МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1990

УДК 532.516.013.4

В. И. ЮДОВИЧ

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДЛИННОВОЛНОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрена асимптотика задачи устойчивости пространственно-периодических трехмерных течений вязкой несжимаемой жидкости в случае, когда один из периодов неограниченно возрастает, а два других фиксированы. Для параллельных течений – с одной ненулевой компонентой скорости, зависящей от одной пространственной переменной,– эта задача решена в [1].

Рассматриваются длинноволновые моды, для которых строятся асимптотические разложения по степеням волнового числа α. Для определения коэффициентов разложения декрементов служат условия разрешимости высших приближений. В случае, когда продольный (вдоль длинного периода) поток основного течения отличен от нуля, главное приближение длинноволновой моды представляет собой бегущую волну поперечного течения с наложенным на нее сложным продольным течением. Последнее порождается взаимодействием бегущей волны с основным продольным течением.

Если же основной продольный расход равен нулю, то в устойчивой области (достаточно малых чисел Рейнольдса) предельные значения при $\alpha\to0$ длинноволновых мод и их декрементов определяются некоторой самосопряженной краевой задачей с переменными коэффициентами. Неизвестные в ней – поперечные компоненты скорости, а зависят они только от продольной переменной z. Предельное при $\alpha\to0$ значение критического числа Рейнольдса определяется при потере положительной определенности оператора этой задачи. В обоих случаях для критического числа Рейнольдса получаются явные формулы.

Полное обоснование асимптотики имеется пока лишь для случая, когда скорость основного течения не зависит от продольной переменной z.

Примечательной особенностью рассматриваемого предельного случая является возникновение знакопеременной, продольно-анизотропной вязкости. Такова, оказывается, природа дополнительной силы, возникающей от взаимодействия ведущего поперечного течения с основным продольным течением. В плоском случае эта вязкость чисто отрицательна. Таким образом, предельная эволюционная задача при сверхкритических числах Рейнольдса оказывается некорректной – с гиперболическим (или эллиптическим «плохого» знака) пространственным оператором, бесконечно большим числом растущих мод и неограниченно нарастающими (с номером моды) инкрементами. Конечно, при любом фиксированном параллелепипеде периодов число неустойчивых мод конечно, но оно неограниченно растет при $\alpha\to0$.

Эта сильная, хотя и медленная, неустойчивость длинноволновых возмущений типична. Имеются лишь исключительные, определяемые условиями типа равенств течения, для которых критическая вязкость при $\alpha\to0$ стремится к нулю.

Явное построение асимптотики оказывается возможным потому, что скорость в поперечном направлении предполагается малой – порядка α, так что сохраняется неизменным уравнение неразрывности в продольно сжатой системе координат (αx_3). Если поперечное основное течение порядка единицы при $\alpha\to0$, например, не зависит от α, то в нулевом порядке по α получается задача устойчивости течения вязкой несжимаемой жидкости в поперечной плоскости, причем продольная «медленная» координата z входит просто как параметр. Можно ожидать, что при определенных условиях гладкости и невырожденности критическая вязкость окажется равной максимуму по z локальной критической вязкости. Это утверждение нетрудно доказать в случае продольно-однородного основного течения, в общем случае весьма интересно провести соответствующее исследование. Видимо, подобные результаты возможно получить и в случае слабо меняющихся (гладко зависящих от медленной переменной αx_3) течений в слабо изогнутых трубах.

Рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство, под действием заданных вихревых сил, описываемое системой Навье — Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'}+(\mathbf{v}', \nabla')\mathbf{v}'-\nu'\Delta'\mathbf{v}'=-\nabla' p'+\mathbf{F}' \tag{1}$$

$$\operatorname{div}' \mathbf{v}'=0 \tag{2}$$

Штрих означает, что все переменные и дифференциальные операторы отнесены к системе отсчета Декарта — Ньютона x_1', x_2', x_3', t'.

Предположим, что все компоненты v_1', v_2', v_3' поля скорости периодичны по x_1', x_2', x_3' с периодами L_1', L_2', L_3'; при этом считается, что такой же периодичностью обладают компоненты F_1', F_2', F_3' внешней силы.

Кроме того, ставится одно из следующих условий:

$$\frac{1}{|D'|}\int\limits_D \mathbf{v}'\,dx'=q', \qquad \frac{1}{|D'|}\int\limits_{D'} \nabla' p'\,dx'=h' \tag{3}$$

Здесь D' — параллелепипед периодов, $|D'|$ — его объем. Первое из (3) означает, что задана средняя по пространству скорость, а второе — что задан средний градиент давления. Возможен и смешанный вариант: для каждого $k=1, 2, 3$ задается k-я компонента одного из равенств (3).

При любом из таких условий справедливы обычные теоремы существования и единственности решения задачи с начальным условием $\mathbf{v}'(x',0)=$ $=v_0'(x')$. Доказываются они теми же методами, что и в случае задач для ограниченной области [2]. Эту роль играет D, при этом имеют место немалые упрощения. При $h'=0$ условие (3) означает, что давление p' — пространственно-периодично с указанными периодами.

Будем рассматривать асимптотику в случае, когда один из периодов $L_3'\to\infty$ при постоянных остальных. Определим продольное волновое число, полагая $L_3'=2\pi/\alpha$, $\alpha\to 0$.

Введем новые координаты $x_1=x_1'$, $x_2=x_2'$, $z=x_3=\alpha x_3'$, $t=t'$. Предположим, что система (1), (2) имеет стационарное пространственно-периодическое решение вида $\mathbf{v}'=(\alpha v_1, \alpha v_2, v_3)(x_1, x_2, x_3)$, причем $v_k(x_1, x_2, t)$ не зависят от α. Существенных изменений в дальнейшем не возникнет, если допустить аналитическую зависимость от α в окрестности значения $\alpha=0$.

Для нормальных возмущений вида $\mathbf{u}(x)\exp\sigma t$ получается спектральная задача

$$\sigma u_j+\alpha v_k\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\alpha u_s\frac{\partial v_j}{\partial x_s}+\alpha^2 u_3\frac{\partial v_j}{\partial z}-\nu\Delta u_j=-\frac{\partial p}{\partial x_j} \tag{4}$$

$$\sigma u_3+\alpha v_k\frac{\partial u_3}{\partial x_k}+u_j\frac{\partial v_3}{\partial x_j}+\alpha u_3\frac{\partial v_3}{\partial z}-\nu\Delta u_3=-\alpha\frac{\partial p}{\partial z} \tag{5}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+\alpha\frac{\partial u_3}{\partial z}=0; \qquad \Delta=\Delta_0+\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}; \qquad \Delta_0=\frac{\partial^2}{\partial u_j\partial x_j} \tag{6}$$

Здесь и далее условимся считать, что индексы j, s пробегают значения 1, 2, индекс k — значения 1, 2, 3; по повторяющемуся индексу в одночленах подразумевается суммирование.

Для определенности далее примем, что возмущение давления периодично с периодами $L_j=L_j'$ по x_j, а продольная составляющая средней скорости возмущения равна нулю. При иных условиях типа (3) — все аналогично.

Станем разыскивать декремент σ и гидродинамическое поле (u, p) в виде формальных рядов по степеням

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}^0+\alpha\mathbf{u}^1+\alpha^2\mathbf{u}^2+\ldots, \quad p=p_0+\alpha p_1+\alpha^2 p_2+\ldots, \quad \sigma=\sigma_0+\alpha\sigma_1+\alpha^2\sigma_2+\ldots \tag{7}$$

В нулевом порядке имеем

$$\sigma_0 u_j^\circ - \nu\Delta_0 u_j^\circ = -\frac{\partial p_0}{\partial x_j}, \qquad \frac{\partial u_j^\circ}{\partial x_j^\circ} = 0 \tag{8}$$

$$\sigma_0 u_3^\circ + u_j^\circ \frac{\partial v_3}{\partial x_j} - \nu\Delta_0 u_3^\circ = 0 \tag{9}$$

Все собственные значения σ_0 неположительны, так что, интересуясь неустойчивостью, нужно положить $\sigma_0=0$. Из (8), (9) выводим

$$\sigma_0=0, \qquad u_j^\circ = u_j^\circ(z), \qquad p^\circ = p^\circ(z), \qquad \nu\Delta_0 u_3^\circ = u_j^\circ \frac{\partial v_3}{\partial x_j} \tag{10}$$

Далее используется среднее по x_1, x_2, которое для любой периодической функции $f(x_1, x_2)$ определяется равенством

$$\langle f \rangle = \frac{1}{L_1 L_2} \int_0^{L_1}\int_0^{L_2} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \tag{11}$$

Введем функции θ_k как решения периодических краевых задач

$$\Delta_0 \theta_k = v_k - v_k, \quad \theta_k = 0 \tag{12}$$

Ввиду условия для продольного расхода $\langle u_3 \rangle = 0$. Значит, и $\langle u_3^\circ \rangle = 0$, и из (10), (12) получаем, что

$$u_3^\circ = \frac{1}{\nu} u^\circ \frac{\partial \theta_s}{\partial x_s} \tag{13}$$

Функции $u_j^\circ(t)$ пока не определены.

В первом порядке по α из (4)—(6) выводим

$$\begin{gathered}
\sigma_1 u_j^\circ + v_3 \frac{\partial u_j^\circ}{\partial z} + u_s^\circ \frac{\partial v_j}{\partial x_s} - \nu\Delta_0 u_j^1 = -\frac{\partial p_1}{\partial x_j} \\
\sigma_1 u_3^\circ + v_k \frac{\partial u_3^\circ}{\partial x_k} + u_j^1 \frac{\partial v_3}{\partial x_j} + u_3^\circ \frac{\partial v_3}{\partial z} - \nu\Delta_0 u_3^1 = -\frac{\partial p_0}{\partial z} \\
\frac{\partial u_j^1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_3^\circ}{\partial z} = 0
\end{gathered} \tag{14}$$

Поперечная часть поля скорости u_1^1, u_2^1 определяется из первого и последнего уравнений (14).

Условие разрешимости получим, осредняя первое уравнение. В результате имеем

$$\sigma_1 u_j^\circ + \langle v_3 \rangle \frac{du_j^\circ}{dz} = 0 \tag{15}$$

Теперь для определения u_j^1 получается плоская периодическая неоднородная краевая задача, а для u_3^1 — уравнение Пуассона. При этом u_3^1 определяется однозначно, так как $\langle u_3^1 \rangle = 0$, а u_j^1 — с точностью до слагаемых $\langle u_j^1 \rangle$, зависящих только от z.

Дальнейшее протекает аналогично. На каждом шаге возникает условие разрешимости, служащее для определения средних величин предыдущих членов разложения (7). Все эти условия разрешимости можно получить и непосредственно, подставляя ряды (7) в общие соотношения, которые получим, осредняя систему (4), (5); осреднение уравнения (6) показывает, что $\langle u_3 \rangle$ не зависят от z и, значит, совпадают с продольной средней по x_1, x_2, x_3 компонентой скорости, так что, по условию, $\langle u_3 \rangle = 0$. Применяя осреднение (11) к уравнению (4), после упрощения посредством интегрирования по частям с учетом равенства $\partial v_k/\partial x_k=0$ получим

$$\alpha\frac{d}{dz}\langle v_3u_j\rangle+\alpha^2\frac{d}{dz}\langle u_3v_j\rangle-\nu\alpha^2\frac{d^2\langle u_j\rangle}{dz}+\sigma\langle u_j\rangle=0 \tag{16}$$

Осреднение уравнения (5) дает соотношение для определения среднего давления

$$\langle p\rangle=-2\langle u_3v_3\rangle+\mathrm{const} \tag{17}$$

Из (17) и (13), в частности, следует, что $p_0=\langle p_0\rangle=0$. В порядке α (16) дает (15), а в порядке α^2 – соотношение (учтено, что $u_j^\circ=\langle u_j^\circ\rangle$)

$$\sigma_1\langle u_j^1\rangle+\sigma_2u_j^\circ-\nu\frac{d^2u_j^\circ}{dz^2}+\frac{d}{dz}\langle v_3u_j^1+u_3^\circ v_j\rangle=0 \tag{18}$$

Для вычисления среднего воспользуемся формулой (13) и выражением для v_3 из (12). Имеем после интегрирования по частям

$$\langle v_3u_j^1+u_3v_j\rangle=\langle v_3u_j^1\rangle+\langle\theta_3\Delta_0u_j^1\rangle-\frac{1}{\nu}u_s^\circ\left\langle\frac{\partial\theta_3}{\partial x_s}v_j\right\rangle \tag{19}$$

Теперь подставим $\Delta_0u_j^1$ из (14), войдет p_1. Для p_1, применяя к первому уравнению (14) операцию div_0 и используя (12), получим формулу

$$p_1=-\frac{du_s^\circ}{dz}\frac{\partial\theta_3}{\partial x_s}+u_s^\circ\frac{\partial^2\theta_3}{\partial x_s\partial z}-\nu\frac{\partial u_3^\circ}{\partial z}+\langle p_1\rangle \tag{20}$$

В результате (19) преобразуется к виду

$$\langle v_3u_j^1+u_3^\circ v_j\rangle=-\langle v_3u_j^1\rangle+\frac{1}{\nu}\frac{du_j^\circ}{dz}\langle\theta_3v_3\rangle+\frac{2}{\nu}\frac{du_s^\circ}{dz}\left\langle\frac{\partial\theta_3}{\partial x_j}\frac{\partial\theta_3}{\partial x_s}\right\rangle \tag{21}$$

Из (18) и (21) получаем уравнение

$$\begin{gathered}\sigma_1\langle u_j^1\rangle+\langle v_3\rangle\frac{d\langle u_j^1\rangle}{dz}+\sigma_2u_j^\circ-\nu\frac{d^2u_j^\circ}{dz^2}+\frac{1}{\nu}\frac{d}{dz}\left(a_{js}\frac{du_s^\circ}{dz}\right)=0\\ a_{js}=2\left\langle\frac{\partial\theta_3}{\partial x_j}\frac{\partial\theta_3}{\partial x_s}\right\rangle-\delta_{js}\langle(\nabla_0\theta_3)^2\rangle\end{gathered} \tag{22}$$

Матрица (a_{js}) симметрична: $a_{js}=a_{sj}$ и $\mathrm{Sp}\,A=a_{11}+a_{22}=0$. Роль соотношения (22) зависит от того, какое условие выполняется: $\langle v_3\rangle\neq0$ или $\langle v_3\rangle=0$.

В случае $v_3\neq0$ из (15) при условии 2π-периодичности решения находим

$$\sigma_1=im\langle v_3\rangle,\quad u_j^\circ=c_je^{-imz} \tag{23}$$

где c_j – неопределенные постоянные, m – целое число. Уравнение (22) в этом случае служит для определения $\langle u_j^1\rangle$ – после подстановки (23) в (22) получается уравнение вида

$$\sigma_1\langle u_j^1\rangle+v_3\frac{d\langle u_j^1\rangle}{dz}=g_j \tag{24}$$

с известными 2π-периодическими $g_j(z)$. Уравнение (24) имеет 2π-периодическое решение $\langle u_j^1\rangle$, если и только если выполнено условие

$$\int_0^{2\pi}g_je^{imz}\,dz=0 \tag{25}$$

Подстановка (23) в (25) дает систему линейных алгебраических уравнений для определения c_j и характеристическое уравнение для определения спектрального параметра

$$\sigma_2 c_j + \nu m^2 c_j + \frac{1}{\nu} m^2 b_{js} c_s = 0 \tag{26}$$

$$b_{js} = \langle a_{js} \rangle_z = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi a_{js}(z)\, dz$$

$$(\sigma_2 + \nu m^2)^2 + (m^4/\nu^2) \det B = 0 \tag{27}$$

Так как $\det B < 0$, оба корня вещественны. Один из них отрицателен, а другой

$$\sigma_2 = \frac{m^2}{\nu} (\sqrt{-\det B} - \nu^2) \tag{28}$$

Критическое значение вязкости ν — одно и то же для всех $m = \pm 1$, $\pm 2, \ldots$ — дается формулой

$$\nu_*^2 = \sqrt{-\det B} \tag{29}$$

$$-\det B = (\theta_{11} - \theta_{22})^2 + 4\theta^2, \qquad \theta_{js} = \left\langle\!\!\left\langle \frac{\partial\theta}{\partial x_j} \frac{\partial\theta}{\partial x_s} \right\rangle\!\!\right\rangle \tag{30}$$

Среднее « » берется по x, z. Предельное значение критической вязкости ν_* при $\alpha \to 0$ не зависит от продольного квантового числа m; в следующих членах разложения по α зависимость от m возникает; в [1] это показано для параллельных течений. Более общий пример приведен ниже.

Случай $\langle v_3 \rangle = 0$. Из (15) следует, что $\sigma_1 = 0$, а величины u_j° остаются неопределенными. Они находятся вместе с σ_2 из системы уравнений (22), которая в данном случае принимает вид

$$\sigma_2 u_j^\circ - \nu \frac{d^2 u_j^\circ}{dz^2} + \frac{1}{\nu} \frac{d}{dz} a_{js} \frac{du_s^\circ}{dz} = 0 \tag{31}$$

Ввиду симметрии матрицы (a_{js}) получается самосопряженная спектральная краевая задача в классе 2π-периодических функций.

Интересна природа дополнительной силы в (31), пропорциональной $1/\nu$ и возникающей в результате взаимодействия вторичного поперечного потока с продольным основным течением. По форме это продольно-анизотропное трение (a_{js} зависят от z). Но поскольку $\operatorname{Sp} A = 0$, матрица A имеет как положительное, так и отрицательное собственное значение (конечно, при $A \neq 0$). Таким образом, возникает эффект отрицательного (в некоторых направлениях) трения.

В плоском случае, когда жидкость течет, скажем, в плоскости (x_1, z) так, что $\theta_3 = \theta_3(x_1, z)$, от (31) остается одно уравнение

$$\begin{gathered} \sigma_2 u - \nu \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{1}{\nu} \frac{d}{dz} a(z) \frac{du}{dz} = 0 \\ u = u_1^\circ, \qquad a(z) = a_{11}(z) = \left\langle \left(\frac{\partial\theta_3}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle \end{gathered} \tag{32}$$

Среднее берется по x_1. Таким образом, в двумерном случае дополнительное трение чисто отрицательное.

В случае, когда a_{js} постоянны, сохраняют силу формулы (28), (29), причем $a_{js} = b_{js}$. Если a_{js} переменны, то при больших ν имеет место устойчивость: оператор задачи (31) отрицательно определен и обычными методами [1] устанавливается, что спектр его состоит из счетного множества вещественных отрицательных собственных значений σ_{2m}, $m = 1, 2, \ldots$ Соответствующие собственные вектор-функции определяются известными вариационными принципами — являются критическими точками квадратичного функционала

$$-\int_0^{2\pi}\left[\nu\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{du_j}{dz}\right)^2-\frac{1}{\nu}\sum_{j,s=1}^{2}a_{js}\frac{du_j}{dz}\frac{du_s}{dz}\right]dz \qquad (33)$$

на множестве 2π-периодических вектор-функций $(u_1(z),\ u_2(z))$ из $W_2^{(1)}(0,2\pi)$, имеющих единичную L_2-норму

$$\int_0^{2\pi}(u_1^2+u_2^2)\,dz=1$$

При уменьшении ν квадратичный функционал (33) неизбежно потеряет отрицательную определенность, если не все a_{js} тождественно обратятся в нуль. Это произойдет, когда квадратичная форма

$$\nu(\xi_1^2+\xi_2^2)-(1/\nu)a_{js}\xi_j\xi_s$$

потеряет положительную определенность для множества значений z с положительной мерой. Пользуясь критерием Сильвестра и учитывая, что $\operatorname{Sp}A=0$, находим соответствующее критическое значение вязкости ν_*

$$\nu_*^2=\max_z\sqrt{-\det A(z)}$$

Когда ν, уменьшаясь, проходит значение ν_*, форма (33) становится гиперболической и рядом возникает бесконечно много точек спектра (возможно, непрерывного) на положительном луче с предельной точкой на $+\infty$. Эта ситуация сохраняется при всех $\nu\in(0,\nu_*)$.

Итак, и в случае $v_3\neq 0$ и в случае $v_3=0$ имеется в этом приближении сильная неустойчивость: соответствующая нестационарная задача становится некорректной ввиду наличия сколь угодно быстро нарастающих мод. Разумеется, при фиксированных α, ν число растущих мод конечно, но неограниченно растет при $\alpha\to 0$, если $\nu<\nu_*$.

В плоском случае из (32) аналогично предыдущему получаем $\nu_*^2=\max_z a(z)$.

Пример. Пусть основное течение инвариантно относительно сдвигов по z: $v_k=v_k(x_1,x_2)$. Система (4)–(6) допускает тогда разделение переменных. Разыскивая собственные вектор-функции, зависящие от z посредством множителя $\exp(i\alpha z)$, придем к системе для амплитуд, получаемой из (4)–(6) заменой $\partial/\partial z\to i\alpha$. Эта спектральная задача содержит параметр регулярно аналитический и при младшей части, так что доказательство сходимости разложений (7) получается обычными методами теории возмущений [1]. Предельное значение критической вязкости дается формулой (29)

$$\nu_*=\sqrt[4]{(\theta_{11}-\theta_{22})^2+4\theta_{12}^2}$$

$$\theta_{js}=\left\langle\frac{\partial\theta_3}{\partial x_j}\frac{\partial\theta_3}{\partial x_s}\right\rangle,\quad \Delta_0\theta_3=v_3-\langle v_3\rangle,\quad \langle\theta_3\rangle=0$$

Если, например, $v_3=\sin\alpha_1x_1\sin\alpha_2x_2$, то $\nu_*=\frac{1}{2}\sqrt{|\alpha_1^2-\alpha_2^2|}/(\alpha_1^2+\alpha_2^2)$. При $\alpha_1=\alpha_2$ получаем $\nu_*=0$ – симметрия способствует стабилизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Юдович В. И.* О неустойчивости параллельных течений вязкой несжимаемой жидкости относительно пространственно-периодических возмущений // Численные методы решения задач математической физики. М.: Наука, 1966. С. 242–249.
2. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
1.VIII.1988