

УДК 532.517.4:536.253

© 1990 г.

**В. А. АНДРУЩЕНКО, А. А. ГОРБУНОВ, Х. С. КЕСТЕНБОЙМ,
Л. А. ЧУДОВ**

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ КРУПНОМАСШТАБНЫХ ТЕРМИКОВ

Закономерности подъема одиночных термиков концентрационной и тепловой природы в стратифицированных средах (случай осесимметричного течения) достаточно полно исследованы (см. [1–5] и цитируемую там литературу). В последние годы внимание привлекают более сложные постановки задач, связанные с учетом трехмерности явлений. Так, в ряде экспериментальных работ исследуется процесс взаимодействия всплывающих вдоль параллельных осей вихрей или термиков. При этом обнаружены новые механические эффекты: например, выяснено, при каких условиях происходит объединение или разрушение взаимодействующих тороидальных вихрей [6, 7], установлен факт перезамыкания колец с образованием моновихря и его инерционного распада на новую вихревую пару [8, 9].

Отметим, что описанные выше работы выполнены в условиях лабораторного эксперимента, отличающегося от натурального явления прежде всего малыми числами Рейнольдса. Поэтому при изучении взаимодействия крупномасштабных термиков, когда организация эксперимента затруднительна, на первый план выходит проблема численного моделирования явления. Прямой расчет пространственного течения — трудоемкая задача, которая в данном случае еще более усложняется из-за необходимости учитывать турбулентный характер движения. Существует два подхода в решении этой проблемы в практике расчета подъема термиков. Один подход наиболее последовательно реализован в [5], где конвективная стадия, включающая процесс формирования из термика тороидального вихря, рассматривается на базе уравнений Эйлера, а турбулентность учитывается на стадии движения вихревого кольца посредством привлечения уравнений турбулентного переноса. К другому направлению относятся работы [2–4], где в качестве математической модели явления используется система уравнений Навье — Стокса теплопроводного газа с эффективными коэффициентами турбулентного переноса, определяемыми по некоторым интегральным характеристикам течения на автомоделльной стадии всплывания термиков. Эта простейшая полумэмпирическая теория турбулентности, обоснованная для данного класса задач в [3, 4], принята в настоящей работе.

Численное моделирование трехмерных явлений стало возможным с появлением нового поколения ЭВМ с конвейерной обработкой больших числовых массивов. В настоящей работе развита разностная методика расчета пространственных крупномасштабных конвективных движений в атмосфере, ориентированная на спецпроцессор МАМО конвейерно-векторного типа, образующий единый вычислительный комплекс с ЭВМ ЕС-1055М [10]. С помощью этой методики получено решение задачи о взаимодействии двух термиков, всплывающих в атмосфере вдоль параллельных осей. Рассмотрены различные варианты начального расположения термиков, описан процесс объединения облаков, получено, что траектория подъема центра моновихря фактически не отличается от аналогичной траектории для одного из термиков пары.

1. Исходная система уравнений в безразмерных переменных имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{T}{\gamma M^2} \frac{\partial P}{\partial x} + \\ &+ \frac{T \exp(-P)}{\text{Re}} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{T}{\gamma M^2} \frac{\partial P}{\partial y} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{T \exp(-P)}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) \\
& \quad \frac{dw}{dt} = - \frac{T}{\gamma M^2} \frac{\partial P}{\partial z} - 1 + \\
& + \frac{T \exp(-P)}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) \\
& \quad \frac{dP}{dt} = - \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\gamma \exp(-P)}{\text{Re Pr}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2.1) \\
& \quad \frac{dT}{dt} = - (\gamma - 1) T \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\gamma T \exp(-P)}{\text{Re Pr}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \\
& \quad p = \rho T, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}$$

Обозначения традиционные, u , v , w — проекции скорости на декартовы оси x , y , z ; уравнение неразрывности в системе (2.1) заменено соотношением для давления, причем сделано преобразование $P = \ln p$, обеспечившее удобную для векторных операций запись системы уравнений.

При введении безразмерных переменных в качестве масштабов длины, температуры и давления использовались высота однородной атмосферы Δ и начальные атмосферные параметры T_0 , p_0 . Все указанные величины находятся из таблиц стандартной атмосферы [11] в соответствии с начальной высотой H_0 термика. Величины $\sqrt{\Delta g}$ и $\sqrt{\Delta}/g$ задают масштабы скорости и времени. Течение определяется турбулентными числами Рейнольдса и Прандтля, выбираемыми в пределах $\text{Re} = 200-1000$, $\text{Pr} = 0,7-1,0$. Влияние сжимаемости характеризуется числом Маха ($M = 0,02-0,2$).

Система уравнений (2.1) решается в области, представляющей собой параллелепипед с подвижными границами

$$f_-(t) \leq x \leq f_+(t), \quad \varphi_-(t) \leq y \leq \varphi_+(t), \quad \psi_-(t) \leq z \leq \psi_+(t) \quad (2.2)$$

Два термика, центры которых разведены на некоторое расстояние по горизонтали (например, по оси x) и по высоте (оси z), моделируются с помощью задания в начальный момент тепловых неоднородностей с центрально-симметричным распределением температуры. В процессе эволюции неоднородностей сохраняется симметрия течения по координате y . С учетом этих обстоятельств начальные и граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned}
t = t_0; \quad u = v = w = 0, \quad T = 1 + \sum_{i=1}^2 (T_s - 1) \exp[-(3R_i/R_0)^2] \\
p = p_a(z), \quad R_i = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{1/2} \\
x = f_{\pm}(t); \quad u = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad p = p_a(z), \quad T = T_a(z) \\
y = \varphi_-(t); \quad v = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad p = p_a(z), \quad T = T_a(z) \\
y = 0; \quad v = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \\
z = \psi_{\pm}(t); \quad w = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad p = p_a(\psi_{\pm}), \quad T = T_a(\psi_{\pm})
\end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь $p_a(z)$, $T_a(z)$ — атмосферные давление и температура [11], T , — температура в точке x_i , y_i , z_i (центре шарообразного термика радиуса R_0); рассматриваются два варианта начального разведения центров облаков: $L_x = |x_1 - x_2| = 3R_0$, $L_z = |z_1 - z_2| = 0$ и $L_x = 3R_0$, $L_z = R_0$.

2. Методика расчета задачи основана на использовании явной трехшаговой схемы расщепления, близкой к схеме [12] и обобщенной на трехмерный случай. На первом шаге система дифференциальных уравнений (2.1) за вычетом диссипативных членов аппроксимируется разностными уравнениями с помощью схемы Лакса. На втором шаге искомые функции пересчитываются на верхнем слое с помощью схемы «крест»; на третьем этапе осуществляется аппроксимация диссипативных членов. Расчет указанных вариантов проводится на достаточно подробных сетках: $71 \times 16 \times 75$ (85 200 узлов) и $71 \times 24 \times 75$ (127 800 узлов) соответственно.

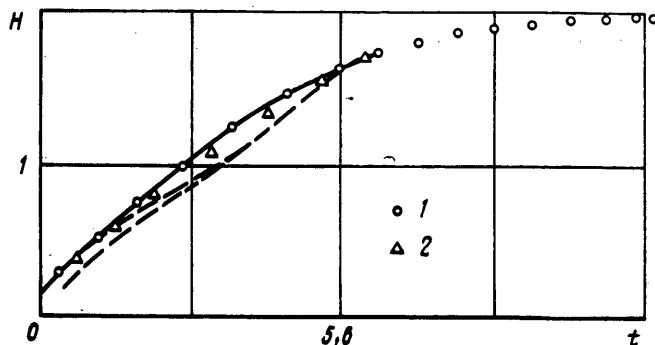
Выбор явной схемы обусловлен особенностью процессора МАМО ЕС-1055М, способного осуществлять арифметические операции сложения, вычитания и умножения с векторами, а также вычисления полиномов от компонент вектора [13], что дает возможность рассчитывать экспоненты. Эффективность указанных МАМО-операций становится оптимальной в случае использования векторов достаточно большой (10^3 – 10^4 компонент) размерности, что легко реализовать при применении явной схемы. Так, при вычислениях массивы значений искомых функций в узлах трехмерной разностной сетки интерпретируются как одномерный массив-вектор соответствующей размерности. Оказывается, что использование МАМО гарантирует ускорение счета, с избытком компенсирующее потери времени из-за ограничения на величину временного шага при интегрировании системы (2.1) с помощью явной схемы.

Тестирование трехмерной методики осуществлялось с помощью расчета хорошо изученной осесимметричной задачи о подъеме облака горячего газа в атмосфере Земли. Рассматривался объект с параметрами $R_0 = 0,17 \Delta$, $T_a = 12,3 T_0$ ($Re = 10^3$). Траектория таких крупномасштабных облаков имеет ярко выраженные участки подъема по автомодельному закону и зависания [14]. Расчет, выполненный в настоящей работе по трехмерной методике (фиг. 1, сплошная кривая), показал хорошее качественное соответствие данным [14]. О точности методики можно судить по сравнению сплошной кривой на фиг. 1 с соответствующими данными подъема осесимметричного термика (I), полученного по аналогичной двумерной методике. Тестовые расчеты были проведены до момента $t = 5,6$ (910 слоев по времени) и показали, что максимальные отклонения между двумерными и трехмерными расчетами не превосходили 5–8% (для функции w в области больших градиентов).

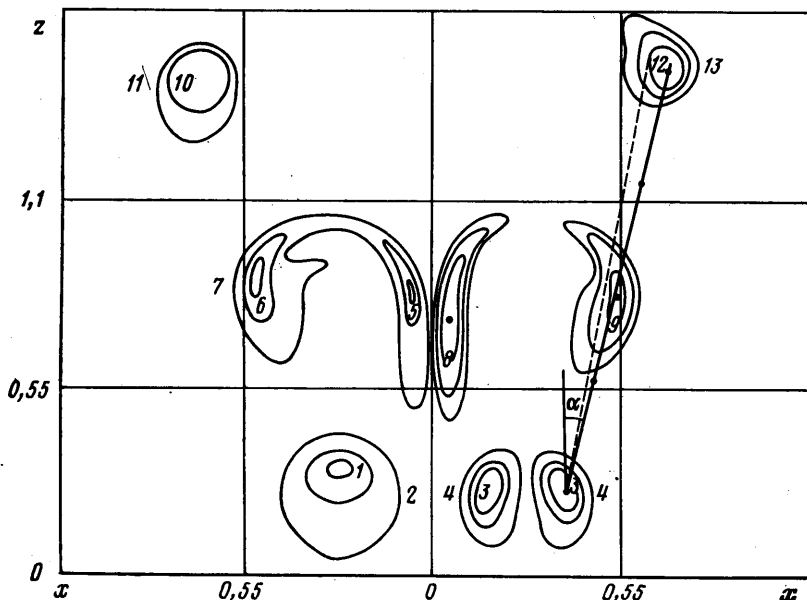
3. Приведем некоторые результаты численного моделирования процесса взаимодействия пары термик. Рассмотрим сперва вариант с симметричным расположением облаков, разнесенных в начальный момент по горизонтали так, что минимальное расстояние между условными границами тепловых неоднородностей шарообразной формы равно радиусу R_0 . Параметры каждого из термик пары соответствуют указанным в разд. 2 данным.

На фиг. 2 показана эволюция одного из термик пары на большом отрезке времени. Для трех моментов времени $t = 0,35$, 2,1 и 4,2 представлены поля изотерм (левая часть рисунка) и линии равной завихренности (правая) в плоскости симметрии ZX. Рассматриваемые изолинии отвечают правому термику пары.

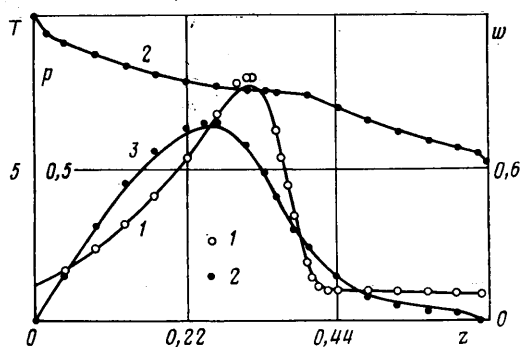
Расчеты показывают, что до $t = 0,35$ подъем, увеличение объема и остывание термик происходят так же, как в случае одиночного объекта. На этой ранней стадии вихревые поля, образовавшиеся около каждого из термик, практически не взаимодействуют друг с другом (нижняя часть фиг. 2). Поля температуры симметричны относительно вертикальной оси, по которой всплывает облако. Как обычно, наиболее нагретая часть газа смещается от геометрического центра термика к верхней кромке, где наблюдается сгущение изотерм (изотермы с номерами 1, 2 отвечают $T = 6,7$ и 1,4). Деформация скоростного поля происходит более активно: конфигурация изолиний $\omega = \text{const}$ указывает на процесс образования кольцевого вихря. Изолинии 3, 4 со значениями $|\omega| = 2,1$ и 0,85 отмечают два вращающихся в разные стороны ядра симметричной вихревой структуры. На фиг. 3 построены распределения температуры T (кривая 1), давления $p(2)$ и вертикальной компоненты скорости $w(3)$ вдоль оси правого термика ($t = 0,35$). Там же точками



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

1 и 2 показаны соответствующие результаты тестового расчета для одиночного объекта; можно отметить практическое совпадение данных.

По мере усиления циркуляционных движений и вовлечения в них все больших масс окружающего воздуха тела вихрей приходят в соприкосновение, что постепенно оказывает влияние на динамику подъема термик. Так, примерно к $t=0,7$ нарушается осевая симметрия каждого термика,

сближенные части вихревых структур несколько отстают при подъеме от более удаленных, что приводит к некоторому перекосу образующихся вихревых колец. Этот процесс накладывает также заметный отпечаток на эволюцию температурного поля в термиках.

На фиг. 2 (средняя часть рисунка) демонстрируется картина изолиний в сечении правого термика в момент $t=2,1$. Точка с максимальным нагревом располагается уже не на оси термика — в объеме имеют место две замкнутые изотермы, отмечающие локальные температурные максимумы (см. [5]). Обращает внимание пространственный эффект, обусловленный взаимодействием термиком: в ближнем к центру симметрии пары сечении кольцевого вихря температура падает быстрее (изотерма 5 отвечает $T=1,33$), чем в более удаленном от этого центра сечении (изотерма 6 отвечает $T=1,57$). Внешняя изотерма 7 в сечении термика отвечает $T=1,03$ и ее конфигурация не позволяет утверждать, что формирование температурного тора закончено (этот процесс завершается приблизительно к $t=2,5$).

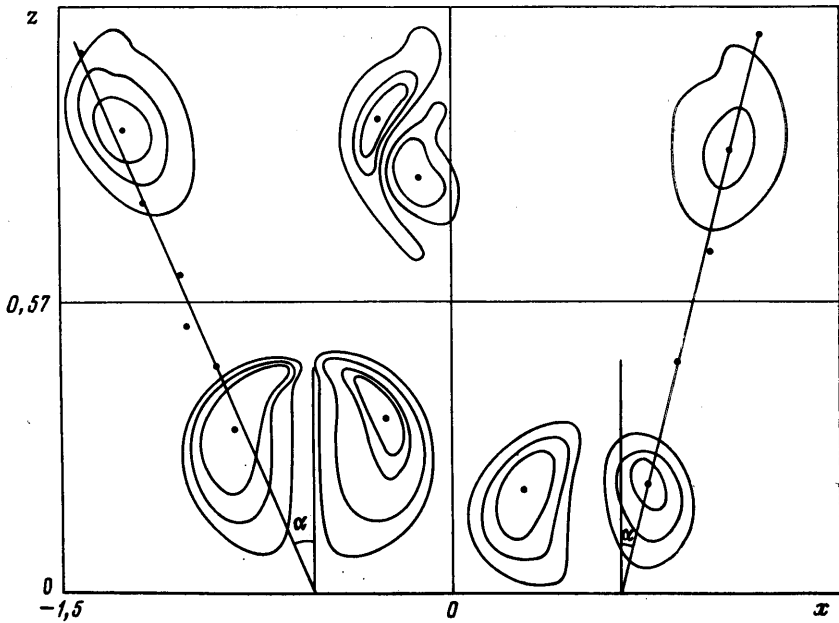
Под влиянием взаимодействия вихревое кольцо, захватывающее всю нагретую область, также деформируется, что видно из сравнения замкнутых изолиний $\omega = \text{const}$, отвечающих одинаковым по модулю значениям завихренности. Центральные изолинии 8, 9 соответствуют $\omega = -2,34$ и $+2,34$, остальные отвечают убывающим значениям модуля завихренности с шагом $\Delta\omega = 0,56$. По расположению центров замкнутых изолиний, соответствующих локальным экстремумам завихренности в сечениях кольца (отмечены точками, см. среднюю часть фиг. 2), фиксируется заметный перекося вихревого тора. В итоге оси правого и левого термиком, вдоль которых объекты перемещаются, наклоняются друг к другу, и идет процесс слияния двух вихревых структур в моновихрь.

Схема, по которой происходит объединение вихревых колец, описана впервые в [6]. В области касания тороидальных вихрей векторы завихренности равны по модулю и имеют противоположные направления. При слиянии участков происходит диффузия завихренности и взаимная аннигиляция. После перемыкания вихревых линий образуется вихрь большего объема, не примыкающий всеми своими фрагментами к одной плоскости (существенно пространственный объект). Достоверность схемы подтверждена экспериментами, в которых исследовалось взаимодействие двух равных вихревых колец, маркированных разной краской [6]. При этом получался в ряде опытов устойчивый моновихрь, половины которого долгое время оставались окрашенными в разные цвета. Перемешивание осуществлялось за время, характерное для диффузионных процессов.

В настоящих расчетах образование единой вихревой структуры наблюдается к моменту $t=3,15$. Отчетливо идентифицируется также температурный тор с внутренней и внешней изотермами, отвечающими $T=1,16$ и $0,96$. Объединенное вихревое кольцо отслеживается в расчете до $t=4,2$ (см. верхнюю часть фиг. 2). Можно отметить выравнивание температуры в термике: изотермам 10, 11 отвечают значения $T=0,97$ и $T=0,93$. Изолинии 12, 13 отвечают значениям завихренности $\omega=1,03$ и $0,62$; видно, что из-за диффузии интенсивность вихревого движения в облаке уменьшается, приближается фаза зависания.

Перекося вихревых колец, отмечавшийся при описании начала взаимодействия термиком, очевидно, приводит к некоторому замедлению подъема пары по сравнению с дрейфом одиночного объекта с теми же параметрами. Это видно из фиг. 1, где приведены результаты расчета зависимости $H(t)$ для симметричной пары (2). После слияния двух термиком общий вихрь несколько ускоряется, однако результирующая кривая подъема практически не отличается от соответствующей кривой для одиночного термика.

Отметим еще одно интересное обстоятельство. Если в процессе слияния взаимодействие соприкасающихся частей колец происходит очень активно, вплоть до уничтожения перемычки, то их наиболее удаленные части реа-



Фиг. 4

гируют на слияние весьма слабо. Так, дальнейшее сечение тора плоскостью ZX продолжает смещаться в течение всего процесса взаимодействия по автомодельному закону $H \sim t^{1/2}$ и $R \sim t^{1/2}$, а следовательно, расширение и подъем подчиняются закону $dR/dH = \operatorname{tg} \alpha = \chi (\text{const})$. На фиг. 2 приведены траектории центра внешнего сечения правого кольца (сплошная линия) и одиночного кольца (штриховая прямая). Видно, что величина χ , соответствующая расчету симметричной пары, слабо отличается от значения $\chi = 0,25$, характерного для опытов с турбулентными термиками [15].

В заключение приведем некоторые результаты расчета подъема несимметричной пары термиков. Начальные условия выбраны так, что к моменту $t_1 = 0,35$, когда в расчетной области размещается вторая тепловая неоднородность со стандартными значениями параметров, первый термик успевает пройти расстояние $\sim R_0$ в направлении оси z и несколько увеличиться в объеме. По полю вектора скорости можно наблюдать образование двух вихревых колец разного радиуса, поднимающихся в атмосфере по параллельным осям. Как и в случае известной задачи о подъеме двух коаксиальных вихрей, нижнее кольцо, всплывая в следе, образованном верхним кольцом, начинает догонять последнее.

На фиг. 1 дрейф несимметричной пары термиков отмечен штриховыми кривыми. Хорошо видно, что траектории характерных точек сечения двух колец, связанных с максимумом завихренности, сближаются со временем. Вместе с тем кривая, характеризующая подъем несимметричной пары, отстает от соответствующей кривой для симметричной пары. Это объясняется тем, что верхнее вихревое кольцо, как обычно в «игре вихрей», тормозится скоростным полем, которое наводится нижним термиком.

На фиг. 4 приведены картины изолиний $\omega = \text{const}$ в сечении несимметричной пары колец плоскостью симметрии ZX в моменты $t = 0,75$ и $3,15$. Можно отметить, что замедление подъема отражается на величине угла раскрытия верхнего тороидального вихря; величина $\chi = dR/dH$ достигает значения $0,4$ (левая часть фиг. 4). Для нижнего кольца при этом оказывается, что $\chi = 0,24$.

Отметим также (см. верхнюю часть фиг. 4), что процесс взаимного уничтожения завихренности в сближившихся частях вихревых колец за-

тянут по времени. Возможно, этот процесс носит асимптотический характер: взрывному, активному слиянию термиков препятствует наличие заметной разницы в векторах завихренности взаимодействующих фрагментов несимметричной пары.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глазголева Ю. П., Жмайло В. А., Мальшаков В. Д. и др. Образование кольцевого вихря при всплывании легкого газа в тяжелом // Числ. методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1974. Т. 5. № 1. С. 38–52.
2. Андрущенко В. А. Образование кольцевого вихря при подъеме нагретой массы воздуха в стратифицированной атмосфере // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 2. С. 186–189.
3. Гостинцев Ю. А., Солодовник А. Ф., Лазарев В. В., Шацких Ю. В. Турбулентный термик в стратифицированной атмосфере: Препринт. Черногоровка: ИХФ АН СССР, 1985. 46 с.
4. Махвиладзе Г. М., Мелихов О. И., Якуш С. Е. Турбулентный осесимметричный термик в стратифицированной атмосфере: Препринт. Черногоровка: ИХФ АН принт № 303. М.: ИПМ АН СССР, 1987. 67 с.
5. Даринцев А. П., Забавин В. Н., Замышляев Б. В. и др. Особенности движения нагретой массы воздуха, первоначально помещенной в сферический объем, в атмосфере // Современные вопросы механики сплошной среды. М.: МФТИ, 1985. С. 126–135.
6. Fohl T., Turner J. S. Colliding vortex rings // Phys. Fluids. 1975. V. 18. № 4. P. 433–436.
7. Анохина Т. Н., Заславский Б. И., Согников И. М. Экспериментальное исследование взаимодействия термиков // ПМТФ. 1983. № 2. С. 23–27.
8. Izutsu N., Oshima K., Oshima Y. Experimental study of interacting vortex rings // Inst. Space and Astronaut. Sci. Rept. 1987. № SP5. P. 1–13.
9. Oshima Y., Izutsu N. Cross-linking of two vortex rings // Phys. Fluids. 1988. V. 31. № 9. P. 2401–2403.
10. Krause G. Der Matrixmodul MAMO und seine Anwendung // Neue Technik im Büro. 1982. № 4. S. 104–107.
11. Таблицы стандартной атмосферы. ГОСТ 4401–48. М.: Стандартизация, 1964.
12. Браиловская И. Ю., Кускова Т. В., Чудов Л. А. Разностные методы решения уравнений Навье – Стокса // Вычисл. методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1968. Вып. 11. С. 3–18.
13. Горбунов А. А., Мякина М. Н., Чудов Л. А. Программирование для матричного модуля MAMO на языке ФОРТРАН: Препринт № 279. М.: ИПМех АН СССР, 1986. 67 с.
14. Кудряшов Н. А., Простокишин В. М. Влияние высоты однородной атмосферы на динамику всплывания термика // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1985. Т. 21. № 6. С. 582–588.
15. Escudier M. P., Maxworthy T. On the motion of turbulent thermals // J. Fluid Mech. 1973. V. 61. № 3. P. 541–552.

Москва

Поступила в редакцию
23.VI.1989