

УДК 532.5.013.4

© 1990 г.

И. О. КЕЛЛЕР, Е. Л. ТАРУНИН

УПРАВЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТЬЮ КОНВЕКТИВНОГО РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ, ПОДОГРЕВАЕМОЙ СНИЗУ

Вопросы оптимизации технических устройств во многих случаях приводят к необходимости реализации методами управления распределенных параметров неустойчивых, но выгодных с технологической точки зрения состояний. Проблема реализации неустойчивых состояний интересна и с теоретической точки зрения. В обзоре [1] по указанной проблеме приведены примеры задач, в которых возможна реализация потенциально неустойчивых стационарных состояний систем с распределенными параметрами. Среди этих примеров содержится и задача о конвективном равновесии жидкости при подогреве снизу, во многом аналогичная задаче, рассмотренной в данной статье. В [1] вопросы устойчивости исследовались на основе линеаризованных уравнений и граничных условий. В данной работе стабилизация потенциально неустойчивого равновесия достигалась с помощью управления по принципу одноканальной обратной связи с использованием характеристик решения полных нелинейных уравнений тепловой конвекции. Уравнения конвекции решались методом конечных разностей.

1. Исследуемое конвективное течение вязкой несжимаемой жидкости описывается системой уравнений свободной конвекции в приближении Буссинеска [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} - g \beta T \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T = \chi \Delta T \end{aligned} \quad (1.1)$$

При записи системы использованы обычные обозначения. Искомыми функциями являются \mathbf{v} — вектор скорости, T — температура, p — превышение давления над гидростатическим.

Геометрия плоской области, в которой отыскивается решение, изображена на фиг. 1. Граничные условия задачи соответствуют прилипанию вязкой жидкости на неподвижных непроницаемых границах прямоугольной области, заданным значениям температуры на горизонтальных участках и теплоизолированным боковым границам

$$\mathbf{v}|_{\Gamma} = 0, \quad T(x, 0, t) = T_1 + A(t)(L - 2x) \quad (1.2)$$

$$T(x, H, t) = T_0, \quad \frac{\partial T(0, y, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T(L, y, t)}{\partial x} = 0 \quad (1.3)$$

Здесь T_0 , T_1 — постоянные значения температуры, причем $T_1 > T_0$ (подогрев снизу). В задаче об устойчивости конвективного равновесия без управления $A(t) = 0$.

После обезразмеривания и перехода к функции тока ψ и вихрю скорости ϕ система (1.1) принимает вид

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \Delta \phi + G \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.4)$$

$$\Delta\psi + \varphi = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T$$

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi = (\text{rot } \mathbf{v})_z$$

При обезразмеривании в качестве единиц расстояния, времени и характерной разности температур выбраны соответственно H , H^2/ν , $\theta = T_1 - T_0$.

В систему (1.4) входят два безразмерных параметра — числа Грасгофа и Прандтля $G = g\beta\theta H^3/\nu^2$, $\text{Pr} = \nu/\chi$. Решение задачи зависит от G , Pr , отношения сторон $l = L/H$ и функции управления, определяющей значение температуры на нижней границе $T(x, 0, t) = 1 + a(t)(l - 2x)$.

При отсутствии управления ($a = 0$) задача имеет равновесное решение

$$\psi^0(x, y) = 0, \quad T^0(x, y) = 1 - y \quad (1.5)$$

Равновесное решение теряет устойчивость при превышении числом Рэлея соответствующих критических значений $R_i = \text{Pr } G_i$, $i = 1, 2, \dots$. Критические числа Рэлея находятся из решения соответствующей линейной задачи на собственные значения [2].

Зависимость первых двух уровней неустойчивости от l изображена на фиг. 2. Зависимость построена по результатам серии расчетов методом сеток по методике работы [3]. Первое критическое значение $R_1(l)$ соответствует возмущению в виде одновихревой структуры течения, а $R_2(l)$ — возмущениям в виде двухвихревой структуры (течение типа «кошачьи глаза»). Как видно, при $l > l_* \approx 1,7$ возмущение в виде двухвихревой структуры становится более опасным, так как в этом случае $R_1(l) > R_2(l)$. Выбранный в работе способ управления оказывается эффективным в области $R_1(l) < R < R_2(l)$.

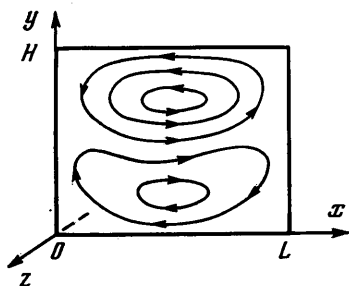
В надкритической области ($R > \min_i R_i$) при отсутствии управления равновесное решение (1.5) неустойчиво. В результате развития неустойчивости после стадии переходного процесса реализуется нелинейный надкритический режим конвекции. Для нахождения этого режима необходимо решить полные уравнения конвекции (1.4). Примером исследования методом сеток надкритической конвекции в замкнутой полости может служить работа [4].

Эволюционные уравнения из (1.4) решались по двухслойной явной схеме на равномерной пространственной сетке с аппроксимацией конвективных слагаемых центральными разностями. Уравнение Пуассона для функции тока на каждом шаге по времени решалось итерационным методом последовательной верхней релаксации. Вихрь скорости на границах вычислялся по формуле Тома [5]. Процедура счета соответствовала работе [4].

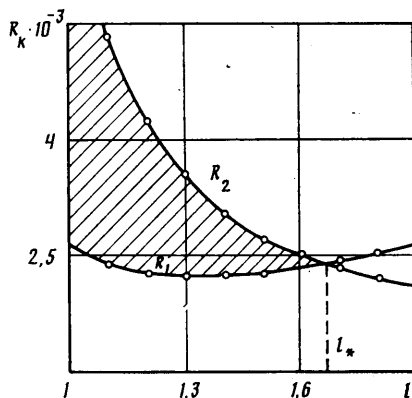
2. Основные вычисления выполнены при фиксированных значениях числа $\text{Pr} = 1$ и отношения сторон полости $l = 1$ (квадратная область).

Прежде чем обсуждать результаты с управлением, опишем поведение возмущений в надкритической области при отсутствии управления. В качестве начального состояния использовалось равновесное решение с возмущением в виде вихря в центральном узле $\psi(l/2; 0,5) = \pm 10$. Для установления стационарного течения при надкритичности R/R_1 больше двух характерны два этапа. На первом этапе после сравнительно быстрого согласования начального возмущения с критическим возмущением [3] начинается рост интенсивности течения. После достижения первого максимального значения следует этап затухающих колебаний. Вблизи порога установление осуществляется монотонно без этапа затухающих колебаний. Длительность каждого из этапов при $R = 6000 - 7000$ около 0,3 единиц безразмерного времени. Знание о длительности первого этапа дает оценку сверху для периода переключения управляющей функции.

Перейдем к обсуждению стационарных решений. Зависимость экстремальных стационарных значений функции тока ψ_e от числа Рэлея изобра-



Фиг. 1



Фиг. 2

жена на фиг. 3 штриховой линией. Изображены обе ветви решения — с вращением жидкости по часовой стрелке ($\psi_e < 0$) и против ($\psi_e > 0$). При амплитуде управления, равной нулю, обе ветви равноправны. Вблизи порога справедлив корневой закон для выбранной амплитуды течения ($R_1 \approx 2700$)

$$\psi_e \approx \pm 8,3 \cdot 10^{-2} \sqrt{R - R_1} \quad (2.1)$$

Если амплитуда управления $a \neq 0$, поле температуры не удовлетворяет равновесному решению и при любом числе Рэля возникает конвективное течение. Для выяснения влияния параметра управления a на характер и амплитуду течения была выполнена серия расчетов с постоянными во времени значениями $a = -0,1; -0,5; -1$. Расчеты выполнены на сетке с шагом $h = 1/15$.

Ветви стационарных решений, изображенных на фиг. 3 сплошными линиями в случае $a \neq 0$, зависят от направления вращения жидкости. Ветвь с положительным значением функции тока (вращение против часовой стрелки) при $a < 0$ становится предпочтительной («благоприятной»), а ветвь с противоположным направлением вращения имеет уменьшенную амплитуду и реализуется не при всех числах Рэля. Кроме того, выход на неблагоприятную ветвь требует специальных начальных состояний с конечной амплитудой. Обсуждаемый характер ветвления решений аналогичен случаям, рассмотренным в [6, 7]. На фиг. 3 изображены четыре ветви при $a \neq 0$ (сплошные линии). Три верхние ветви с номерами 1–3 соответствуют значениям $a = -1; -0,5; -0,1$. Нижняя ветвь с номером 4 получена при $a = -0,1$. Неустойчивая часть этой ветви изображена пунктирной линией. Важными характеристиками нижней ветви являются значения R_* и ψ_* . Нижняя ветвь реализуется только при $R > R_*$ с амплитудой, большей $|\psi_*|$.

Приведенные на фиг. 3 амплитуды решений относятся к случаю $a < 0$ (подогрев слева). При $a > 0$ (подогрев справа) ветви меняются ролями — верхние оказываются неблагоприятными, а нижние благоприятными. С позиции управления представляет интерес возможность с помощью изменения величины a уменьшить интенсивность конвекции до формирования течения с иным направлением вращения. Такая перестройка течения происходит при переходе с нижней ветви на верхнюю. Дадим пояснения к обсуждаемому переходу. Увеличение модуля $|a|$ (знак зависит от направления) при $a \psi_e > 0$ снижает интенсивность течения до значений ψ_* (см. нижнюю ветвь на фиг. 3). Дальнейшее увеличение $|a|$ приведет к перестройке течения и после процесса установления течение будет соответствовать благоприятной ветви.

Заканчивая обсуждение результатов ветвления, подчеркнем еще раз, что результаты, представленные на фиг. 3, соответствуют стационарным

решениям. При включении управления с $a=a(t)$ процесс становится существенно нестационарным.

Перейдем к описанию испытанных способов управления. Были опробованы три варианта зависимости амплитуды управления от экстремальных значений функции тока:

$$\psi_{\max} = \max \psi(x, y), \quad \psi_{\min} = \min \psi(x, y), \quad \psi_M = \max(\psi_{\max}, |\psi_{\min}|).$$

Экстремальные значения функции тока характеризуют интенсивность вихрей различного направления вращения. Иными словами, обратная одноканальная связь в управлении осуществлялась по интенсивности течения. В лабораторных экспериментах интенсивность конвективного течения проще измерять по значениям температуры в характерных точках области. Поэтому часть расчетов была выполнена с использованием для обратной связи отклонения температуры на середине боковой поверхности от равновесного значения $\delta T = T(0; 0,5) - 0,5$. Расчеты позволили найти простую зависимость ($G=5000 \pm 1000$)

$$\psi_M \approx (4,3 + 2,6 \cdot G \cdot 10^{-3}) \delta T \quad (2.2)$$

Найденная связь позволяет считать оба способа в некотором смысле эквивалентными.

Опишем вычислительные эксперименты с использованием первого варианта управления

$$a_1(t) = 0 \quad (\psi_M < \Psi); \quad a_1 = c \quad (\psi_{\max} > \Psi); \quad a_1 = -c \quad (\psi_{\min} < -\Psi) \quad (2.3)$$

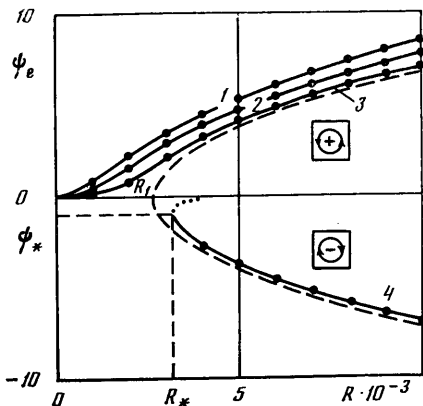
Здесь c , Ψ — задаваемые параметры. Смена значения амплитуды $a_1(t)$ происходит скачкообразно, т. е. $a_1(t)$ — ступенчатая функция. В установившемся периодическом режиме может реализоваться случай с одним ненулевым значением a_1 (течение без смены знака основного вихря) и с двумя (течение со сменой направления вращения). Характер установившегося режима зависит от числа Рэля и параметров управления.

На фиг. 4 представлены зависимости экстремальных значений функции тока от времени при $R=6000$, $c=0,1$, $\Psi=0,1$. Линии 1 соответствует ψ_{\max} , а линиям 2, 3 — значение $-\psi_{\min}$. Значение $\Psi=0,1$ отмечено на фигуре горизонтальной штриховой линией. Как видно, после $t > 0,2$ устанавливается периодический во времени режим течения. Интервалы времени, в которых $a_1 \neq 0$, отмечены на оси штриховкой. После включения тормозящего нагрева сбоку формируется вихрь противоположного направления вращения. Этот факт легко просматривается как по картинкам изолиний функции тока, так и по значениям ψ_{\min} на фиг. 4. Характер течения в момент максимальной интенсивности вихря противоположного знака качественно изображен на фиг. 1 (этот момент времени отмечен кружками на линиях 1, 3, фиг. 4). В другие моменты времени нижний вихрь занимает меньшую часть области или исчезает совсем. На интервале торможения вначале $\psi_{\max}(t)$ продолжает расти, достигает максимума, а затем начинает убывать. В дальнейшем при $\psi_{\max}(t) < \Psi$ тормозящее управление отключается, но убыль $\psi_{\max}(t)$ продолжается. Затем эта величина достигает минимума, начинает расти и после достижения значения Ψ вновь включается управление. Далее процесс повторяется.

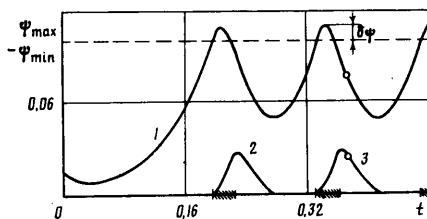
Качеством управления могут служить две характеристики — Ψ и превышение функций тока этого значения на стадии торможения, нормированное на Ψ

$$\delta\psi = \max(\psi_{\max}(t) - \Psi) / \Psi \quad (2.4)$$

Для случая, изображенного на фиг. 4, $\delta\psi \approx 11\%$ ($h=1/4$). Что касается Ψ , то ее имеет смысл сравнивать с максимальным значением функции тока без управления. Для рассматриваемого случая это отношение составляет около 2%.



Фиг. 3



Фиг. 4

Управление выполнялось также при других значениях параметров c и Ψ . Выяснено, что при $c=0,01$ удается ($R \leq 7000$) удерживать решение вблизи $\Psi=0,01$.

При втором варианте управления амплитуда $a(t)$ вычислялась по формуле, обеспечивающей смену знака амплитуды управления $a_2(t)$ в моменты перехода экстремальным значением функции тока ψ_M величины порога Ψ . При $\psi_{\max} > |\psi_{\min}|$ значение $a_2 = +c$, в противном случае $a_2 = -c$.

В этом варианте управления в установившемся во времени режиме обязательно происходит смена основного направления вращения, период установившегося режима течения короче, а величина $\delta\psi$, характеризующая качество управления, выше.

Для параметров, которым соответствуют результаты, представленные на фиг. 4, в первом случае $\delta\psi \approx 11\%$, а во втором $\approx 14\%$. Второй вариант управления следует признать менее удачным еще и потому, что он требует постоянного включения управления. Для сравнения отметим, что в первом варианте значение $a \neq 0$ лишь на $1/5$ части периода.

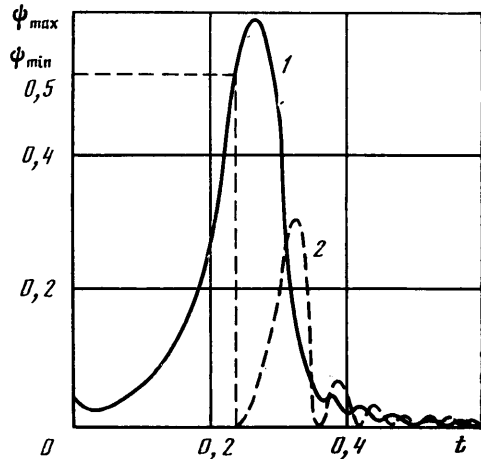
Обсудим результаты третьего варианта управления, в котором амплитуда $a(t)$ вычислялась по текущему значению экстремума функции тока: $a_3(t) = f(\psi_M)$. Для выбора функции была выполнена серия вычислительных экспериментов. Поясним суть этих экспериментов. При выбранных значениях c и Ψ находился установившийся периодический режим при вычислении амплитуды управления по первому варианту. Затем параметр Ψ сохранялся, а параметр c уменьшался и находился новый установившийся периодический режим. Уменьшение c выполнялось до значения c_0 , при котором удержать решение вблизи равновесия не удастся. Обработка результатов этих экспериментов позволила получить при $R=6000$ зависимость вида

$$c_0 \approx k\sqrt{\Psi}, \quad k \approx 0,36, \quad 0,1 < \Psi < 2 \quad (2.5)$$

Величина c_0 является наименьшим значением c , которое дает возможность выйти на периодический режим с значением максимума функции тока около Ψ . Естественно выбирать $c > c_0$. С другой стороны, большие значения c требуют резкой смены температуры на границе и дают плохой показатель качества управления по величине $\delta\psi$ (2.4). Учитывая отмеченные обстоятельства, вычислительные эксперименты выполнялись со значением $k=0,4$ по формуле

$$a_3(t) = 0,4\sqrt{\psi_M} (\psi_M > |\psi_{\min}|); \quad -0,4\sqrt{\psi_M} (\psi_M > \psi_{\max}) \quad (2.6)$$

На фиг. 5 показано поведение во времени экстремальных значений функции тока при использовании амплитуды управления в виде (2.6). Линия 1 соответствует зависимости $\psi_{\max}(t)$, а линия 2 — $|\psi_{\min}(t)|$. Управление было включено с момента времени, при котором было достигнуто максимальное значение функции тока, равное 0,5. С этого момента включилось тормозящее действие за счет подогрева сбоку. С момента включения управления началось и формирование вихря противоположного знака и через $t \approx 0,09$ достигнут максимум модуля $|\psi_{\min}|$, который характеризует интенсивность вихря другого знака. Достигнутый максимум примерно вдвое меньше максимума во времени ψ_m . В дальнейшем процесс затухающих колебаний продолжается и после $t \approx 0,45$ устанавливаются регулярные пульсации с амплитудой $\psi_m \approx 0,01$.



Фиг. 5

Из приведенных результатов следует, что третий способ управления оказывается наилучшим. Он имеет меньшее число параметров и позволяет снизить интенсивность течения с любого уровня до практически нулевого. Способ опробован при различных значениях чисел Рэлея и Прандтля и показал свою работоспособность. При увеличении числа Прандтля, как и следовало ожидать, возрастает период установившихся колебаний.

Область значений R и l , в которой управление эффективно, отмечена на фиг. 2 штриховкой. В этой области числа Рэлея $R < R_2(l)$ и возмущения в виде двухвихревой структуры не опасны. Опишем вычислительный эксперимент, в котором значение числа $R = 7000$ при $l = 1, 2$ превышало критическое значение $R_2 \approx 4400$. При выбранных параметрах управление с использованием из (1.2) формулы для температуры оказалось невозможным — после $t \approx 0,5$ начался рост конвективного течения в виде системы двух вихрей. Для расширения области управления до более высоких чисел Рэлея необходимо использовать многоканальную систему с привлечением более подробной информации о структуре возникающего конвективного течения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бучин В. А. Стабилизация неустойчивых состояний распределенных механических систем // Механика и научно-технический прогресс. Т. 2. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. С. 164—184.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
3. Таруни Е. Л. Определение границы конвективной устойчивости равновесия жидкости методом сеток // Алгоритмы и программы для ЭВМ. Пермь, 1978. С. 85—103. — Деп. в ВИНТИ 31.05.78, № 1803—78.
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Таруни Е. Л. Численное исследование конвекции жидкости, подогреваемой снизу // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 6. С. 93—99.
5. Роч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
6. Чернагынский В. И., Шлюмис М. И. Конвекция вблизи критических чисел Рэлея при почти вертикальном градиенте температуры // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 1. С. 64—70.
7. Таруни Е. Л. Ветвление решений уравнений конвекции в замкнутой полости с подвижной границей при подогреве снизу // Современные проблемы тепловой гравитационной конвекции. Минск, 1974. С. 51—58.

Пермь

Поступила в редакцию
14.VII.1989