МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1990

УДК 532.528

А. В. ЗУБЦОВ, Г. Г. СУДАКОВ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ТЕЧЕНИИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ЗАМЫКАНИЯ КАВЕРНЫ

Классической задачей теории струй [1] является нахождение характеристик течения в окрестности начала застойной зоны, которая возникает перед препятствием и в окрестности точки замыкания каверны, или нахождение закона расширения струй при $x\to\infty$. В случае плоских течений эта задача решена полностью: получен асимптотический закон расширения струй [1], а также счетное множество решений задачи о течении в окрестности начала застойной зоны или в точке замыкания [2, 3]

$$y=Cx^{1/2}+\ldots,\quad x\to\infty,\quad y=Cx^{n+1/2}+\ldots,\quad x\to 0,\quad n=1,2,\ldots \tag{1}$$

Это семейство решений является основой для построения более сложных моделей течений с учетом вязкости [4].

В случае пространственного осесимметричного течения установлен лишь закон расширения струй [1, 5]

$$r=Cx^{1/2}\ln^{-1/4}x+\ldots,\quad x\to\infty \tag{2}$$

и получено численное решение для течения идеальной жидкости с каверной, имеющей впереди точку возврата [6].

В настоящей работе получено счетное число собственных осесимметричных решений уравнений движения идеальной жидкости в окрестности точки замыкания каверны, включая и бесконечно удаленную точку. Это семейство решений аналогично известному семейству соответствующих плоских решений (1), (2).

Рассмотрим потенциальное течение идеальной жидкости, в которой возникает каверна с вершиной, расположенной в некоторой точке A. Введем декартову систему координат x, y, z, совместив ее начало с вершиной каверны. Будем предполагать, что в некотором приближении течение в малой окрестности точки A или же на достаточно большом удалении от нее вниз по потоку осесимметрично. Попытаемся найти асимптотические решения уравнения Эйлера, которые при $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\to 0$ или $R\to\infty$ соответствуют предполагаемой картине течения. Далее все составляющие скорости будем относить к величине модуля полной скорости на поверхности каверны.

Потенциал скорости и уравнение поверхности каверны представим в сферической системе координат R, β, α ($x=R\cos\beta$, $y=R\sin\beta\sin\alpha$, $z=R\sin\beta\cos\alpha$)

$$\varphi=R\cos\beta+\varphi_1(R,\beta),\qquad \Phi=R\sin\beta-f(R\cos\beta)=0$$

Функция φ_1 должна удовлетворять уравнению, являющемуся следствием уравнения Лапласа, и условиям непротекания и постоянства давления на поверхности каверны

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial\varphi_1}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\beta^2}+\frac{\operatorname{ctg}\beta}{R^2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}=0$$
$$\nabla\Phi\nabla(R\cos\beta+\varphi_1)=0,\qquad |\nabla(R\cos\beta+\varphi_1)|=1 \tag{3}$$

Необходимо также потребовать, чтобы функция φ_1 не имела особенностей в исследуемой области течения (вне каверны).

Показано, что попытка искать решение задачи (3) при $R\to\infty$ в виде асимптотического разложения по степеням координаты R не приводит к успеху [1]. Поэтому предположим, что при $|\ln R|\to\infty$ для функции φ_1 справедлива зависимость от R более общего вида

$$\varphi_1 \sim R^n g(t) G(t, \beta, n) \tag{4}$$

где n — собственное число задачи, $t=\ln R$. Будем считать, что при $|t|\to\infty$ функции $g(t)$, $G(t, \beta, n)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$G(t, \beta, n)=O(1), \quad 0<\beta\leqslant\pi$$
$$|\ln g|\to\infty, \quad |g^{(m+1)}(t)|\ll|g^{(m)}(t)|, \quad m=0, 1,\ldots \tag{5}$$

Из (3), (4) следует, что функция G удовлетворяет уравнению

$$\ddot{G}+\operatorname{ctg}\beta\,\dot{G}+\left[n(n+1)+(2n+1)\left(\frac{g'}{g}+\frac{G'}{G}\right)+\frac{g''}{g}+\frac{G''}{G}+2\frac{g'}{g}\frac{G'}{G}\right]G=0$$

$$(\ )^{\cdot}\equiv\frac{\partial}{\partial\beta}, \quad (\ )'\equiv\frac{\partial}{\partial t} \tag{6}$$

При $|t|\to\infty$ решение уравнения (6) можно представить в виде следующего асимптотического разложения:

$$G(t,\beta,n)=G_0(\beta,n)+\frac{g'}{g}G_1(\beta,n)+O\left(\left(\frac{g'}{g}\right)^2\right)+O\left(\left|\frac{g''}{g}\right|\right) \tag{7}$$

Нетрудно убедиться в том, что с точностью до членов порядка $O((g'/g)^2)+O(|g''/g|)$ функция $G_{01}=G_0+(g'/g)G_1$ удовлетворяет уравнению Лежандра

$$\ddot{G}_{01}+\operatorname{ctg}\beta\,\dot{G}_{01}+N(N+1)G_{01}=0, \quad N=n+\frac{g'}{g} \tag{8}$$

Решение уравнения (8) удобно представить через гипергеометрическую функцию F

$$G_{01}=C_1F\left(-\frac{N}{2},\frac{N+1}{2},\frac{1}{2},\cos^2\beta\right)+C_2\cos\beta F\left(\frac{1-N}{2},\frac{N+2}{2},\frac{3}{2},\cos^2\beta\right)$$

где C_1, C_2 — свободные коэффициенты, которые могут зависеть от переменной t.

При $\cos^2\beta\to1$ функция G_{01} имеет следующее асимптотическое разложение [7]:

$$G_{01}\sim a_1\left\{\left[\psi\left(-\frac{N}{2}\right)+\psi\left(\frac{1+N}{2}\right)\right]+\ln\sin^2\beta+\ldots\right\}+$$
$$+a_2\cos\beta\left\{\left[\psi\left(\frac{1-N}{2}\right)+\psi\left(\frac{2+N}{2}\right)\right]+\ln\sin^2\beta+\ldots\right\} \tag{9}$$
$$a_1=-C_1\frac{\Gamma(^1/_2)}{\Gamma(-N/2)\Gamma(^1/_2(N+1))}, \quad a_2=-C_2\frac{\Gamma(^3/_2)}{\Gamma(^1/_2(1-N))\Gamma(^1/_2(N+2))}$$

Здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера, $\psi(z)=\Gamma'(z)/\Gamma(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции Эйлера.

Из условия, что в исследуемой области течения, в частности при $\beta=\pi$, решение задачи не должно иметь особенностей, следует равенство $a_1=a_2$. С учетом соотношений (8), (9) асимптотическое разложение для потенциала течения при $|t|\to\infty$ и $\beta\to0$ принимает вид

$$\varphi\sim x+x^n g(t)C\left[B(n)+\delta\frac{g}{2g'}+\ln\frac{2}{x}+\ldots\right], \quad C=-\frac{a_1}{4}, \quad r=\sqrt{y^2+z^2}$$

$$B(n)=\psi(n+1)+(1-\delta)(\pi/2)\operatorname{ctg}\pi n-\ln 2-\psi(1), \quad n\geqslant 0$$
$$B(n)=\psi(-n)-(1-\delta)(\pi/2)\operatorname{ctg}\pi n-\ln 2-\psi(1), \quad n<0 \tag{10}$$

Функция δ определена следующим образом: $\delta=1$, если n — целое число, и $\delta=0$, если n — не целое число. Из условия согласования разложения (10) с предполагаемым видом решения для функции $G(t, \beta, n)$ (7) следует, что $C=C_0 g'/g$, если n — целое число, и $C=C_0$, если n — не целое число, где C_0 — свободная константа.

Для случая целых чисел n составляющие скорости в цилиндрической системе координат u_x, u_r имеют следующее асимптотическое разложение при $\beta\sim r/x\to 0$:

$$u_x\sim 1+C_0x^{n-1}g\left\{\frac{|n|}{2}+\frac{g'}{g}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sign}n-1+\left(n+\frac{g''}{g'}\right)\ln\frac{r}{x}\right]+\ldots\right\},$$

$$u_r\sim\frac{C_0x_ng'}{r}+\ldots \tag{11}$$

Используя выражения (9), (11) и предположение о малости возмущений скорости на поверхности каверны в окрестности ее вершины и бесконечно удаленной точки, можно получить асимптотический вид уравнения поверхности каверны при $|t|\to\infty$

$$r=\sqrt{\frac{2C_0g'}{n+1}}x^{(n+1)/2}, \quad n\geqslant 0, \quad r=\sqrt{r_0^2+2C_0g}, \quad n=-1$$

$$r=\sqrt{r_0^2+\frac{2C_0g'}{n+1}x^{n+1}}, \quad n\leqslant -2 \tag{12}$$

где r_0 — произвольная постоянная ($r_0\geqslant 0$). Из условия постоянства модуля скорости на поверхности каверны (3) следует уравнение для определения функции $g(t)$ при $|t|\to\infty$:

$$|n|+\frac{g'}{g}\left[\operatorname{sign}n-2+(n-1)\left(n+\frac{g''}{g'}\right)t+n\ln|g'|+\frac{n+1}{2}\right]=0, \quad r_0=0$$
$$\frac{g'}{g}=-\frac{1}{2t}, \quad r_0\neq 0 \tag{13}$$

При решении уравнения (13) необходимо отдельно рассмотреть случаи $n=0$, $|n|=1$, $|n|\geqslant 2$, которым соответствуют различные формы асимптотического вырождения уравнения (13) при $|t|\to\infty$. Следует отметить, что случай $n\leqslant 0$ описывает асимптотическое поведение каверны при $x\to\infty$. В этом случае в первом приближении функция $g(t)$ имеет следующий вид:

$$g=\frac{1}{\sqrt{t}}, \quad \frac{g'}{g}=-\frac{1}{2t}, \quad n<0, \quad r_0\neq 0, \quad g=2\sqrt{t}, \quad \frac{g'}{g}=\frac{1}{2t}, \quad n=0$$

Это решение описывает каверну, которая при $n<0$ неограниченно приближается к цилиндру. Если в выражении (12) $r_0=0$, то соответствующее разложение представляется другой формулой

$$g=\frac{1}{\sqrt{t}}, \quad \frac{g'}{g}=-\frac{1}{2t}, \quad n=-1, \quad g=t^{1/(n-1)}, \quad \frac{g'}{g}=\frac{1}{n-1}\frac{1}{t}, \quad n\leqslant -2 \tag{14}$$

Случай $n\geqslant 1$ соответствует замыканию каверны за или перед препятствием, при этом

$$g=\sqrt{-2t}\,e^{-\sqrt{-2t}},\quad \frac{g'}{g}=\frac{1}{\sqrt{-2t}},\quad n=1$$

$$g=(-t)^{-1/(n-1)},\quad \frac{g'}{g}=-\frac{1}{(n-1)t},\quad n\geqslant 2$$

Из выражений (12)–(14) следует окончательный вид асимптотического поведения формы поверхности каверны при $|t|\to\infty$

$$r=\left(\frac{2C_0x}{\sqrt{\ln x}}\right)^{1/2}\quad n=0,\quad x\to\infty,\quad r=\sqrt{C_0}\,xe^{-1/2\sqrt{-2\ln x}},\quad n=1,\quad x\to 0$$

$$r=\sqrt{\frac{2C_0}{n^2-1}x^{(n+1)/2}(-\ln x)^{-n/[2(n-1)]}},\quad n\geqslant 2,\quad x\to 0$$

$$r=r_0\left(1+\frac{C_0}{r_0^2\sqrt{\ln x}}\right),\quad n=-1,\quad x\to\infty,\quad r_0\neq 0$$

$$r=r_0\left[1+\frac{C_0}{(n^2-1)r_0^2}x^{n+1}(\ln x)^{(2-n)/(n-1)}\right],\quad n\leqslant -2,\quad x\to\infty,\quad r_0\neq 0 \tag{15}$$

$$r=\left(\frac{2C_0}{\sqrt{\ln x}}\right)^{1/2},\quad n=-1,\quad x\to\infty,\quad r_0=0$$

$$r=\sqrt{\frac{2C_0}{n^2-1}x^{(n+1)/2}(\ln x)^{(2-n)/[(n-1)]}},\quad n\leqslant -2,\ x\to\infty,\ r_0=0$$

Нетрудно убедиться в том, что решение задачи (3), удовлетворяющее при $|t|\to\infty$ условиям (4)–(5), не существует для случая, когда n – не целое число.

Полученный класс решений (15) существенно расширяет возможности асимптотического исследования задачи о пространственном отрывном обтекании тел с образованием зон постоянного давления при больших числах Рейнольдса. Помимо известного решения, соответствующего расширению каверны по мере удаления от препятствия ($n=0$), получены решения, которые соответствуют замыканию каверны за или перед препятствием и описывают характеристики невязкого течения в окрестности этой точки. При $n\geqslant 1$ точка замыкания каверны лежит на конечном расстоянии от препятствия, а при $n\leqslant -1$ бесконечно удалена вверх или вниз по потоку.

После завершения работы авторам стало известно, что Вик. В. Сычевым было получено решение [8], соответствующее случаю $n=1$ данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гуревич М. И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
2. *Lighthill M. J.* A note on casped cavities // ARC R&M. 1949. № 2328.
3. *Бетяев С. К.* Эволюция вихревых пелен // Динамика сплошной среды со свободными поверхностями. Чебоксары. Изд-во Чуваш. гос. ун-та, 1980. С. 27–38.
4. *Сычев Вик. В.* О разрушении плоского ламинарного следа // Уч. зап. ЦАГИ. 1978. Т. 9. С. 9–16.
5. *Levinson N.* On the asymptotic shape of the cavity bihind an axially symmetric nose moving through an ideal fluid // Ann. Math. 1946. V. 47. № 4. P. 704–730.
6. *Кожуро Л. Я.* Обтекание сферы с заостренными областями постоянного давления // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1983. Т. 14. № 6. С. 83–88.
7. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978. 319 с.
8. *Сычев Вик. В.* О течении в окрестности точки возврата осесимметричной каверны // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 4. С. 72–84.

Москва

Поступила в редакцию 5.IV.1989