

УДК 532.527

© 1990 г.

Ю. Л. ЯКИМОВ

АВТОМОДЕЛЬНАЯ «ДИФФУЗИЯ» ИМПУЛЬСА В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматриваются плоские или осесимметричные течения несжимаемой жидкости, когда в некоторой точке пространства мгновенно выделяется конечный импульс. Для этого типа течений характерно непрерывное вовлечение в движение новых объемов жидкости с одновременным уменьшением скорости. Этот диффузионный процесс обычно связывают с вязкостью [1]. В статье показано, что аналогичные процессы могут быть описаны в рамках идеальной жидкости.

Основное содержание статьи связано с доказательством существования четырехпараметрического плоского течения идеальной жидкости. Метод построения решения основан на конформном преобразовании безразмерной переменной, так что из относительно простого автомодельного решения получается искомое течение. Показано, что этот прием может быть использован в других задачах. Полученные результаты сравниваются с известным [2] решением задачи о диффузии диполя в линеаризованной постановке для плоского движения вязкой жидкости и некоторыми обобщениями этого решения.

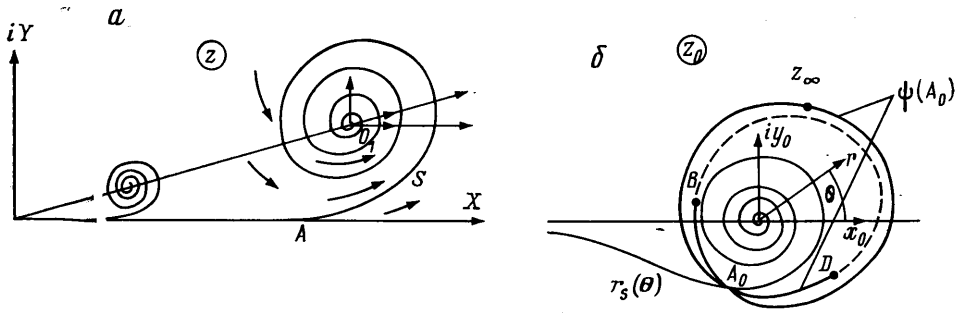
Прежде чем перейти к постановке задачи, рассмотрим известное стационарное течение с парой вихревых нитей [3] или, что то же самое, с одной вихревой нитью вблизи параллельной ей плоскости. Стационарное течение без внешних сил, действующих на контур, окружающий вихревую особенность, имеет место, если $V_0 = \Gamma/4\pi Y_0$, где V_0 — скорость перемещения вихревой особенности Γ_0 , находящейся на расстоянии Y_0 от плоскости. При этом вблизи бесконечности течение соответствует диполю с моментом $P_0 = 2\Gamma_0 Y_0$. В движущейся со скоростью V_0 системе координат имеет место замкнутая линия тока ψ_0 с двумя критическими точками.

Рассмотрим последовательность подобных течений с одним и тем же моментом диполя P_0 и скоростью $V_0 = P_0/8\pi Y_0^2$. Тогда с ростом $0 < Y_0 < \infty$ циркуляция Γ_0 будет меняться от ∞ до 0. Для этой последовательности количество движения жидкости, заключенной внутри замкнутой линии тока, и присоединенное количество движения, связанное с присоединенной массой «тела», ограниченного замкнутой линией тока, останутся постоянными. Таким образом, этой последовательности кинематически подобных течений можно поставить в соответствие постоянную ρP_0 с размерностью импульса на единицу толщины слоя, где ρ — плотность жидкости.

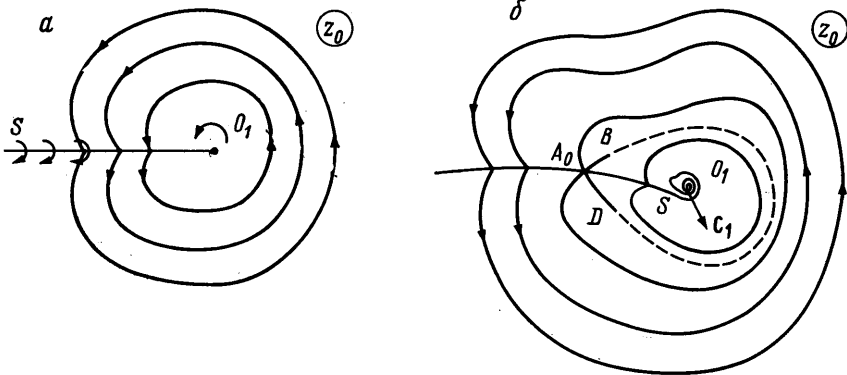
Цель работы состоит в доказательстве существования класса нестационарных течений, которые в каждый момент времени аналогичны одному из рассмотренных выше стационарных, таких, что в начальный момент в жидкости имеет место поле диполя с моментом P_0 и бесконечно малая область жидкости, совершающей вращательные движения. Эта малая область жидкости с течением времени расширяется, а ее скорость падает. Эта задача автомодельна, так как в постановке задачи содержатся только две размерные постоянные: P_0 и ρ . Тривиальным примером точного нестационарного решения в этой постановке является диполь, движущийся в направлении своей оси по автомодельному закону $V_x = P_0 t^{-1/2}$. Диполь можно рассматривать как два вихря с бесконечно малым расстоянием между ними.

Аналогичная автомодельная постановка для жидкости с вязкостью, зависящей от времени, и линеаризованное решение изложены в [2]. Ее обсуждение содержится во второй части статьи, где показано, что решение [2] и его обобщения стремятся к точному только при числах Рейнольдса $Re \rightarrow 0$. Приведенная выше автомодельная постановка для идеальной жидкости, соответствующая $Re \rightarrow \infty$, содержится в [4]. Кроме того, исследование некоторых изолированных степенных и логарифмических автомодельных особенностей, соответствующих различным показателям автомодельности, для идеальной жидкости содержится в [5].

1. В случае идеальной жидкости в [4] предполагалось, что автомодельное течение указанного выше класса имеет свертывающуюся вихревую пелену (фиг. 1, а). Жидкость поступает внутрь закрученной области, а циркуляция уменьшается по автомодельному закону за счет накручивающейся



Фиг. 1



Фиг. 2

вихревой пелены. Внешне очень похожие течения можно увидеть на фото [6].

Доказательство существования искомого течения выполним по следующей схеме. Сначала рассмотрим изолированную автомодельную особенность, определяемую постоянными P_0 и ρ . Затем, введя безразмерную комплексную переменную и безразмерный потенциал, выполним конформное преобразование так, чтобы некоторая область Римановой поверхности, содержащая особенность и аналитическое продолжение потенциала, перешла в полуплоскость. Далее осуществляется обратный переход к размерным координатам и нестационарному полю скоростей, содержащему только параметры P_0 и ρ . Существование искомого течения вытекает из разрешимости каждого из рассматриваемых ниже этапов преобразования и проверки условий на пелене.

Рассмотрим нестационарное автомодельное течение, соответствующее изолированной плоской вихревой особенности (фиг. 1, б). Представим его как течение, возникшее из вихревой пелены, первоначально расположенной на полупрямой, с интенсивностью, соответствующей циркуляции $\Gamma(X) = P_0/|X|$ (фиг. 2, а).

Введем безразмерный радиус $r = R/P_0^{1/2} t^{1/2}$ и θ , где R — размерный радиус, θ — полярный угол с центром в особой точке O_1 . Пелена S представляется зависимостью $r_s(\theta)$. Приближенную зависимость для $r_s(\theta)$ можно получить из следующих соображений.

В связи с вихревым характером особенности средняя скорость направлена по окружности, а так как жидкость идеальная, то приближенно выполняется закон сохранения момента количества движения частиц жидкости, расположенных в кольцевых областях. Отсюда средние скорости в этих областях не зависят от времени. Тогда из соображений размерности для этой скорости имеем

$$V_\theta \approx P_0/2\pi R^2 \quad (1.1)$$

Выражение (1.1) стремится к точному вблизи точки O_1 . С другой стороны, пелена движется со скоростью жидкости $1/2(V_1+V_2)$, где V_1, V_2 — скорости жидкости по разные стороны от нее [2]. Приравнивая эти скорости, получим приближенное выражение для $r(\theta)$

$$R \frac{d\theta}{dt} = \frac{P_0}{2\pi R^2}, \quad r_* = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi(\theta-\theta_0)}} \quad (1.2)$$

На фиг. 1, б изображена спираль (1.2) в безразмерной плоскости при $\theta_0 = \pi$. Выражение (1.2) приближенное и в дальнейшем использовано не будет, а приведено здесь для представления о характере особенности.

Выше было отмечено, что частным точным решением рассматриваемой задачи является диполь. Рассмотрим начальные данные, представляющие суперпозицию пелены и диполя в особой точке (фиг. 2, б). Если вектор момента диполя $C_0 P_0$ очень велик $|C_0| \gg 1$, то имеем движение особой точки O_1 вместе с диполем. Наоборот, если $|C_0| \ll 1$, то течение мало отличается от рассмотренного выше (1.2). Таким образом, вектор C_0 связан с величиной и направлением движения особой точки O_1 . Качественная картина течения представлена на фиг. 2, б. При $R \rightarrow \infty$ все линии тока подобны и имеют место стационарное вращение. Из соображений размерности следует наличие линейной связи между Γ и Ψ . Аналогична ситуация вблизи особой точки O_1 , где главное возмущение связано с диполем, а линии тока и вихри пелены почти подобны между собой.

Ниже будет показано, что линейная связь между Γ и Ψ справедлива для всех точек пелены.

В связи с автомодельностью можно ввести одну комплексную безразмерную переменную и безразмерный комплексный потенциал этого течения

$$w(z_0) = \varphi + i\psi$$

$$w(z_0) = W_0(z_0, t) \frac{t^{1/2}}{P_0^{1/2}}, \quad z_0 = \frac{Z_0}{P_0^{1/2} t^{1/2}} = \frac{\text{Re}^{1/2}}{P_0^{1/2} t^{1/2}}$$

где $W(Z_0, t) = \Phi + i\Psi$ — размерный потенциал. В безразмерных переменных имеем стационарное течение с замкнутыми линиями тока, так как в противном случае имел бы место в исходном размерном течении сток или источник, причем пелене S_0 соответствуют изломы линий тока, так как касательные скорости по разные стороны пелены различны (фиг. 1, б). Если течение аналитически продолжить по обе стороны пелены, то получим в окрестности пелены двулистное течение.

Таким образом, пелена является геометрическим местом точек самопересечения линий тока в плоскости z_0 и области ее аналитического продолжения (фиг. 1, б). В физической плоскости пелена имеет ту же форму, но ее размер меняется со временем.

Рассмотрим более подробно условия на пелене. Точки пелены, соответствующие заданной циркуляции, движутся со скоростью $1/2(V_1+V_2)$. Из этого определения следует, во-первых, что пелена является контактным разрывом. Во-вторых, из постоянства циркуляции в рассматриваемой точке следует, что и разрыв потенциала $\Delta\Phi = \Gamma$ стационарен. Отсюда

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d\Delta\Phi}{dt} = \frac{\partial\Delta\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(V_1+V_2)(\text{grad}\Phi_1 - \text{grad}\Phi_2) =$$

$$= \frac{\partial\Delta\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(V_1^2 - V_2^2) = 0 \quad (1.3)$$

Но последнее равенство совпадает с интегралом Коши — Лагранжа для разности давлений. Следовательно, разность давлений на пелене $\Delta P = 0$. Но из условия $\Delta P = 0$ не вытекает, что разрыв является контактным.

Действительно, в потенциале $W(Z, t)$, который удовлетворял условиям на пелене, введем новое время τ , $t=k(\tau+\tau_0)$ так, что в данный момент времени $t_1=k(\tau_1+\tau_0)$. Тогда при t_1, τ_1 имеем одинаковые поля распределения скоростей Φ и Ψ . Но вместо $\partial\Phi/\partial t$ получим $k\partial\Phi/\partial\tau$, а характерные состояния, в том числе точки самопересечения линий тока ψ , будут перемещаться в k раз быстрее, т. е. вместо $1/2(V_1+V_2)$ имеем $k/2(V_1+V_2)$. После подстановки в (1.3) снова получим $\Delta P=0$, но теперь разрыв неконтактный, так как жидкость сквозь него протекает. Если рассматривать течение идеальной жидкости как предел реальной вязкости при $\nu \rightarrow 0$, то получим, что движение вихревого слоя относительно жидкости противоречит уравнениям Гельмгольца (2.2) и, следовательно, не имеет физического смысла.

Таким образом, из одного начального состояния поля скоростей можно получить множество решений, в данном случае различающихся постоянными k и τ_0 , но только одно из них имеет физический смысл. Это еще один пример (к тем, что приведены в [4]) о роли исчезающей вязкости в отборе решения для идеальной жидкости, соответствующего реальному течению.

С другой стороны, если выполнить равномерное растяжение по Z : $Z_1=kZ$, то для фазовой скорости поверхности разрыва и скорости имеем

$$\frac{dZ_1}{dt} = \frac{dZ_1}{dZ} \frac{dZ}{dt} = k \frac{dZ}{dt}; \quad \frac{dW}{dZ_1} = \frac{dW}{dZ} \frac{dZ}{dZ_1} = \frac{1}{k} \frac{dW}{dZ} \quad (1.4)$$

После подстановки в (1.3) получим

$$\frac{d \operatorname{Re} W}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dZ_1}{dt} \frac{dW}{dZ_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{dZ}{dt} \frac{dW}{dZ} = \Delta p = 0$$

Таким образом, при равномерном растяжении пелена переходит в пелену.

В безразмерных переменных каждой точке пелены соответствует фиксированная безразмерная циркуляция γ и безразмерная линия тока ψ , так что связь между ними можно представить в виде $\gamma=f(\psi)$ или в размерных переменных

$$\Gamma = f(\Psi/P_0^{1/2}t^{1/2}) P_0^{3/2}/t^{1/2} \quad (1.5)$$

Если точку пелены, соответствующую Γ_0 , перемещать в направлении V_1+V_2 , то расходы через элемент дуги этого смещения со стороны течения V_1 и со стороны течения V_2 будут взаимно компенсированы (это следует из простых геометрических соотношений). Так как линия тока это линия фиксированного расхода, то, следовательно, точка пелены, соответствующая заданной Ψ_0 , смещается в том же направлении, что и Γ_0 . Здесь имеется в виду, что произвол в выборе функции тока устранен так, что вблизи точки $Z=\infty$ течение стремится к стационарному. В этом случае расход жидкости между рассматриваемой линией тока и некоторой линией тока вблизи $Z=\infty$ постоянен.

Продифференцируем (1.5) по t при фиксированном Ψ , получим

$$-\frac{d\Gamma}{dt} = -\frac{P_0^{3/2}}{3t^{5/2}} f + \frac{\Psi}{3t} f_{\Psi'} = 0 \quad (1.6)$$

Так как (1.6) справедливо для всех точек пелены, то $\Gamma=C_1\Psi$.

Этот вывод не связан с конкретным автомодельным течением и даже с показателем автомодельности. Следовательно, условию на любом разрыве $\Delta p=0$ для автомодельных течений эквивалентно наличие линейной связи между размерными и безразмерными циркуляцией и специально выбранной функцией тока.

Полученную закономерность можно представить в виде

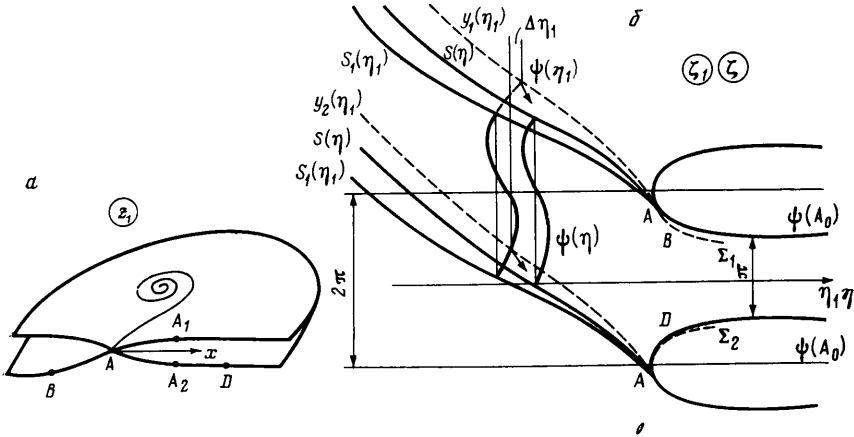
$$\Gamma = C_1(\psi - \psi_0) P_0^{3/2}/t^{1/2} + C_0 \psi_0 P_0^{3/2}/t^{1/2}$$

Отсюда следует, что если теперь перейти к новой функции тока, равной разности $\Psi - \Psi_0$, которая уже не будет удовлетворять условию стационарности вблизи точки $Z=\infty$, то через линию тока $\Psi - \Psi_0 = 0$, соответствующую оси симметрии, имеем поток циркуляции

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -c_1 \psi_0 \frac{P_0^{3/2}}{3t^{5/2}} \neq 0 \quad (1.7)$$

Следовательно, от оси симметрии неизбежно движется пелена конечной интенсивности.

Рассмотрим теперь конформные преобразования переменной z_0 ; $z_0 = z_0(z)$ так, что $w(z)$ — искомый потенциал. Введем еще промежуточную переменную, z_1 , $z_0 = z_0(z_1) = z_0[z_1(z)] = z_0(z)$. Выберем на пелене точку A_0 . Ей соответствует область z_0 , ограниченная линией тока $\psi(A_0)$ и ее аналитическим продолжением до некоторых точек B и D (фиг. 2, б). За этими точками область на втором листе ограничена пока достаточно произвольной кривой, являющейся продолжением $\psi(A_0)$ (штриховая линия фиг. 2, б), охватывающей пелену. Пока это кривая не уточнена, $z_0 = z_0(z_1)$ является некоторым достаточно произвольным преобразованием.



Фиг. 3

Сделаем замену переменной $z_0 = z_0(z_1)$ так, что этой области z_0 соответствует область z_1 , которая представляет две римановы полуплоскости, а переход с одного листа на другой осуществляется между O_1 и осью x (фиг. 3, а). Точке z_∞ (фиг. 2, б), лежащей на $\psi(A_0)$, соответствует $z_1 = \infty$ верхнего листа римановой поверхности. Точка A_0 перейдет в две другие точки, а остальные точки пелены перейдут в две спиральные кривые. Новая пелена S_1 , начинающаяся в точке A , является геометрическим местом точек взаимопересечения петлеобразных линий тока. До преобразования точке A соответствовали две точки: A_1 и A_2 (фиг. 3, а).

Прежде чем выставить остальные условия, определяющие конформное преобразование, рассмотрим скорости точки O_1 и вблизи точки A . При конформном преобразовании в малой окрестности O_1 имеет место подобное растяжение. Тогда в соответствии с (1.4) эта точка перемещается вместе с пеленой. Следовательно, точка O_1 движется со средней скоростью жидкости, вращающейся в ее малой окрестности. Так как при конформном преобразовании все скорости жидкости, а следовательно, и их средняя скорость в малой окрестности умножаются на один и тот же множитель dz_0/dz , то после преобразований скорость точки $V_1(O_1)$ будет

$$V_1(O_1) = V_0(O_1) \frac{dz_0}{dz} \Big|_{O_1} \quad (1.8)$$

где $V_0(O_1)$ — скорость точки O_1 в исходном течении с изолированной особенностью, скорость $V_1(O_1)$ одновременно является скоростью характерной точки $Z(O_1)$, равной

$$\frac{dZ_1(O_1)}{dt} = \frac{dz_0 P_0^{1/2} t^{1/2}}{dt} = z(O_1) \frac{P_0^{1/2}}{3t^{3/2}} \quad (1.9)$$

Приравнявая скорости (1.8) и (1.9), получим первые два условия в комплексном виде:

$$\frac{dw}{dz_0} \frac{dz_0}{dz} \Big|_{O_1} = \frac{1}{3} z_1(O_1) \quad (1.10)$$

Аналогично в точке A фазовая скорость точки $x(A)$ должна быть равна скорости смещения жидкости под ней, соответствующей точке A_1 . Действительно, чтобы выполнить условие (1.7), хотя бы одна из скоростей (назовем ее верхней) должна быть отлична от нуля. Следовательно, пелены неизбежно не угловая точка верхнего потока. Тогда жидкость ниже пелены в физической плоскости движения вместе с точкой A

$$\left. \frac{dw}{dz_0} \right|_{A_1} = \frac{1}{3} x(A) \quad (1.11)$$

Потребуем также, чтобы при $z \rightarrow \infty$

$$\left| z^2 \frac{dw}{dz} \right| \rightarrow 1 \quad (1.12)$$

тогда в размерных переменных при $z = \infty$ получим диполь P_0 . Четыре условия (1.10)–(1.12) могут быть удовлетворены за счет четырех из восьми следующих свободных параметров: трех параметров, определяющих конформное преобразование, например растяжений; параметра, определяющего положение начала координат на оси симметрии; положение точки z_∞ ; выбор точки A_0 и двух параметров, задающих безразмерный момент S_0 диполя $S_0 P_0$ исходного течения. Причем четыре первых параметра непосредственно входят в (1.10)–(1.12). Следовательно, во-первых, все условия могут быть удовлетворены, во-вторых, останется еще четыре свободных параметра.

Потенциал $W(Z_1, t)$ описывает течение внешне похожее на искомое. Кроме того, разрыв вблизи O_1 является пеленой, так как при конформном преобразовании вблизи точки O_1 имеем равномерное растяжение и, следовательно, выполнено (1.4).

Чтобы рассмотреть условия на разрыве в промежуточных точках между A и O_1 , вместо z_1 введем $\xi = \ln|z_1 - z_1(O_1)|$ (фиг. 3, б). Краям полуплоскостей будут соответствовать кривые, $\psi(A_0)$ физической плоскости переменной z_1 , соответствует полоса, заключенная между кривыми S_1 , расстояние между которыми $2\pi i$, исходящие из точек A . Точке O_1 соответствует точка $\eta_1 = \operatorname{Re} \xi_1 = \ln|z_1 - z_1(O_1)| \rightarrow -\infty$, а точка $z_1 = \infty - \eta = +\infty$.

Линии $S_1(\eta)$ соответствуют линиям разрыва $w(z_1)$, так что линии тока на верхней и нижней S_1 принимают одно и то же значение $\psi(\eta_1)$. Вне этой полосы будем рассматривать только аналитическое продолжение. Введем $y_1(\eta)$ и $y_2(\eta)$ (пунктиры) и выполним конформное преобразование $\xi_1 = \xi_1(\xi)$, $\eta = \operatorname{Re} \xi$ полосы между ними и $\psi(A_0)$ — на полосу между $s(\eta)$ и $\psi(A_0)$, а $s(\eta)$ будет новым разрывом. Потребуем, чтобы точки A остались на месте, а $\eta_1 = +\infty$ соответствовала точка $\eta = \infty$.

Рассмотрим некоторую $y_1(\eta)$. Если потребовать чтобы γ между точками $y_1(\eta)$ и $y_2(\eta)$ была заданной линейной функцией $\gamma = C_1 \psi$, то, двигаясь по ψ от y_1 к y_2 , получим соответствие точек y_1 и y_2 , удовлетворяющих заданной линейной связи. Таким образом, y_2 не является произвольной, а зависит от $y_1(\eta)$.

Рассмотрим точки y_1 и y_2 , которые находятся на одной линии тока ψ , им соответствует $\Delta \eta$. После преобразования этим точкам должны соответствовать две новые точки, лежащие на S и на одной вертикали (условие замкнутости линии тока).

С другой стороны, это расхождение координаты может быть определено по растяжениям при обратном преобразовании. Получим

$$\Delta \eta_1 = \int_A^{\eta_1} \left| \frac{d\xi_1}{d\xi} \right|_{v_1} \cos \operatorname{arctg} \frac{dS}{d\eta} d\eta - \int_A^{\eta_1} \left| \frac{d\xi_1}{d\xi} \right|_{v_2} \cos \operatorname{arctg} \frac{dS}{d\eta} d\eta$$

отсюда

$$\frac{d\Delta \eta_1}{d\eta} = \left[\left| \frac{d\xi_1}{d\xi} \right|_{v_1} - \left| \frac{d\xi_1}{d\xi} \right|_{v_2} \right] \cos \operatorname{arctg} \frac{dS}{d\eta} \quad (1.13)$$

Аналогично связь между S и y можно получить в виде

$$\frac{dS}{d\eta} = y_1(\eta) + \left| \frac{d\xi_1}{d\xi} \right| \sin \arctg \frac{dS}{d\eta} \quad (1.14)$$

Таким образом, для двух независимых функций $y_1(\eta)$ и $S(\eta)$ имеем два уравнения (1.13) и (1.14).

Имея в виду, что речь идет о преобразовании близких областей, для наглядности и определения растяжения в точке O_1 можно воспользоваться теоремой М. А. Лаврентьева [7] об отображении области, близкой к полосе, на полосу в безразмерной форме [8].

Согласно теореме М. А. Лаврентьева, модуль производной конформного преобразования известной формулой может быть оценен по локальным свойствам полосы: ширине и кривизне границ в рассматриваемой точке. В рассматриваемом случае — от y_1 , y_2 , S и их первых двух производных. Тогда в (1.7) и (1.8) помимо самих функций, по теореме М. А. Лаврентьева, входят их первые и вторые производные. Начальные данные имеем в точке A , где заданы функции и их производные, равные C_1 , S_1' и y_1 , y_1' , следующие из регулярности конформного преобразования в точке A . Кроме того, в окрестности точки O_1 преобразование тождественно, так как уже выполнено условие $\gamma = C_1\psi$. Следовательно, для этой точки в пределах точности формулы М. А. Лаврентьева модуль производной равен единице.

Выполнив обратное преобразование $z - z(O_1) = e^{\xi}$, получим $w(z)$, удовлетворяющее всем условиям, которым удовлетворял потенциал $w_2(z_1)$, и еще условию $\gamma = C_1\psi$ и, следовательно, $\Delta p = 0$.

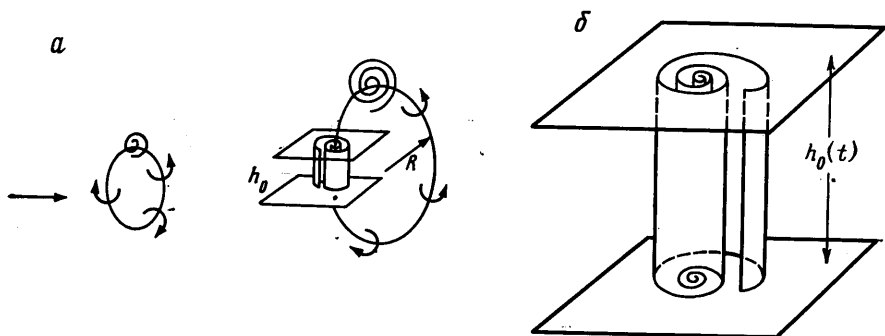
Осталось показать, что разрыв соответствует пелене. Предположим, что это не так и $W(Z, t)$ соответствует автомодельному течению с пронизаемым разрывом $\Delta p = 0$. Тогда для некоторого момента времени t_1 поле скоростей этого течения возьмем в качестве начального для автомодельного течения, для которого разрыв является пеленой, т. е. контактным. В момент t_1 форма разрыва была задана и, следовательно, в дальнейшем движении она в силу автомодельности будет той же и может измениться только описанный выше темп движения разрыва во всем течении на множитель k . Но в особой точке O_1 разрыв соответствовал пелене (1.4), следовательно, его темп измениться не может. Отсюда, разрыв $W(Z, t)$ является контактным с $\Delta p = 0$, т. е. пеленой.

Конформное преобразование есть в обобщенном смысле подобное преобразование, при котором меняется геометрия [4]. В данном случае этим преобразованием из одного автомодельного движения получено другое с другой геометрией. Другой особенностью рассмотренного построения является то, что введение римановой поверхности оказалось по существу доказательством. Наконец, интересна особенность в точке A . Ее можно интерпретировать как две пелены противоположного знака, которые находились на оси левее точки A и взаимно аннигилировали, а затем в точке A под действием потока расходятся в противоположные стороны. Напоминается также аналогия с бесконечно малым телом, за которым образуется отрывная зона с нулевым числом кавитации.

Возникновение течения рассмотренного типа можно представить как результат вдува через тонкую щель в начале координат струи конечной длины. В результате на границе струи образуется вихревая пелена, скручивающаяся в начальную область.

После прекращения подачи жидкости поток отрывается от наружной стенки щели, образуя пелену противоположного знака, которая вытягивается вдоль плоскости так, что толщина слоя жидкости между пеленой и плоскостью очень мала, а затем отрывается от плоскости в точке A (фиг. 1, б). В пределе наличие пелены между O и A несущественно. При наматывании пелены противоположного знака на окрестность O_1 циркуляция уменьшается.

Наличие в реальном течении не особенности, а конечной области с конечной скоростью и энергией для течения в целом не имеет значения, так как вблизи этой точки жидкость совершает вращательные движения. Несущественна также и диффузия вихрей за счет вязкости в этой малой зоне. Эти свойства вихревой особенности с точки зрения физического смысла являются уникальными. По-видимому, более сложные особенности следует описывать как суперпозицию вихревых особенностей, как это сделано выше с диполем. Наличие четырехпараметрического семейства решений указывает на то, что в начальный момент времени помимо импульса существуют еще параметры, зависящие от наружной и внутренней формы сопла, относительной длины струи, закона истечения жидкости и т. д.



Фиг. 4

Параметр A можно связать с относительным размером закрученной области, другие параметры — с направлением вдува, положением точки A и др.

В осесимметричном случае $[P_0] = L^4/T$ вихревой особенности соответствует окружность, радиус R_0 которой увеличивается со временем (фиг. 4, а). Из соображений размерности имеем $R_0 = P_0^{1/4} t^{1/4} C_0$.

Для выяснения характера вихревой особенности этого течения рассмотрим следующую вспомогательную автомодельную задачу.

Пусть ось вихревой области и пелена расположены между двумя перпендикулярными им плоскостями (фиг. 4, б), расстояние между которыми меняется по указанному автомодельному закону для R_0 . Введем дополнительное течение с потенциалом

$$\Phi_h = P_0^{1/2} C_0^2 [h^2 - 1/2(x^2 - y^2)]$$

В этом течении каждый слой жидкости xy перемещается только по вертикали, увеличивая свою толщину, а пелена в отличие от предыдущего случая собирается к центру радиальным течением. В результате из кинематических соотношений вместо (1.2) получим приближенную безразмерную форму спирали пелены в виде

$$\frac{R}{(C_2 P_0)^{1/4} t^{1/4}} = \frac{C_1^{10/3}}{(\theta - \theta_0)^{10/3}} \quad (1.15)$$

Это выражение учитывает эффект растяжения вихревой области. Так как в малой окрестности особой линии важно только это растяжение и несущественна кривизна, то выражение (1.15) дает характер особенности для осесимметричного течения.

2. Описанные течения качественно отличаются от известного аналогичного автомодельного течения в вязкой жидкости [2], в котором предлагается ввести вязкость $\nu(t)$ как функцию времени так, чтобы она выражалась через размерности ρ и P_0

$$\nu(t) = \lambda_0 P_0^{2/3} t^{-1/3}, \quad \nu(t) = \lambda_0 P_0^{1/2} t^{-1/2}, \quad (2.1)$$

где λ_0 — безразмерная постоянная. Указанные законы изменения вязкости можно интерпретировать как турбулентную вязкость [2]. Конкретные результаты [2] приведены только в линеаризированной постановке для плоской задачи.

Рассмотрим это решение и его возможные обобщения.

Плоское течение вязкой несжимаемой жидкости описывается системой уравнений Гельмгольца [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + V_x \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V_y \frac{\partial \Omega}{\partial Y} &= \nu \Delta \Omega \\ V_x &= \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad V_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial X}, \quad \Omega = \frac{\partial V_x}{\partial Y} - \frac{\partial V_y}{\partial X} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Следуя [2], введем безразмерные функции ω , ψ и координаты x , y

$$\Omega = \frac{1}{t} \omega(x, y), \quad \Psi = \frac{P_0^{3/2}}{t^{1/2}} \psi(x, y) \quad (2.3)$$

$$x = \frac{X}{P_0^{1/2} t^{1/2}}, \quad y = \frac{Y}{P_0^{1/2} t^{1/2}}$$

$$\omega = \frac{y-y_0}{2\pi\lambda_0^2} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{6\lambda_0}\right)$$

$$\psi = \frac{y-y_0}{\pi[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]} \left[1 - \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}{6\lambda_0}\right)\right] \quad (2.4)$$

Если выполнено (2.1), в (2.4) положить $y_0=0$, а x_0 — безразмерная координата центра вихревой области, то получим приведенное в [2] решение линеаризованной системы

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u(t) \frac{\partial \Omega}{\partial x} = \nu \Delta \Omega, \quad \Delta \Psi = -\Omega \quad (2.5)$$

где $u(t) = 1/3 x_0 P_0^{1/2} t^{-2/3}$ — скорость центра вихревой области.

Если же в (2.4) положить $x_0=y_0=0$ и отказаться от (2.1), т. е. допустить вязкость в виде произвольной функции времени $\nu = \lambda_0 P_0^{3/2} \nu(t)$, а затем вместо времени в (2.3), (2.5) ввести $\tau(t)$, где

$$\tau(t) = \left[\frac{4}{3P_0^{3/2}\lambda_0} \int \nu(t) dt \right]^{1/3}$$

то (2.4) станет решением в случае когда вязкость является произвольной функции времени. Эти решения уже не являются автомодельными. Решение (2.4) и другие решения для произвольной вязкости могут быть получены в виде конечных формул из-за линейности (2.5).

Действительно, рассмотрим известное автомодельное решение о диффузии вихревой нити [1] при постоянной вязкости. Оно является точным решением (2.2) и одновременно (2.5), так как конвективные члены из-за симметрии тождественно равны нулю. Это решение аналогично предыдущим может быть обобщено на случай произвольной $\nu(t)$. Для этого достаточно в этом решении ввести

$$\tau(t) = \int \nu(t) dt$$

Взяв теперь два решения, соответствующие близко расположенным вихрям противоположного вращения, получим решение типа диффузии диполя. Если между ними расстояние устремить к нулю, т. е. взять производную от этого решения, то получим одно из описанных выше решений, возникающих из точки.

Если этот процесс продолжить, то, взяв, например, следующую производную, получим диффузию особенности, когда имеет место сохранение момента количества движения.

В случае, когда не выполнены (2.1) при обезразмеривании (2.2) при конвективных членах остается функция времени. Эти члены либо существенны при $t \rightarrow 0$, либо становятся главными при $t \rightarrow \infty$, а решение тогда справедливо только в начальные моменты времени или при $t \rightarrow \infty$.

Рассмотрим еще одно обобщение (2.4). Положим $x_0 = 3v_x(x, y)$, $y_0 = 3v_y(x, y)$, где v_x , v_y — результат решения (2.5) при $u=0$, т. е. определены из (2.4) при $x_0 = y_0 = 0$.

Если учесть, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \left(1 - 3 \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial (x_i - x_{0i})}$$

получим, что (2.4) в этом случае удовлетворяет уже не (2.5), а (2.2) с точностью до членов вида $\partial v_j / \partial x_i$. Эти члены малы при $\Omega \rightarrow 0$, т. е. когда движение затухает.

Таким образом, описанные решения для вязкой жидкости стремятся к точным только при малых числах Рейнольдса $Re \rightarrow 0$. Наоборот, при постановке задачи с вихревой пеленой для идеальной жидкости предполагалось, что вязкость мала и несущественна, а число $Re \rightarrow \infty$. Отметим, что при $Re \rightarrow 0$ решение (2.4) является единственным безразмерным решением, а при $Re \rightarrow \infty$ имеет место четырехпараметрическое семейство безразмерных автомодельных решений.

Качественное различие между описанными решениями объясняется тем, что они описывают разные предельные случаи рассматриваемой задачи при $Re \rightarrow 0$ и $Re \rightarrow \infty$.

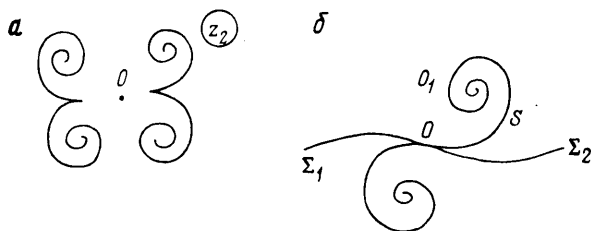
В [2] приводится сравнение эксперимента с решением для турбулентной вязкости. Однако фактически в [2] сравнивается закон затухания во времени, полученный в лабораторном эксперименте, с автомодельным, который одинаков с законом затухания для идеальной жидкости (1.9).

В связи с тем, что в лабораторном эксперименте [2] безразмерная вязкость λ_0 была мала ($Re \sim 100$), можно предположить, что этот эксперимент с большим основанием соответствует решению для идеальной жидкости. Решение для идеальной жидкости может описывать крупномасштабные течения в атмосфере и океанах, когда число Рейнольдса очень велико, а течения с учетом вязкости мелкомасштабные «грибовидные» турбулентные вихри [6]. Плоские течения, а также течения с особенностью (1.2) можно использовать для построения пространственных течений по гипотезе плоских сечений, например след за летящим телом. Много примеров подобных течений спиралевидных и др. можно видеть на фото в [6].

В реальных условиях всегда есть вязкость. Если вязкость постоянна, то течение соответствует решению для идеальной жидкости только в начальные моменты времени. С течением времени вихревая пелена превращается в вихревой слой, а на поздних стадиях переходит в течение, соответствующее решению для вязкой жидкости.

Решение для идеальной жидкости можно обратить во времени. Тогда получим коллапс с выделением конечного импульса в точке. Если этот импульс не поглощается посторонним телом, то после коллапса можно продолжить процесс описанными выше автомодельными течениями.

Рассмотрим два примера обобщения для идеальной жидкости. Так, если выполнить дополнительное преобразование безразмерной переменной $z = z_2^n$, где n — некоторое целое число, то получим течение не с двумя вихревыми особенностями с $2n$ особенностями (фиг. 5, а). Этим течениям можно поставить в соответствие «диффузию» мультиполей в идеальной жидкости.



Фиг. 5

Выше было рассмотрено течение с осью симметрии. Можно рассмотреть класс течений, имеющих центральную симметрию с двумя особенностями (фиг. 5, б).

Для этого в плоскости ξ сделаем еще одно преобразование, введя вместо границы $\psi(A_0)$ границы Σ_1 и Σ_2 , на которых выполнено условие $\gamma = C_1 \psi$. Это преобразование вполне аналогично преобразованию с заменой S_1 на S , но усложнено дополнительным условием центральной симметрии линий $\Sigma_1(z)$ и $\Sigma_2(z)$ и наличием двух искомых функций $\Sigma_1(\eta)$ и $\Sigma_2(\eta)$ вместо одной $S(\eta)$. Это течение можно интерпретировать как движение пелены Σ_1 мимо центра симметрии и затем ее накручивание на особенность O_1 . Аналогично движется пелена Σ_2 .

В течениях этого типа на один параметр меньше, так как точка A должна находиться в начале координат.

Соответствующего этому течению (фиг. 5, 6) автомодельного течения вязкой жидкости не существует, так как неизбежна взаимная аннигиляция (при $v \neq 0$) импульса вдоль разрывов Σ_1 и Σ_2 . При этом для каждой из характерных областей импульс не сохраняется, что противоречит рассматриваемой автомодельной постановке.

Автор признателен А. А. Бармину и А. Г. Куликовскому за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 2. Л.: М.: Гостехиздат, 1948. С. 301, 334–340.
2. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977. С. 334–340.
3. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. С. 203–206.
4. *Механика и научно-технический прогресс.* Т. 2. М.: Наука, 1987. С. 20–21.
5. *Бегяев С. К., Гайфуллин А. М.* Крупномасштабная структура ядра спирального разрыва в жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 5. С. 53–60.
6. *Ван-Дайк М.* Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1986. С. 45–47, 68.
7. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. С. 398–403.
8. *Якимов Ю. Л.* О приближенной формуле для растяжения при конформном отображении области, имеющей узкий участок // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3. № 6. С. 956–960.
9. *Якимов А. Ю.* Метод узких полос для нелинейных задач стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. Т. 2. С. 174–178.

Москва

Поступила в редакцию
17.III.1989