

УДК 532.526.4

© 1990 г.

Г. В. КИРЕЙКО

## О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПРИСТЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ С ПОДАТЛИВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Большое внимание, уделяемое взаимодействию пристенной турбулентности с податливой поверхностью, обусловлено проблемой поиска способов уменьшения турбулентного сопротивления трения. В отдельных экспериментах использование упругих покрытий позволяло снизить турбулентное трение до 60%. В то же время из-за отсутствия достаточно полных теоретических исследований большинство параметров покрытий выбирались случайно, что часто приводило к отрицательным результатам [1]. Кроме того, невозпроизводимость удачных экспериментов другими исследователями говорит о критическом характере воздействия податливой поверхности, сильно зависящем от многих параметров. Поэтому большое значение приобретает теоретическое исследование взаимодействия податливой поверхности с турбулентным потоком на основе достаточно полной модели пристенной турбулентности.

Ниже с использованием моногармонического приближения проанализировано влияние различных параметров податливого покрытия на взаимодействие с пристенной турбулентностью. Показано, что взаимодействие носит резонансный характер и при определенных значениях параметров возможно значительное снижение турбулентного сопротивления трения.

1. Рассмотрим задачу о турбулентном течении ньютоновской жидкости вдоль безграничной податливой поверхности в области постоянного напряжения сдвига  $\sigma_w$ . Уравнения движения и неразрывности в декартовой системе координат  $x_1=x$ ,  $x_2=y$ ,  $x_3=z$  для  $y>0$ , приведенные к безразмерному виду с использованием динамической скорости  $v_* = \sqrt{\sigma_w/\rho}$  и кинематической вязкости  $\nu = \mu/\rho$ , имеют вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}; \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.1)$$

В качестве податливой поверхности была выбрана достаточно простая модель, чтобы наиболее полно выявить влияние различных параметров: в плоскости  $y=0$  натянута упругая пленка, под которой находится слой вязкоупругой жидкости толщиной  $h$ . Смещение пленки  $\eta$  по оси  $y$  удовлетворяет уравнению колебания натянутой пленки под действием разности давлений со стороны жидкостей, находящихся ниже и выше пленки

$$m_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - T_1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = p + p_1 \quad (1.2)$$

$$m_0 = \frac{mv_*}{\mu}, \quad T_0 = \frac{T_x}{v_*\mu}, \quad T_1 = \frac{T_z}{v_*\mu}$$

Здесь  $m$  — масса единицы площади пленки,  $T_x$  и  $T_z$  — натяжения пленки по  $x$  и  $z$ . Движение подстилающей вязкоупругой жидкости описывается уравнениями

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\rho_1 \partial x_j}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.3)$$

$$\sigma_{ij} + \theta_1 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = 2\mu_1 \left( e_{ij} + \theta_2 \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} \right)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \theta_1 = \frac{\gamma_1 v_*^2}{\nu}, \quad \theta_2 = \frac{\gamma_2 v_*^2}{\nu} \quad (1.4)$$

Здесь  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — времена релаксации и ретардации. Граничные условия для (1.1)–(1.4) умеют вид

$$v_i = 0, \quad y = -H_0, \quad H_0 = h\nu_* / \nu \quad (1.5)$$

$$u_2 = v_2 = \partial \eta / \partial t, \quad u_1 = u_3 = v_1 = v_3 = 0, \quad y = \eta$$

Задача о пристенном турбулентном течении решается в моногармоническом приближении [2, 3]. Уравнения для пульсаций линеаризуются, и решение ищется в виде гармоник

$$f'(x, y, z, t) = \text{Real}[f(y) \exp(i\alpha x + i\beta z - i\alpha c t)]$$

где  $f'$  — пульсация некоторой величины,  $f(y)$  — ее комплексная амплитуда. Из обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд возмущений, получающихся из (1.3) и (1.4), с учетом (1.5) находится амплитуда пульсации  $p_1$  и подставляется в соотношение, следующее из (1.2). Тогда для нахождения амплитуд возмущений в жидкости при  $y > 0$  имеем из (1.1) систему уравнений со следующими граничными условиями:

$$i\alpha(U-c)u_1 + u_2 \frac{dU}{dy} = -i\alpha p + \frac{d^2 u_1}{dy^2} - (\alpha^2 + \beta^2)u_1$$

$$i\alpha(U-c)u_2 = -\frac{dp}{dy} + \frac{d^2 u_2}{dy^2} - (\alpha^2 + \beta^2)u_2$$

$$i\alpha(U-c)u_3 = -i\beta p + \frac{d^2 u_3}{dy^2} - (\alpha^2 + \beta^2)u_3$$

$$i\alpha u_1 + \frac{du_2}{dy} + i\beta u_3 = 0$$

$$y=0: \quad u_2 = -i\alpha c \eta, \quad u_1 + \eta \frac{dU}{dy} = u_3 = 0 \quad (1.6)$$

$$\eta(-\alpha^2 c^2 m_0 + \alpha^2 T_0 + \beta^2 T_1 - i\alpha c Q) = -p$$

где  $U(y)$  — скорость осредненного течения,  $Q = Q(\alpha, \beta, c, H_0, \mu_0, \rho_1)$  — характеризует влияние подстилающей жидкости  $y < 0$ ,  $\mu_0 = \mu_1(1 - i\alpha c \theta_2) / (1 - i\alpha c \theta_1)$  — эффективная вязкость. Соотношения (1.6) получены путем снесения условий, выполняемых на подвижной границе  $y = \eta$ , на плоскость  $y = 0$ . В случае малых смещений  $\eta$  все величины могут быть представлены в виде ряда Тейлора с сохранением только линейных членов. К условиям при  $y = 0$  добавляются соотношения, получающиеся из требования отсутствия влияния вязкости на большом расстоянии от стенки [2, 3]. Найденное решение для пульсаций при  $y > 0$  используется для определения профиля скорости осредненного течения  $U(y)$  из уравнения  $dU/dy = 1 + \langle u_1' u_2' \rangle$ , который вместе с энергией пульсационного движения  $E(y) = 1/2(\langle u_1'^2 \rangle + \langle u_2'^2 \rangle + \langle u_3'^2 \rangle)$  сращивается гладко с асимптотическими зависимостями вне области влияния вязкости [2, 3]

$$U = \frac{1}{\kappa} \ln y + B, \quad E = E_0 \left( 1 + \frac{1}{\kappa_0 y} \right) \quad (1.7)$$

Кроме того, здесь использовалось согласующееся с опытами [1, 4] условие  $\kappa = 0,4$ .

В [5] также с использованием моногармонической модели пристенной турбулентности исследовалось влияние упругой границы. Но при этом, как и в [4, 6], упругая граница задавалась обыкновенным дифференциальным уравнением, которое для амплитуд пульсаций дает

$$\eta(-\alpha^2 c^2 m_0 + c_0 - i\alpha c \mu_n) = -p \quad (1.8)$$

где  $\mu_n$  — коэффициент демпфирования,  $c_0$  — жесткость границы. При расчетах  $\mu_n$  и  $c_0$  считались постоянными, тогда как из сравнения (1.6) и (1.8) получим  $\mu_n = Q$ ,  $c_0 = \alpha^2 T_0 + \beta^2 T_1$ . Оценки показывают, что

$$Q \sim \frac{12\mu_0}{\alpha^2 H_0^3}, \quad H_0 \rightarrow 0; \quad Q \sim 1, \quad H_0 \rightarrow \infty \quad (1.9)$$

поэтому (1.8) не учитывает существенной зависимости демпфирования покрытия от толщины слоя и режима течения. Кроме того, в [5] из (1.7) могло меняться, что противоречит опытам.

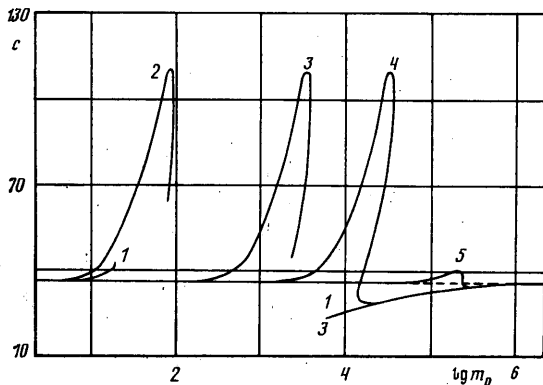
2. Рассмотрим результаты расчетов для простейшего случая:  $\rho_1 = 1$ ,  $\mu_0 = \mu_1 = 1$ . В этом случае подавляющая поверхность определяется  $m_0$ ,  $T_0$ ,  $H_0$  ( $\beta^2 \ll \alpha^2$ ). С увеличением  $v_*$  увеличиваются  $m_0$ ,  $H_0$  и уменьшается  $T_0$ . Можно образовать два параметра  $C_{mT}$  и  $C_{HT}$ , не зависящие от  $v_*$  ( $C_{mT} = m_0 T_0 = m T_x / \mu^2$ ,  $C_{HT} = H_0 T_0 = h T_x / \nu \mu$ ). В расчетах использовалось условие  $u_1 = 0$  при  $y = 0$  вместо  $u_1 = -\eta dU/dy$  в (1.6).

На фиг. 1 приведены кривые изменения  $c$  от параметра  $m_0$  при  $C_{mT} = 10^{10}$ : 1 —  $C_{HT} = 10^{11}$ , 2 —  $4 \cdot 10^9$ , 3 —  $10^8$ , 4 —  $10^7$ , 5 —  $3 \cdot 10^5$ . Прямая  $c = 36$  соответствует течению вдоль твердой стенки с  $B = 5,6$  в (1.7). Значения  $c$  больше 36 приводят к увеличению  $B$  и, следовательно, к уменьшению турбулентного трения. Для кривых 1 толщина  $H_0$  большая, поэтому, согласно (1.9), слагаемое  $c$  в (1.6) мало по сравнению с  $m_0$  и  $T_0$ . Происходит колебание пленки под действием периодических пульсаций давления  $p$ , и отсутствие решения на некотором интервале изменения  $m_0$  является следствием резонанса при  $c_* = \sqrt{T_0/m_0} = c$ .

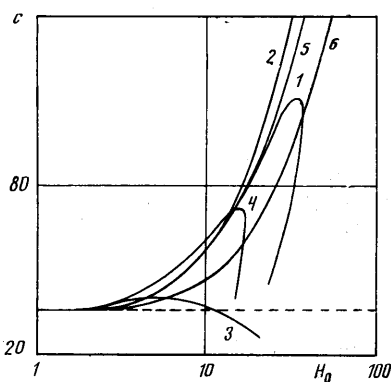
Развитию резонанса может помешать наличие твердой стенки при малой толщине подстилающей жидкости  $H_0$ , так как, согласно (1.9),  $Q$  значительно увеличивается и может стать сравнимо с  $m_0$  и  $T_0$ . Из фиг. 1 видно, что (кривые 2, 3, 4) уменьшение  $C_{HT}$  приводит к подавлению резонанса, значение  $c$  существенно увеличивается. Но так как с увеличением  $m_0$  увеличивается и  $H_0$ , то резонансные явления все же начинают преобладать, значение  $c$  достигает максимума и затем резко уменьшается. Влияние подстилающей жидкости проявляется только в области резонанса. Как показывают расчеты, с уменьшением  $C_{mT}$  эта область расширяется, а внутри нее далеко от границ  $c$  зависит только от  $H_0$  и не зависит от  $C_{HT}$  и  $C_{mT}$ .

На фиг. 2 показано влияние плотности и вязкости подстилающей жидкости на зависимость  $c$  от  $H_0$  в области резонанса: кривая 1 — ( $\rho_1 = 1$ ;  $\mu_1 = 1$ ); 2 — (0,5; 1), 3 — (4; 1), 4 — (1; 0,5), 5 — (1; 4). Видно, что увеличение  $\mu_1$  и уменьшение  $\rho_1$  приводят к значительному увеличению значений  $c$ , а уменьшение  $\mu_1$  и увеличение  $\rho_1$  — к уменьшению  $c$  по сравнению с кривой 1. При этом увеличение  $\mu_1$  сдвигает кривую  $c$  в сторону больших значений  $H_0$ , а уменьшение  $\rho_1$  — в обратную сторону. Было проанализировано влияние граничного условия для  $u_1$  в (1.6). Кривая 1 соответствует  $u_1 = 0$ , а кривая 6 —  $u_1 = -\eta dU/dy$ . Использование более точного граничного условия приводит к значительному увеличению значений  $c$ , но при этом не оказывает влияния на начало воздействия покрытия на пристенную турбулентность. Поэтому для качественного исследования влияния различных параметров достаточно использовать граничные условия в простейшей форме.

Было исследовано влияние упругих свойств подстилающей жидкости. Учет упругости сводится к замене ньютоновской вязкости  $\mu$  на эффективную  $\mu_0 = \mu_1(1 - i\alpha c \theta_2)/(1 - i\alpha c \theta_1)$ . Для вязкоупругой жидкости Олдройда  $\theta_2 = \xi \theta_1$ , где  $\xi < 1$ . Поэтому увеличение  $\theta_1$  приводит к уменьшению модуля



Фиг. 1



Фиг. 2

эффективной вязкости, что должно оказывать влияние, подобное уменьшению вязкости  $\mu_1$  для ньютоновской жидкости. Для вязкоупругой жидкости Уолтерса  $\theta_1=0$  и  $\theta_2<0$ , т. е. с увеличением абсолютной величины  $\theta_2$  будет увеличиваться модуль эффективной вязкости, и жидкостью Уолтерса должна оказывать воздействие, обратное воздействию жидкости Олдройда. Расчеты полностью подтверждают данные рассуждения.

3. Рассчитанный логарифмический профиль скорости (1.7) позволяет проанализировать влияние различных параметров податливого покрытия и режима течения на интегральные характеристики турбулентного течения жидкости в круглой трубе и при обтекании плоской пластины. На фиг. 3 приведены кривые коэффициента трения  $\lambda$  при течении жидкости в трубе, податливое покрытие на внутренней поверхности которой моделируется уравнениями (1.2)–(1.4) с  $\rho_1=1$ . Величина  $\lambda$  рассчитывалась по формуле [7]

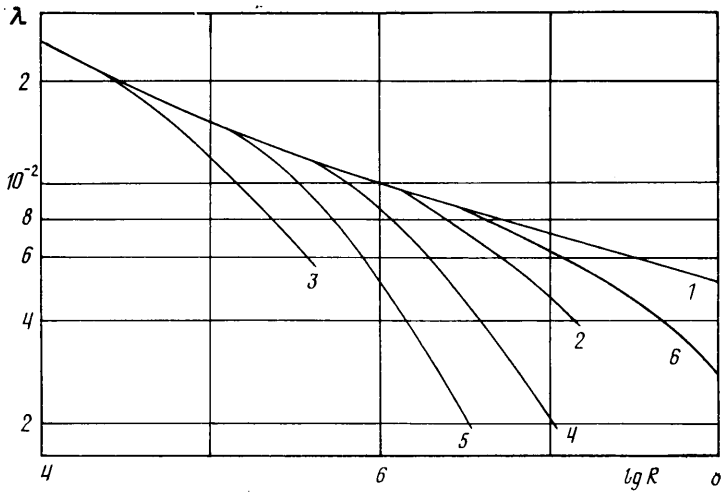
$$2\sqrt{\frac{2}{\lambda}} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{av_*}{\nu} + B - \frac{3}{2\kappa}$$

Кривые зависят от  $R$ ,  $H_a$ ,  $\mu_1$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ , где  $R=2aV/\nu$ ,  $H_a=h/a$ ,  $F_1=\gamma_1\nu/a^2$ ,  $F_2=\gamma_2\nu/a^2$ ,  $a$  – радиус трубы,  $V$  – средняя по сечению трубы скорость: кривые 1–3 –  $\mu_1=1$ ,  $H_a=0$  (1) (твердая поверхность),  $10^{-4}$  (2),  $3,3 \cdot 10^{-3}$  (3); кривые 4–6 –  $H_a=3,3 \cdot 10^{-3}$ ,  $\mu_1=10^3$ ,  $F_1=0$  и  $F_2=0$  (4),  $10^{-4}$  и  $10$  (5) (жидкость Олдройда), 0 и  $-180$  (6) (жидкость Уолтерса). Расчеты показывают, что эффект снижения турбулентного трения не зависит от параметров  $C_{mt}$  и  $C_{nt}$ , если кривая лежит внутри области резонанса, но требуются очень малые толщины подстилающей жидкости, чтобы получить эффект при больших числах Рейнольдса (кривая 2). При этом уменьшение толщины на порядок сдвигает кривую  $\lambda$  на порядок в сторону больших чисел  $R$ . К такому же сдвигу приводит и увеличение вязкости подстилающей жидкости, но для сдвига, эквивалентного уменьшению толщины на порядок, необходимо, согласно оценке (1.9) при  $H_0 \rightarrow 0$ , увеличение  $\mu_1$  на три порядка. Этот вывод подтверждается расчетами (кривые 3 и 4). Как отмечалось выше, для вязкоупругой жидкости Уолтерса характеристическая вязкость увеличивается с ростом интенсивности течения, поэтому происходит еще больший сдвиг (кривая 6) по сравнению с ньютоновской жидкостью (кривая 4). Вязкоупругая жидкость Олдройда оказывает противоположное влияние.

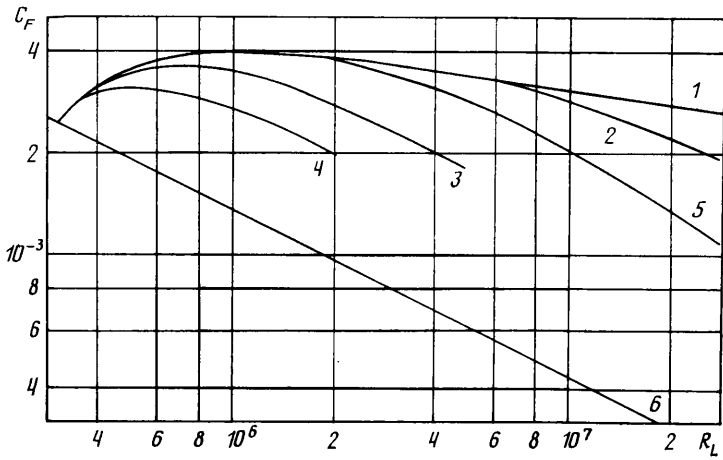
На фиг. 4 приведены кривые коэффициента полного сопротивления трения  $C_F$  плоской пластины с податливой поверхностью, рассчитанные интегральным методом [8] с использованием профиля скорости (1.7):  $\mu_1=1$ , кривая 1 –  $H_L=h/L=0$  (твердая поверхность),  $2 \cdot 2 \cdot 10^{-5}$ ,  $3 \cdot 2 \cdot 10^{-4}$ ,  $4 \cdot 5 \cdot 10^{-4}$ ; кривая 5 –  $\mu_1=10^3$ ,  $H_L=5 \cdot 10^{-4}$ , кривая 6 –  $C_F=1,328/\sqrt{R_L}$  (ламинарное течение),  $R_L=LU_0/\nu$ ,  $L$  – длина пластины,  $U_0$  – скорость вне пограничного слоя. Видно, что параметры податливой поверхности оказывают такое же влияние, как и на течение в трубе.

Исследование пограничного слоя на плоской пластине позволяет рассмотреть вопрос о влиянии свойств податливого покрытия, меняющихся по длине пластины, на турбулентный поток. Изменение физических свойств подстилающей жидкости реализовать трудно, а изменение толщины слоя по длине – достаточно просто. Было рассмотрено линейное по длине увеличение толщины подстилающей ньютоновской жидкости с  $\mu_1=1$

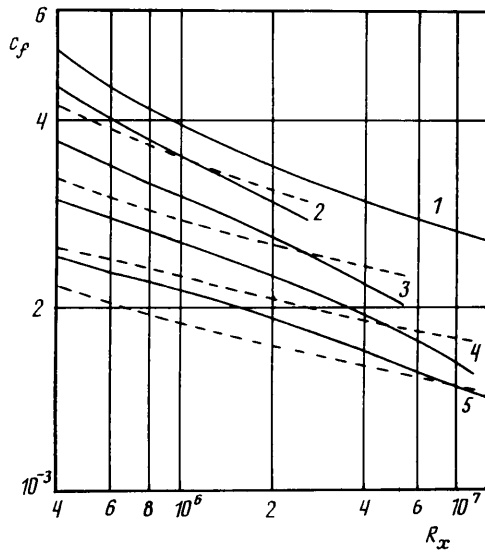
$$H_L = H_L^0 + H_L^* \left( \frac{R_x - R_x^0}{R_L - R_x^0} \right)$$



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

где  $H_L^0$  — толщина в начале участка с упругим покрытием,  $H_L^*$  — добавочная толщина на конце пластины,  $R_x = xU_0/\nu$ ,  $x$  — координата по длине пластины,  $R_{x^0} = x_0U_0/\nu$ ,  $x_0$  — координата начала участка с упругим покрытием.

На фиг. 5 приведены кривые местного коэффициента сопротивления: кривая 1 — жесткая поверхность, 2 —  $R_L = 2,72 \cdot 10^6$ , 3 —  $5,58 \cdot 10^6$ , 4 —  $9,3 \cdot 10^6$ , 5 —  $1,46 \cdot 10^7$ . Сплошные линии соответствуют переменной толщине с  $H_L^0 = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $H_L^* = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $R_{x^0}/R_L = 10^{-2}$ ; штриховые линии соответствуют постоянной средней толщине  $H_L = 7,5 \cdot 10^{-5}$ . Там, где местная толщина меньше средней толщины, значение эффекта снижения трения меньше. При больших  $R_x$  местная толщина больше средней и эффект снижения трения проявляется больше. Но при этом коэффициент полного сопротивления для сплошных и штриховых линий один и тот же.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bushnel D. M., Hefner J. N., Ash R. L.* Effect of compliant wall motion on turbulent boundary layers // *Phys. Fluids*. 1977. V. 20. № 10. P. S31–S48.
2. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.
3. *Пилипенко В. Н., Курейко Г. В.* Влияние вязкоупругих свойств жидкости на пристенную турбулентность // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267. № 3. С. 578–583.
4. *Семенов Б. Н.* Влияние упругих покрытий на турбулентный пограничный слой // Исследования по управлению пограничным слоем. Новосибирск: Ин-т теплофизики, 1976. С. 92–101.
5. *Трифонов Г. Ф.* О двух подходах к постановке задачи Прандтля для вязкоупругой границы // Турбулентные сдвиговые течения неньютоновских жидкостей. Новосибирск: Ин-т теплофизики, 1981. С. 82–89.
6. *Tsahalis D. T.* On the theory of skin friction reduction by compliant wall // *AIAA Pap.* 1977. № 686. P. 1–11.
7. *Пилипенко В. Н.* Трение и теплообмен при турбулентном течении слабых полимерных растворов в гладких трубах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 5. С. 53–59.
8. *Гиневский А. С., Иоселевич В. А., Колесников А. В. и др.* Методы расчета турбулентного пограничного слоя // Итоги науки и техники: Механика жидкости и газа. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978. С. 155–304.

Макеевка

Поступила в редакцию  
12.V.1988