МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1990

УДК 532.517.4

Н. И. ЯВОРСКИЙ

О ПАМЯТИ ФОРМЫ ОБТЕКАЕМОГО ТЕЛА В ДАЛЬНЕМ СЛЕДЕ

Рассматривается турбулентный след за равномерно движущимся телом произвольной формы. Одним из принципиальных вопросов движения вязкой жидкости является наличие памяти формы обтекаемого тела автомодельным турбулентным следом [1, 2]. Согласно классическим представлениям [3], дальний след полностью определяется силой сопротивления и скоростью набегающего потока. Однако эксперименты [1, 2] ставят под сомнение это утверждение.

Целью настоящей работы является исследование возможности памяти формы в рамках полных уравнений Навье – Стокса. Показывается, что для дальнего следа памяти формы не может быть вследствие ламинаризации течения. В области промежуточной асимптотики наличие памяти формы приводит к проблеме неэквивалентности источников и стоков импульса для автомодельного турбулентного следа, поскольку память формы для источника импульса не может иметь места. Указана асимптотика для дефекта средней скорости в следе.

Предполагается, что тело, погруженное в однородный поток вязкой жидкости, покоится. Скорость жидкости на бесконечности равна $\mathbf{v}_0$. Поскольку исследуется течение вдали от обтекаемого тела, удобно представить поля скорости и давления в виде

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)=\mathbf{v}_0+\mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \quad p=p_0+q(\mathbf{x}, t)$$

Здесь p_0 – давление, заданное на бесконечности. Будем исходить из уравнений Рейнольдса, записанных относительно «возмущения» $\mathbf{w}$, q $(\rho=1)$

$$\nu\Delta\mathbf{u}-(\mathbf{v}_0, \nabla)\mathbf{u}-\nabla P=(\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u}+\langle(\mathbf{w}', \nabla)\mathbf{w}'\rangle, \quad \operatorname{div}\mathbf{u}=0 \qquad (1)$$

$$\mathbf{u}=\langle\mathbf{w}\rangle, \quad P=\langle q\rangle, \quad \mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{w}'$$

где $\mathbf{u}$, P – средняя скорость и давление возмущенного движения. На поверхности тела Σ задана скорость $\mathbf{v}_*(\mathbf{s}, t)$, $\mathbf{s}\in\Sigma$, соответственно граничное условие для средней скорости есть $\mathbf{u}=\mathbf{u}_*(\mathbf{s})=\mathbf{v}_*-\mathbf{v}_0$. Уравнения (1) отличаются от стационарных уравнений Навье – Стокса наличием «источника» $\langle(\mathbf{w}', \nabla)\mathbf{w}'\rangle$, возникающего за счет напряжений Рейнольдса. Левая часть уравнений (1) представляет собой линейный оператор Озеена [4] для задачи обтекания тела однородным стационарным потоком. Уравнения Озеена довольно хорошо исследованы [4–6], в частности получено фундаментальное решение этих уравнений в виде «тензора скорости» $E_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ и «вектора давления» $e_j(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ [5]

$$E_{ij}=\delta_{ij}\Delta\Phi-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\,\partial x_j}, \qquad e_i=-\frac{\partial}{\partial x_i}[\nu\Delta\Phi-(\mathbf{v}_0, \nabla\Phi)],$$

$$\Phi=-\frac{1}{8\pi\sigma\nu}\int\limits_0^{\sigma s}\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\,d\alpha,$$

$$\sigma=|\mathbf{v}_0|/2\nu, \quad s=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|-\mathbf{n}_0(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad \mathbf{n}_0=\mathbf{v}_0/|\mathbf{v}_0|$$

Умножая (1) скалярно на фундаментальный тензор скорости $E_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ и вектор давления $e_j(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ и интегрируя по $\mathbf{y}$ по объему, занятому жидкостью, придем к интегральным уравнениям. Учитывая, что $\operatorname{div}\mathbf{w}'=0$ и операция усреднения перестановочна с операцией дифференцирования по координате, полученные выражения можно проинтегрировать по частям. В результате имеем

$$u_i(\mathbf{x})=\int\limits_E (u_ju_k+\langle w_j'w_k'\rangle)\frac{\partial}{\partial x_k}E_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d^3y+$$

$$+\oint\limits_\Sigma \{[v_{0j}(u_k+v_{0k})-\langle\Pi_{jk}\rangle]E_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y})+u_jT_{ijk}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\}n_k\,dS \tag{2}$$

$$P(\mathbf{x})=\int\limits_E (u_ju_k+\langle w_j'w_k'\rangle)\frac{\partial}{\partial x_k}e_j(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d^3y+$$

$$+\oint\limits_\Sigma \{[v_{0j}(u_k+v_{0k})-\langle\Pi_{jk}\rangle]e_j(\mathbf{x}-\mathbf{y})+u_jT_{jk}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\}n_k\,dS \tag{3}$$

$$\Pi_{ij}=\langle v_iv_j\rangle+\langle p\rangle\delta_{ij}-\nu\left\langle\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right\rangle=$$

$$=(v_{0i}+u_i)(v_{0j}+u_j)+\langle w_i'w_j'\rangle-\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+(p_0+P)\delta_{ij}$$

$$T_{ijk}(\mathbf{x})=\nu\left(\frac{\partial E_{ij}}{\partial x_k}+\frac{\partial E_{ik}}{\partial x_j}\right)-e_i\delta_{jk},\qquad T_{ij}(\mathbf{x})=\nu\left(\frac{\partial e_i}{\partial x_j}+\frac{\partial e_j}{\partial x_i}\right)-e^*\delta_{ij}$$

$$e^*(\mathbf{x})=\left(\mathbf{v}_0,\nabla\frac{1}{r}\right),\qquad r=|\mathbf{x}|$$

Следуя [6], можно показать, что если величина

$$u_iu_j+\langle w_i'w_j'\rangle=\langle w_iw_j\rangle=O(r^{-\alpha}),\ \alpha>1 \tag{4}$$

имеет указанную асимптотику, то объемные интегралы в правых частях (2), (3) можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} I_i(\mathbf{x})&=\int\limits_E\langle w_j'w_k'\rangle\frac{\partial}{\partial x_k}E_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d^3y=O(r^{-3/2}\ln(\sigma r))\\ I(\mathbf{x})&=\int\limits_E\langle w_j'w_k'\rangle\frac{\partial}{\partial x_k}E_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d^3y=O(r^{-3}\ln(\sigma r))\end{aligned} \tag{5}$$

где E — область, занятая жидкостью. С помощью (5) доказывается, что

$$u_i(\mathbf{x})=a_jE_{ij}(\mathbf{x})+O(r^{-3/2}\ln(\sigma r)),\ P(\mathbf{x})=a_je_j(\mathbf{x})+O(r^{-3}\ln(\sigma r))$$

$$a_i=v_{0i}\langle Q\rangle-\langle J_i\rangle,\qquad \langle J_i\rangle=\oint\limits_\Sigma\langle\Pi_{ij}\rangle n_j\,dS,\qquad \langle Q\rangle=\oint\limits_\Sigma\langle v_j\rangle n_j\,dS$$

где $\langle J_i\rangle$, $\langle Q\rangle$ — средний поток импульса и массы на обтекаемом теле соответственно.

Доказательство практически без изменений следует доказательству теорем 5.1, 5.2 работы [6] и здесь не приводится.

Необходимо обосновать оценку (5) в турбулентном случае.

При весьма общих предположениях, использовав только ограниченность интеграла Дирихле для скорости (6) было показано [7]

$$\int\limits_E\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right)^2 d^3x\leqslant C<\infty \tag{6}$$

$$|I_i(\mathbf{x})| = \left| \int\limits_E w_j w_k \frac{\partial}{\partial x_k} E_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d^3y \right| \leqslant C_1 r^{-\alpha}, \qquad \alpha \geqslant {}^2/_3 \tag{7}$$

Из хода доказательства в [7] видно, что оно не претерпевает каких-либо заметных изменений, если считать $w_i(\mathbf{x}, t)$ зависящей от времени как от параметра при условии выполнения (6) (C=const, C_1=const от времени не зависят). Таким образом, соотношение (7) верно и в турбулентном случае. Поверхностный интеграл в (2) имеет ту же оценку [7], хотя нетрудно показать, что он имеет порядок $1/r$ в силу ограниченности потоков импульса и массы на теле, которая предполагается. Легко видеть, что при усреднении по времени оценка (7) не изменится

$$|\langle I_i(\mathbf{x})\rangle| \leqslant \langle |I_i(\mathbf{x}, t)|\rangle \leqslant C_1 r^{-\alpha}, \ \alpha \geqslant {}^2/_3 \tag{8}$$

Таким образом, из (2), (5), (8) следует

$$|u_i(\mathbf{x})| \leqslant C_2 r^{-\alpha}, \ 1 \geqslant \alpha \geqslant {}^2/_3, \ 0 < C_2 < \infty \tag{9}$$

Выражение (9) определяет закон затухания средней скорости $u_i(\mathbf{x})$ при $r \to \infty$ в турбулентном случае.

С другой стороны, при достаточно больших r турбулентный след становится ламинарным [8]. Действительно, в турбулентном случае ширина следа δ с ростом r увеличивается степенным образом $\delta \sim r^\beta$, $\beta \leqslant {}^1/_2$. Отсюда и из (9) локальное число Рейнольдса $\mathrm{Re} = u\delta/\nu \sim r^{\beta-\alpha}$, $\alpha - \beta > 0$. С ростом r величина Re_r стремится к нулю. В [8] указаны значения $\alpha = {}^2/_3$, $\beta = {}^1/_3$ и $\mathrm{Re}_r \sim r^{-1/3}$. В ламинарном случае [6] $\alpha = 1$, $\beta = {}^1/_2$ и $\mathrm{Re}_r \sim r^{-1/2}$. Поэтому существует значение $r = r_0$ такое, что при $r > r_0$ значение $\mathrm{Re}_r < \mathrm{Re}_0$, где Re_0 — критическое число Рейнольдса перехода от ламинарного к турбулентному движению в следе. Необходимым условием ламинаризации следа является отличие от нуля Re_0. В [9] исследована линейная устойчивость дальнего осесимметричного следа в параллельном приближении и найдено, что $\mathrm{Re}_0 \simeq 32$. Наличие $\mathrm{Re}_0 > 0$ подтверждают и экспериментальные работы [10—12], в которых изучались ламинарные стационарные следы и их устойчивость.

В силу сказанного при $r > r_0$ течение в следе становится ламинарным. В этой области все малые возмущения экспоненциально затухают [9] со временем. Так как поле скорости в дальнем следе стремится к $\mathbf{v}_0$, это означает экспоненциальное затухание возмущений с ростом r в области $r > r_0$. Поэтому при достаточно больших $r > r_0$ в соответствии с (9) справедлива оценка (4). Следует отметить, что асимптотика (4) будет справедлива и в случае, если турбулентные пульсации затухают не экспоненциально, а степенным образом, если показатель степени γ для закона затухания $\sim t^{-\gamma}$ возмущения $\mathbf{w}'$ больше ${}^1/_2$.

Условие (4) представляется физически вполне обоснованным, хотя для строгого доказательства его справедливости необходимо решение задачи об устойчивости дальнего следа относительно возмущений произвольного вида в точной постановке. Действительно, асимптотика (4) следует из ограниченности интеграла Дирихле (6). Физический смысл условия (6) заключается в том, что диссипация кинетической энергии конечна. Это соответствует реальной физической ситуации, когда для поддержания равномерного движения тела необходим источник энергии конечной мощности. Поэтому для стационарного в среднем движения вязкой жидкости, возникающего от этого источника, мощность стока кинетической энергии в тепло, т. е. диссипация, может быть только конечной (предполагается, что «бесконечность не излучает энергию»).

Таким образом, и в турбулентном случае главный член разложения определяется точными интегралами сохранения $\langle J_i\rangle$ и $\langle Q\rangle$. Отсюда вытекает важное следствие, что дальний след как в ламинарном, так и в турбулентном случае не зависит от формы тела, а определяется интегралами сохранения. Этот вывод находится в противоречии с выводами экспериментальных работ [1, 2]. Не опровергая в целом результаты этих экспериментальных исследований, следует полагать, что они имеют ограниченную область применимости. Можно сказать, что эффекты, связанные с памятью формы обтекаемого тела, наблюдавшиеся в этих опытах, могут относиться лишь к той области течения, где имеется развитая турбулентность, далекая от вырождения, и справедлива промежуточная асимптотика автомодельного турбулентного следа, причем напряжения Рейнольдса $\langle w_i' w_j' \rangle$ должны убывать медленнее, чем $u_i u_j \sim r^{-2\alpha}$, $\alpha \geqslant {}^2/_3$. Иначе говоря, будет справедлива оценка (4) для промежуточной асимптотики и соответственно память формы будет для нее отсутствовать.

С помощью Предложения 2 работы [13] можно получить условие на β в оценке $|\langle w_i' w_j' \rangle| \leqslant C r^{-\beta}$, при котором интеграл $I_i(\mathrm{x})$ (5) будет иметь порядок, меньший или равный $1/r$. Соответствующее значение β есть $\beta \leqslant 1$ (ср. с (4)). Если $I_i(\mathrm{x}) = o(1/r)$, то главный член асимптотического разложения (2) определяется поверхностным интегралом, имеющим порядок $O(1/r)$. Условие $\beta \leqslant 1$ означает, что в области турбулентного следа степень турбулентности $\varepsilon = (\langle w'^2 \rangle / u^2)^{1/2} \geqslant (|\langle w_i' w_j' \rangle| / u^2)^{1/2} \to \infty$, $r \to \infty$, определенная по дефекту скорости, неограниченно возрастает с удалением от основного источника возмущений — обтекаемого тела.

Такое аномальное поведение степени турбулентности $\varepsilon(r)$ необходимо, чтобы память формы имела место. Для струи в спутном потоке эксперименты показывают, что величина ε не возрастает с ростом r [14]. Таким образом, для затопленной струи памяти формы не может быть. С позиции общей теории различие между струей в однородном потоке и обтекаемым телом несущественно: струя соответствует заданному источнику импульса, а обтекаемое тело порождает сток импульса. Если же память формы действительно имеет место для турбулентного следа, то возникает проблема неэквивалентности источника и стока импульса. Эта неэквивалентность должна быть следствием некоторых глубоких физических причин, природа которых неясна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Букреев В. И., Васильев О. Ф., Лыткин Ю. М.* О влиянии формы тела на характеристики автомодельного осесимметричного следа // Докл. АН СССР. 1972. Т. 207. № 4. С. 804–807.
2. *Черепанов П. Я., Дмитренко Ю. М.* О влиянии формы тела на характеристики автомодельного плоского следа // Инж.-физ. журн. 1988. Т. 54. № 6. С. 912–919.
3. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
4. *Oseen C. W.* Uber die Stokes'sche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik // Ark. Math. Astron. Fys. 1911. B. 6. № 29. 20 s.
5. *Oseen C. W.* Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik. Leipzig: Akad. Verl.-Gesellschaft, 1927. B. XXIV. 337 s.
6. *Finn R.* On the exterior stationary problem for the Navier — Stokes equation and associated perturbation problems // Arch. Rat. Mech. Anal. 1965. V. 19. № 5. P. 363.
7. *Бабенко К. И.* О стационарных решениях задачи обтекания тела вязкой несжимаемой жидкостью // Мат. сб. 1973. Т. 91 (133). № 1 (5). С. 3–26.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 733 с.
9. *Lessen M., Signh P. J.* The stability of axisymmetric free shear layers // J. Fluid Mech. 1973. V. 60. Pt 3. P. 433–457.
10. *Marshall D., Stanton T. E.* On the eddy system in the wake of flat circular plates in three dimensional flow // Proc. Roy. Soc. Ser. London. A. 1931. V. 130. № 813.
11. *Möller W.* Experimentelle Untersuchungen zur Hydrodynamik der Kugel // Phys. Zeit. 1938. B. 39. S. 57–80.
12. *Taneda S.* Studies on wake vortices (III). Experimental investigation of the wake behind a sphere at low Reynolds numbers // Rep. Res. Int. Appl. Mech. 1956. V. 4. № 16. P. 99–105.
13. *Бабенко К. И., Васильев М. М.* Об асимптотическом поведении стационарного течения вязкой жидкости вдали от тела // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 690–705.
14. *Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н., Смирнова И. П.* Турбулентное смешение газовых струй. М.: Наука, 1974. 272 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
24.III.1989