этих уравнений, удовлетворяющее условию $f_0(0) = 0$ и растущее при $\eta \rightarrow \infty$ не быстрее, чем некоторая степень η , имеет вид: $f_0 = c_0 \eta$, $c_0 = \text{const}$. Тогда решение второго уравнения (2.9), удовлетворяющее тем же условиям, есть

$$f_1 = \kappa_0 c_0 \eta \ln \eta + c_1 \eta, \quad f_0 = c_0 \eta, \quad c_1 = \text{const} \quad (2.10)$$

Без ограничения общности положим $\kappa_0 = 1$. Наконец, с учетом (2.10) и при прежних краевых условиях находим решение последнего уравнения (2.9)

$$f_2'' = d_0 c_0^{-1} \eta^{-1} [Ei(-c_0 \eta / 2) e^{c_0 \eta / 2} - \ln \eta] - d_1 c_0^{-1} \eta^{-1} \\ d_0 = c_0^2 (\pi_0 - 1), \quad d_1 = c_0 \pi_0 (c_0 + c_1) - c_0 (c_1 + 2c_0) \quad (2.11)$$

$$Ei(-q_0 \eta) = - \int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-q_0 \eta}}{\eta} d\eta$$

При $\eta \rightarrow 0$

$$f_2 = D_1 \eta \ln \eta + D_1^* \eta + \frac{1}{4} d_0 \eta^2 \ln \eta + \frac{1}{4} (D_2 - \frac{5}{2} d_0) \eta^2 + O(\eta^3 \ln \eta), \\ D_1^* = \text{const} \quad (2.12)$$

$$D_1 = c_0^{-1} (\gamma_0 d_0 - d_1), \quad D_2 = \gamma_0 d_0, \quad \gamma_0 = \ln(c_0 / 2) + C$$

Здесь и ниже $C = 0,5772 \dots$ — постоянная Эйлера. Используя выражения (2.4)–(2.6) и (2.8), (2.10), (2.12), произведем сращивание разложений (2.2) и (2.7) при $t \rightarrow \infty$ и $\eta \rightarrow 0$. В результате

$$\varepsilon_1 = (\ln \delta)^{-1}, \quad \delta = (-x)^{1-2n} \sigma, \quad \alpha_0 = \frac{(-x)}{\delta \ln \delta} + O\left(\frac{(-x)}{\delta (\ln \delta)^2}\right) \quad (2.13)$$

$$c_0 = A_0, \quad c_1 = D_1 - c_0, \quad \pi_0 = 1 - 2n, \quad \lambda_0 = -2n$$

Из первых двух выражений (2.13) и первого выражения (2.8) находим, что

$$\sigma = \exp(\sqrt{2\mu}), \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \quad \left(n = \frac{1}{2}\right) \\ \sigma = \mu^k + k^3 \mu^{k-1} \ln \mu + k^3 \mu^{k-1} + O(\mu^{k-2} (\ln \mu)^2) \quad (2.14) \\ \varepsilon_1 = \frac{k}{\mu} - \frac{k^3 \ln \mu}{\mu^2} + O\left(\frac{(\ln \mu)^2}{\mu^3}\right) \quad \left(n > \frac{1}{2}\right) \\ k = \frac{1}{2n-1}, \quad \mu = -\ln|x|$$

Рассмотрение следующих членов в разложениях (2.2) и (2.7) позволяет определить значения функций сравнения

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_0^3}{(-x)^2}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_1^3, \quad \beta_0 = \frac{\alpha_0^2}{(-x)^2}$$

Из построенного решения находим, что поверхностное трение ($\tau_w = \sqrt{2Y} \Psi_{Y,Y}$ при $Y = Y_w(x)$) при подходе к задней оконечности тела неогра-

ниченно возрастает

$$\tau_w = \frac{A_0}{a^{1/2}} \frac{e^{-\sqrt{2}\mu}}{\sqrt{-x}\mu} [1 + O(\mu^{-1/2})] \quad \left(n = \frac{1}{2} \right)$$

$$\tau_w = \frac{\sqrt{2}A_0}{(2n-1)a^{1/2}} \frac{1}{(-x)^n \mu^{k+1}} \left[1 + O\left(\frac{\ln \mu}{\mu}\right) \right] \quad \left(n > \frac{1}{2} \right)$$

Причем при $n=1/2$ значение постоянной $A_0=c_0=2 \exp(1-C)=3,0524\dots$ Это непосредственно следует из выражений для постоянных в (2.11)–(2.13). Значение c_1 здесь остается произвольным и определяется из решения задачи (1.1) в целом. При $n>1/2$, наоборот, c_0 – произвольно, но $c_1=2nc_0(1-\gamma_0)/(1-2n)$. Такой характер поведения трения согласуется с полученным в [2]: для $1/4 < n < 1/2$, $\tau_w = A_0^* (-x)^{1-3n} + \dots$ и значение $A_0^* = O(\exp(-(1-2n)^{-1}))$ при $n \rightarrow 1/2 - 0$.

Обратимся теперь к рассмотрению основной части пограничного слоя (обл. 1). Здесь продольная составляющая вектора скорости в главном приближении при $x \rightarrow -0$ сохраняется вдоль поверхностей тока. Поэтому будем искать решение в виде

$$\Psi = \Psi_0(Y) + v_1(x) \Psi_1(Y) + (-x) \Psi_2(Y) + v_3(x) \Psi_3(Y) + o(v_3(x)),$$

$$\Psi_0'(\infty) = 1 \quad (2.15)$$

Внося это разложение в (1.1) при условиях, что $v_1' \rightarrow \infty$, $v_1 v_1' < O(1)$, $v_1 v_1' < O(v_3') < 1$, и проводя интегрирование, получим

$$\Psi_1 = L_1 \Psi_0', \quad \Psi_2 = [L_2 + 2J_0(Y)] \Psi_0', \quad \Psi_3 = L_3 \Psi_0' \quad (2.16)$$

$$J_0 = \int_x^\infty \left(\frac{Y \Psi_0''' + \Psi_0''}{\Psi_0'^2} \right) dY, \quad L_j = \text{const}; \quad j=1, 2, 3$$

Из решения (2.11) для третьего члена разложения (2.7) следует, что при $\eta \rightarrow \infty$

$$f_2 = -\frac{d_0}{2c_0} \eta (\ln \eta)^2 + \frac{(d_0 - d_1)}{c_0} \eta \ln \eta + O(\eta)$$

Используя это выражение вместе с (2.10), (2.16), (2.13), (2.14), произведем сращивание разложений (2.7), (2.15) для областей 2 и 1 при $\eta \rightarrow \infty$ и $Y \rightarrow 0$. В результате получим, что для $n > 1/2$ при $Y \rightarrow 0$

$$\Psi_0 = \frac{B_0 Y}{\chi^k} + \frac{B_1 Y \ln \chi}{\chi^{k+1}} + \frac{B_2 Y}{\chi^{k+1}} + O\left(\frac{Y (\ln \chi)^2}{Y^{k+2}}\right) \quad (2.17)$$

$$B_0 = \frac{c_0}{a}, \quad B_1 = -(k+1)k^2 B_0, \quad B_2 = \frac{k}{a} (-c_0 \ln a + c_1) - k^3 B_0$$

$$\chi = -\ln Y$$

При этом выражения для функций сравнения в (2.15) и постоянных L_j имеют вид

$$v_1 = (-x) \mu^{k-1} [1 + O(\mu^{-1} (\ln \mu)^2)]$$

$$L_1 = -\frac{2k(k+1)}{B_0(k-1)} \quad (k > 1, n < 1) \quad (2.18)$$

$$v_1 = (-x) \ln \mu, \quad v_3 = (-x) \mu^{-1} (\ln \mu)^2$$

$$L_1 = -4B_0^{-1} \quad (k=1, n=1)$$

$$v_3 = (-x) \mu^{k-1} [1 + O(\mu^{-1} (\ln \mu)^2)]$$

$$L_1=0, \quad L_2=-2J_0(0), \quad L_3=\frac{-2k(k+1)}{B_0(k-1)} \quad (k < 1, n > 1)$$

Наконец, когда $n=1/2$

$$\Psi_0=b_0Ye^{-\sqrt{2x}}+b_1\frac{Ye^{-\sqrt{2x}}}{\sqrt{2\chi}}+O\left(\frac{Ye^{-\sqrt{2x}}}{2\chi}\right) \quad (Y \rightarrow 0)$$

$$b_0=\frac{c_0}{ea}, \quad b_1=\frac{1}{ea}(-c_0 \ln a + c_1) - \frac{b_0}{2}, \quad v_1=\frac{(-x)e^{\sqrt{2\mu}}}{\sqrt{2\mu}}, \quad L_1=-\frac{2}{b_0e} \quad (2.19)$$

В полученном таким образом решении, как и ожидалось, продольная составляющая вектора скорости при $Y \rightarrow 0$ стремится к нулю «медленно»

$$\Psi_Y=O(\chi^{-k}) \quad (n > 1/2), \quad \Psi_Y=O(\exp(-\sqrt{2\chi})) \quad (n=1/2),$$

где $\chi=-\ln Y, k=(2n-1)^{-1}$

Высказанное в [2] предположение, что при $n > 1/2$ в области $2 Y=O(|x|)$ не подтвердилось (см. (2.7), (2.14)).

Перейдем к рассмотрению течения в ближнем следе за телом.

3. Вследствие малости изменений давления в окрестности сечения $x=0$ профиль скорости $\Psi_0'(Y)=\Psi_Y(-0, Y)$, который вырабатывается в пограничном слое и определяется из решения задачи (1.1), представляет собой начальный профиль для основной части следа. Поэтому при $x \rightarrow +0$ решение в области 4 (фиг. 1) запишем в виде

$$\Psi=\Psi_0(Y)+v_1^*(x)\Psi_1^*(Y)+x\Psi_2^*(Y)+v_3^*(x)\Psi_3^*(Y)+O(v_3^*(x)) \quad (3.1)$$

При тех же условиях для функций сравнения в (3.1), что и в (2.15), после подстановки этого разложения в (1.1) получим

$$\Psi_1^*=L_1^*\Psi_0', \quad \Psi_2^*=-[L_2^*+2J_0(Y)]\Psi_0' \quad (3.2)$$

$$\Psi_3^*=L_3^*\Psi_0', \quad L_j^*=\text{const}; \quad j=1, 2, 3$$

где $J_0(Y)$ определяется из (2.16).

Условия на оси симметрии следа указывают на необходимость введения при $x \rightarrow +0$ области 5, в которой, как обычно [5], осуществляется баланс инерционных и «вязких» членов в уравнении (1.1). Поэтому, исходя из тех же соображений, что и при анализе течения в области 2, и используя выражения (2.7), (2.8), будем искать решение в этой области в виде разложения

$$\Psi=x[F_0(\eta)+\varepsilon_1(x)F_1(\eta)+\varepsilon_1^2F_2(\eta)+O(\varepsilon_1^3)], \quad \eta=\frac{Y}{ax\sigma(x)} \quad (3.3)$$

где $\varepsilon_1(x)$ и $\sigma(x)$ определяются выражениями (2.14). После подстановки (3.3) в (1.1) приходим к следующим уравнениям:

$$2\eta F_0''' + (F_0+2)F_0''=0, \quad 2\eta F_1' + (F_0+2)F_1''+F_0''F_1=F_0' \quad (3.4)$$

$$2\eta F_2''' + (F_0+2)F_2''+F_0''F_2=-F_1F_1''+(2n+1)F_0'F_1'-(2n-1)F_0''F_1$$

Из условий на оси симметрии в (1.1) имеем $F_i(0)=0, |F_i''(0)| < \infty; i=0, 1, 2$. Решение первого уравнения (3.4), удовлетворяющее этим условиям, есть $F_0=c_0^*\eta, c_0^*=\text{const}$. Единственность решения следует из условия его регулярности при $\eta \rightarrow 0$. Действительно, если в некоторой окрест-

ности $\eta=0$ представить решение в виде $F_0 = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \circ \eta^m$, то в результате подстановки в (3.4) находим, что $c_m \circ = 0$ при $m > 1$.

Решения остальных уравнений (3.4) при тех же условиях (регулярные в нуле) имеют вид

$$\begin{aligned}
 F_1 &= c_1^* \eta + c_0^* \eta [\ln \eta - \text{Ei}(-q_0 \eta)] + 2(1 - e^{-q_0 \eta}) \\
 F_2'' &= \eta^{-1} e^{-q_0 \eta} \Phi_2(\eta), \quad \Phi_2 = \frac{nc_0^{*2}}{q_0} [e^{q_0 \eta} \ln \eta - \text{Ei}(q_0 \eta)] + \\
 &+ \frac{d_1^*}{c_0^*} e^{q_0 \eta} - \frac{nc_0^{*2}}{q_0} [e^{q_0 \eta} \text{Ei}(-q_0 \eta) - \ln \eta - (\ln q_0 + C)] - \\
 &- c_0^* \text{Ei}(q_0 \eta) + 2c_0^* \ln \eta + \frac{c_0^{*2}}{2} \eta \ln \eta + \frac{c_0^* (c_1^* - c_0^*)}{2} \eta - \\
 &- \frac{c_0^{*2}}{2} [\eta \text{Ei}(-q_0 \eta) + q_0^{-1} e^{-q_0 \eta}] - c_0^* \text{Ei}(-q_0 \eta) + c_0^* \left[-2n(c_1^* + 1) + \right. \\
 &\left. + \ln \frac{c_0^*}{2} + C \right] \quad d_1^* = (2n+1)c_0^{*2} + 2nc_0^* c_1^*, \quad q_0 = \frac{c_0^*}{2}
 \end{aligned}$$

Тогда при $\eta \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 F_0 &= c_0^* \eta, \quad F_1 = c_0^* \eta \ln \eta + c_1^* \eta + 2 + O(\eta^{-1} e^{-q_0 \eta}) \\
 F_2 &= nc_0^* \eta (\ln \eta)^2 + (c_0^* + 2nc_1^*) \eta \ln \eta + O(\eta)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Используя выражения (3.2), (3.5) и (2.14), а также разложения (2.17), (2.19) для $\Psi_0(Y)$, произведем сращивание разложений (3.1) и (3.3) при $Y \rightarrow 0$ и $\eta \rightarrow \infty$. В результате получаем

$$\begin{aligned}
 c_0^* &= c_0, \quad c_1^* = c_1 \\
 v_1^* &= x \mu^{k-1} [1 + O(\mu^{-1} (\ln \mu)^2)] \\
 L_1^* &= \frac{2k(k+1)}{B_0(k-1)} + \frac{2k}{B_0} \quad (k > 1, n < 1) \\
 v_1^* &= x \ln \mu, \quad v_3^* = x \mu^{-1} (\ln \mu)^2, \quad L_1^* = 4B_0^{-1} \quad (k=1, n=1) \\
 v_3^* &= x \mu^{k-1} [1 + O(\mu^{-1} (\ln \mu)^2)] \\
 L_1^* &= 0, \quad L_2^* = -2J_0(0), \quad L_3^* = \frac{2k(k+1)}{B_0(k-1)} + \frac{2k}{B_0} \quad (k < 1, n > 1) \\
 v_1^* &= \frac{x}{\sqrt{2\mu}} e^{\sqrt{2\mu}}, \quad L_1^* = \frac{4}{b_0 e} \quad \left(n = \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Из (3.3) находим разложение для скорости на оси симметрии при $x \rightarrow +0$

$$\begin{aligned}
 \Psi_Y|_{Y=0} &= \frac{c_0^*}{a} e^{-\sqrt{2\mu}} + O\left(\frac{e^{-\sqrt{2\mu}}}{\sqrt{2\mu}}\right) \quad \left(n = \frac{1}{2} \right) \\
 \Psi_Y|_{Y=0} &= \frac{c_0^*}{a} \mu^{-k} + O\left(\frac{\ln \mu}{\mu^{k+1}}\right) \quad \left(n > \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Таким образом, в отличие от решения для плоских течений [5] и осесимметричного течения при $1/4 < n < 1/2$ [2], где в ближнем следе соответственно $\Psi_Y(x, 0) = O(x^{1/2})$ и $\Psi_Y(x, 0) = O(x^{1-2n})$, в данном случае скорость на оси симметрии стремится к нулю медленнее любой степени x .

4. Особое поведение полученного решения при $|x| \rightarrow 0$ (см. (2.15), (2.18)) указывает на его непригодность в некоторой малой окрестности задней оконечности тела. Определим характерный размер этой области.

В соответствии с теорией малых возмущений обтекания тонких осесимметричных тел [6, 7] в области внешнего потенциального потока

$$\begin{aligned} \psi &= y + R^{-1} \psi_1(x, y) + o(R^{-1}) \\ p &= R^{-1} p_1(x, y) + o(R^{-1}) \\ y \rightarrow 0: \quad \psi_1 &= 2S(x) + O(y \ln y), \quad p_1 = -S''(x) \ln y + O(1) \end{aligned}$$

Поэтому в пограничном слое, где $y = R^{-1} Y$

$$\begin{aligned} R\psi &= \Psi(x, Y) + R^{-1} \ln R \Psi^*(x, Y) + O(R^{-1}) \\ p &= R^{-1} \ln R P^*(x, Y) + O(R^{-1}) \\ P^* &= S''(x), \quad \Psi \rightarrow Y + 2S(x) + o(1) \quad (Y \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь $\Psi(x, Y)$ – решение задачи (1.1), а второй член в разложении для ψ обусловлен изменениями давления. При $x \rightarrow -0$ разложение функции $S(x)$ определяется на основании (2.15), (2.16), (2.18)

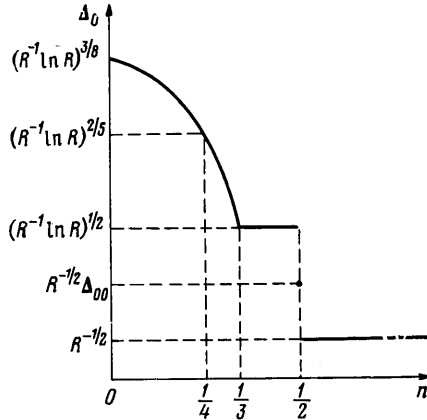
$$2S(x) = S_{00} + v_1(x)L_1 + (-x)L_2 + v_3(x)L_3 + o(v_3(x)); \quad S_{00} = \text{const}$$

Тогда в основной части пограничного слоя при $x \rightarrow -0$

$$\Psi^* = S''(x) \Phi_1(Y) + o(S''(x)), \quad \Phi_1 = \left[M_1 - \int \frac{dY}{\Psi_0'^2} \right] \Psi_0', \quad M_1 = \text{const} \quad (4.2)$$

Это представление следует из уравнения для функции $\Psi^*(x, Y)$ и разложения для $P^* = S''(x)$ при $x \rightarrow -0$. Заметим, что при $x \rightarrow +0$ на основании тех же соображений получается аналогичное представление.

Вспомогательное полученное выражение для $S(x)$ и (2.15), (4.2), заключаем, что разложение (4.1) при $Y = O(1)$ становится несправедливым, когда $v_j(x) =$



Фиг. 2

$= O(R^{-1} \ln R v_j''(x))$. Здесь $j=1$ при $1/2 \leq n \leq 1$ и $j=3$ при $n > 1$. Если $x = O(\Delta_0)$ – характерный размер области неприменимости внешнего разложения, то из последнего выражения и (2.18), (2.19) для $v_j(x)$ находим, что

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= R^{-1/2} \quad (n > 1/2) \\ \Delta_0 &= R^{-1/2} \Delta_{00}, \quad \Delta_{00} = (\ln R)^{1/4} + \frac{\ln \ln R}{8(\ln R)^{3/4}} + O\left(\frac{(\ln \ln R)^2}{\ln R}\right) \quad \left(n = \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Таким образом, при $n > 1/2$ продольный размер этой области совпадает с толщиной пограничного слоя и поэтому при $x = O(\Delta_0)$, $Y = O(1)$ имеет место слабозвмущенное (относительно $\Psi_0(Y)$) течение, причем уже в главном приближении здесь существенно поперечное изменение давления.

На фиг. 2 схематически изображена зависимость Δ_0 от n . Значения Δ_0 при $n < 1/2$ заимствованы из работы [2], где было установлено, что

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= (R^{-1} \ln R)^{3/(8-2n)}, \quad 0 < n < 1/4 \\ \Delta_0 &= (R^{-1} \ln R)^{1/(4-8n)}, \quad 1/4 < n < 1/3 \\ \Delta_0 &= (R^{-1} \ln R)^{1/2}, \quad 1/3 < n < 1/2 \end{aligned}$$

Для значений $n > 1/2$ в [2] была приведена оценка $\Delta_0 = (R^{-1} \ln R)^{1/2}$. Однако в действительности, согласно полученным результатам, значения Δ_0 при $n \geq 1/2$ определяются выражениями (4.3).

В подслоях, являющихся продолжением областей 2 и 3, при $x = O(\Delta_0)$ действие градиента давления не будет сказываться в главных приближениях. Такая ситуация имеет место уже при $n > 1/3$ [2]. Следовательно, при всех $n > 1/3$ в области, где $x = O(\Delta_0)$, течение остается безотрывным. При $1/4 < n < 1/3$, как и для плоских течений [8, 9], действие градиента давления проявляется в пристеночной области в главном приближении и поэтому здесь возможно появление возвратных токов. В заключение заметим, что в области $x = O(\Delta_0)$ в свою очередь лежит последовательность вложенных подобластей. Такая ситуация [8–10] возникает всякий раз в задачах с разрывом в краевых условиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асимптотическая теория отрывных течений (под ред. В. В. Сычева). М.: Наука, 1987. 256 с.
2. *Bodonyi R. J., Smith F. T., Kluwick A.* Axisymmetric flow past a slender body of finite length // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1985. V. 400. № 1818. P. 37–54.
3. *Степанов Е. И.* Об интегрировании уравнений ламинарного пограничного слоя для движения с осевой симметрией // ПММ. 1947. Т. 11. Вып. 1. С. 203–204.
4. *Mangler W.* Zusammenhang zwischen ebenen und rotationssymmetrischen Grenzschichten in kompressiblen Flüssigkeiten // ZAMM. 1948. Bd. 28. H. 4. S. 97–103.
5. *Goldstein S.* Concerning some solutions of the boundary layer equations in hydrodynamics // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1930. V. 26. Pt. 1. P. 1–30.
6. *Adams M. C., Sears W. R.* Slender-body theory-review and extension // J. Aeronaut. Sci. 1953. V. 20. № 2. P. 85–98.
7. *Кочл Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 276 с.
8. *Messiter A. F.* Boundary-layer flow near the trailing edge of a flat plate // SIAM J. Appl. Math. 1970. V. 18. № 1. P. 241–257.
9. *Stewartson K.* On the flow near the trailing edge of a flat plate. II // Mathematika. 1969. V. 16. Pt 1. № 31. P. 106–121.
10. *Veldman A. E. P.* Boundary layer flow past a finite flat plate. Rijksuniv. Groningen, 1976. 131 p.

Москва

Поступила в редакцию
2.VIII.1989