

УДК 532.516

© 1990 г.

Г. М. СИСОЕВ

## О ДВИЖЕНИИ СВОБОДНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПЛЕНКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Осесимметричные течения свободных пленок встречаются при распыливании жидкостей различными насадками, при соударении струй [1, 2]. В [3] рассматривается стационарное движение, обладающее поперечной симметрией, изучается его невязкая неустойчивость. В данной работе численным методом коллокаций определяется стационарное течение с произвольным профилем скорости. При исследовании устойчивости стационарного течения в предположении локальной плоскопараллельности сформулирована задача на собственные значения шестого порядка, которая решается численно. Показано существование неустойчивых возмущений двух видов.

1. Пусть осесимметричная пленка вязкой несжимаемой жидкости распространяется в несжимаемом газе; предполагается, что расход жидкости  $Q$  постоянен. Система уравнений и граничных условий, описывающая данное движение жидкости и газа, приводится в [3, 4].

Вводится цилиндрическая система координат  $r, \theta, z$ , причем ось  $z$  совпадает с осью симметрии стационарного течения; давление и компоненты скорости жидкости и газа представляются в виде

$$p_l = \rho \Omega^2 H_c^2 p, \quad u_r = \Omega r u, \quad u_\theta = \Omega r v, \quad u_z = \Omega H_c w, \quad \Omega = \frac{Q}{2\pi R^2 H_c}$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $H_c$  — характерная толщина пленки,  $R$  — наименьший радиус рассматриваемой области течения. Выбор  $\Omega$  обеспечивает единичный безразмерный расход жидкости через поверхность  $r=R$ . В качестве независимых переменных используются  $x = \ln(r/R)$ ,  $\theta$ ,  $y = z/H_c$ ,  $s = \Omega t$ , где  $t$  — время.

Для пленки относительно небольшой толщины задача об определении ее стационарного течения может быть отделена от рассмотрения движения газа. В этом случае уравнения и граничные условия без учета членов порядка  $(H_c/r)^2$  и поверхностного натяжения на границах пленки имеют вид [3, 4]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2u + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial y} + u^2 - v^2 = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \text{Re} = \frac{\Omega H_c^2}{\nu} \quad (1.2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial y} + 2uv = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (1.3)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1.4)$$

$$y = h_a(x): u \frac{dh_a}{dx} = w, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad p - \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (1.5)$$

$$y = h_u(x): u \frac{dh_u}{dx} = w, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad p - \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (1.6)$$

где  $h_d, h_u$  — поверхности пленки;  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости. Здесь (1.1) — уравнение неразрывности; (1.2)–(1.4) — уравнения движения; (1.5), (1.6) — кинематические и динамические условия на поверхностях пленки. В данном приближении давление газа постоянно, его скорость равняется нулю.

Постановка задачи о стационарном течении включает начальные условия

$$x=0: h_d=0, h_u=1, u=U_0(y), v=V_0(y), w|_{y=0}=W_d \quad (1.7)$$

где  $U_0, V_0$  — заданные функции. Толщина пленки при  $r=R$  используется в качестве характерной величины  $H_c$ .

Для численного решения (1.1)–(1.7) применяется метод коллокаций [3–6], в котором вводятся поверхности тока  $h_n(x)$ ,  $n=1, \dots, N$ , причем  $h_1 \equiv h_d$ ,  $h_N \equiv h_u$ , и значения компонент скорости на них  $u_n(x) = u(x, h_n(x))$  и аналогично  $v_n(x)$ ,  $w_n(x)$ . Из (1.1)–(1.6) и кинематических соотношений на поверхностях тока получим

$$\frac{du_n}{dx} = \frac{1}{u_n} \left( \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=h_n} + v_n^2 \right) - u_n, \quad n=1, \dots, N \quad (1.8)$$

$$\frac{dv_n}{dx} = \frac{1}{u_n \text{Re}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Big|_{y=h_n} - 2v_n, \quad n=1, \dots, N \quad (1.9)$$

$$\frac{dh_n}{dx} = \frac{dh_{n-1}}{dx} - g_n, \quad g_n = (h_n - h_{n-1}) \left[ \frac{1}{u_n + u_{n-1}} \left( \frac{du_n}{dx} + \frac{du_{n-1}}{dx} \right) + 2 \right], \quad n=2, \dots, N \quad (1.10)$$

$$\frac{dJ}{dx} = -2J - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=h_N} - \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=h_1} \right), \quad J \equiv \int_{h_1}^{h_N} u w dy \quad (1.11)$$

Последнее уравнение следует из (1.4)–(1.6).

Для вычисления входящих в (1.8), (1.9) значений вторых производных компонент скорости на поверхностях тока используется их аппроксимация полиномами Чебышева с учетом граничных условий (1.5), (1.6) [5].

Из (1.10) следует, что

$$\frac{dh_n}{dx} = f_n + \frac{dh_1}{dx}, \quad n=1, \dots, N; \quad f_1=0, \quad f_n = - \sum_{j=2}^n g_j, \quad n=2, \dots, N \quad (1.12)$$

тогда кинематические условия на поверхностях тока можно записать в виде

$$w_n = u_n f_n + u_n \frac{dh_1}{dx}, \quad n=1, \dots, N$$

Для вычисления правой части уравнения (1.11) вводятся функции

$$F^{(0)}(y) = \sum_{n=1}^N a_n^{(0)} \varphi_n \left( \frac{y-h_1}{h_N-h_1} \right), \quad F^{(1)}(y) = \sum_{n=1}^N a_n^{(1)} \varphi_n \left( \frac{y-h_1}{h_N-h_1} \right)$$

где  $\varphi_n(\xi)$ ,  $n=1, 2, \dots$  — полиномы Чебышева; коэффициенты  $a_n^{(0)}$ ,  $a_n^{(1)}$  определяются из систем линейных алгебраических уравнений

$$F^{(0)}(h_n) = u_n f_n, \quad F^{(1)}(h_n) = u_n, \quad n=1, \dots, N$$

При этом функция  $W(y) = F^{(0)} + F^{(1)} dh_1/dx$  является аппроксимирующей для осевой скорости при фиксированном значении  $x$ . Из (1.11), независимости полиномов Чебышева и граничных условий для радиальной скорости следует

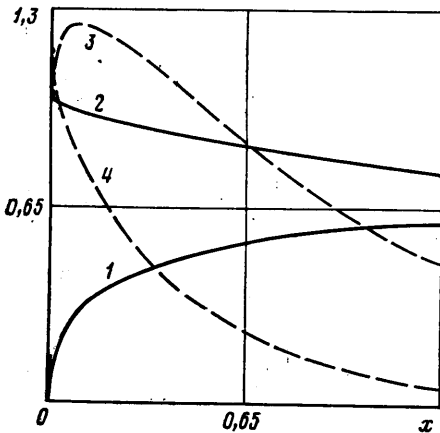
$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dx} &= -2J - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial F^{(0)}}{\partial y} \Big|_{y=h_N} - \frac{\partial F^{(0)}}{\partial y} \Big|_{y=h_1} \right) \\ \frac{dh_1}{dx} &= \frac{J - J^{(0)}}{J^{(1)}}, \quad J^{(0)} \equiv \int_{h_1}^{h_N} u F^{(0)} dy, \quad J^{(1)} \equiv \int_{h_1}^{h_N} u^2 dy \end{aligned} \quad (1.13)$$

Таким образом, (1.8), (1.9), (1.12), (1.13) образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения  $u_n(x)$ ,  $v_n(x)$ ,  $h_n(x)$ ,  $n=1, \dots, N$ ,  $J(x)$ . Начальные условия определяются выбором величин  $h_n(0)$ , причем  $h_1(0)=0$ ,  $h_N(0)=1$ ; значения  $u_n(0)$ ,  $v_n(0)$  вычисляются согласно (1.7). Из (1.7), (1.13) следует, что

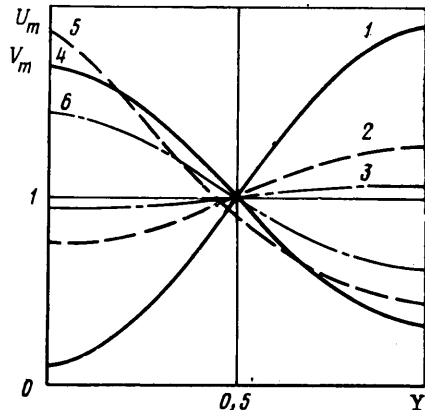
$$J(0) = J^{(0)}(0) + \frac{W_d}{U_0(0)} J^{(1)}(0)$$

Интегрирование дифференциальных уравнений проводится численным методом Адамса – Бэшфорда [6]; для вычислительной устойчивости алгоритма осуществляется периодическое по  $x$  и равномерное по толщине пленки перераспределение поверхностей тока.

Результаты расчетов показывают, что с удалением от оси симметрии происходит выравнивание профилей компонент скорости. На фиг. 1 пред-



Фиг. 1



Фиг. 2

ставлены зависимости  $h_d(x)$ ,  $h_u(x)$  и средних по толщине пленки значений радиальной и азимутальной скоростей  $u_m(x)$ ,  $v_m(x)$  (кривые 1–4 соответственно) для течения с начальным профилем скорости

$$U_0 = 1 - (1 - U_d)(1 - 6y^2 + 4y^3), \quad V_0 = V_d + (V_u - V_d)(3y^2 - 2y^3) \quad (1.14)$$

при  $Re=100$ ,  $U_d=0,1$ ,  $V_u=0,4$ ,  $V_d=2$ ,  $J(0)=0$  (или  $W_d=4,19$ ).

На фиг. 2 для этого течения приводятся профили радиальной (кривые 1–3) и азимутальной (4–6) компонент скорости при  $x=0$  (1, 4),  $x=0,2$  (2, 5),  $x=0,8$  (3, 6), причем используются обозначения  $U_m = u/u_m$ ,  $V_m = v/v_m$ ,  $Y = (y - h_d)/(h_u - h_d)$ .

Длина участка перехода к течению с равномерным профилем скорости  $x_a$  определяется числом  $Re$ , начальными условиями (1.7). В рассмотренном примере условия  $|1 - u_n/u_m| < 0,05$ ,  $|1 - v_n/v_m| < 0,05$ ,  $n=1, \dots, N$  выполняются при  $x \geq 1,3$ . Значение  $x_a$  увеличивается с ростом  $Re$ .

Можно отметить, что в экспериментах по стеканию пленки с поверхности вращающегося диска  $Re \leq 1$  [1, 7], значение  $x_a < 1$ ; например, для рассмотренного выше начального профиля скорости (1.14) и  $Re=1$   $x_a = 0,15$ .

Из (1.1), (1.5), (1.6) следует, что

$$q(x) = \int_{h_d}^{h_u} u \, dy = \exp(-2x)$$

Для течения с постоянным профилем скорости задача (1.1)–(1.6) имеет точное решение

$$u = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}, \quad v = \frac{v_b}{\kappa_1}, \quad h_u = h_d + \frac{q}{u}, \quad J = \frac{J_b}{\kappa_1} \quad (1.15)$$

$$h_d = (h_d)_b + \frac{J_b}{q_b(u_b^2 + v_b^2)} (\kappa_2 - u_b) + \frac{q_b}{2} \left( \frac{1}{u_b} - \frac{1}{\kappa_2} \right)$$

$$\kappa_1 = \exp(2x - 2x_b), \quad \kappa_2 = \sqrt{(u_b^2 + v_b^2)\kappa_1 - v_b^2}$$

где  $u_b, v_b, (h_d)_b, J_b, q_b$  – значения соответствующих величин при  $x = x_b$ ; решение (1.15) справедливо при  $x \geq x_b$ .

2. При рассмотрении устойчивости стационарного течения используется допущение локальной плоскопараллельности [4]. Пусть  $U_1(x, y), V_1(x, y), H_d(x), H_u(x)$  – решение задачи (1.1)–(1.7). Нестационарное решение для жидкости представляется в виде [3]

$$u(x, \theta, y, s) = U_1(x_0, y) + u_1(\xi, \theta, \eta, \tau), \quad v = V_1 + v_1, \quad w = \frac{w_1}{\varepsilon_0} \quad (2.1)$$

$$p = \frac{H_0 p_1}{\varepsilon_0}, \quad h_d = H_d + H_0 h_1, \quad h_u = H_u + H_0 h_2, \quad x_0 = \ln \frac{r_0}{R}$$

$$H_0 = H_u(x_0) - H_d(x_0), \quad \varepsilon_0 = \frac{H_c}{r_0}, \quad \xi = \frac{x - x_0}{\varepsilon_0 H_0}, \quad \eta = \frac{y - H_d(x_0)}{H_0}, \quad \tau = \frac{s}{\varepsilon_0 H_0}$$

где  $r_0$  – значение радиуса, при котором изучается устойчивость. Вид решения для газа аналогичен (2.1) с  $U_1 = V_1 = 0$ .

После подстановки (2.1) в систему уравнений Навье – Стокса и ее линеаризации для малых возмущений получим

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial w_1}{\partial \eta} + \varepsilon_* \left( 2u_1 + \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \tau} + U_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + U_1' w_1 + \varepsilon_* \left( V_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + 2U_1 u_1 - 2V_1 v_1 \right) = -\varepsilon_* \frac{\partial p_1}{\partial \xi} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_*}{\text{Re}_*} \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + 2\varepsilon_* \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \varepsilon_*^2 \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right) \right]$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tau} + U_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + V_1' w_1 + \varepsilon_* \left( V_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + 2U_1 v_1 + 2V_1 u_1 \right) = -\varepsilon_*^2 \frac{\partial p_1}{\partial \theta} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_*}{\text{Re}_*} \left[ \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \eta^2} + 2\varepsilon_* \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \varepsilon_*^2 \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) \right]$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial \tau} + U_1 \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + \varepsilon_* V_1 \frac{\partial w_1}{\partial \theta} = -\varepsilon_* \frac{\partial p_1}{\partial \theta} + \frac{\varepsilon_*}{\text{Re}_*} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \eta^2} + \varepsilon_*^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} \right)$$

$$\varepsilon_* = \frac{H_*}{r_0}, \quad \text{Re}_* = \frac{\Omega H_*^2}{\nu}, \quad H_* = H_c H_0$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по переменной  $\eta$ ; зависимость от  $x_0$  имеет параметрический вид.

Систему уравнений для возмущений в газе можно получить из (2.2), положив  $U_1 = V_1 = 0, \text{Re}_* = \infty$  и заменив  $p_1$  на  $(p_g)_1 / \lambda$ , где  $(p_g)_1$  – возмущение давления в газе,  $\lambda = \rho_g / \rho$ ,  $\rho_g$  – плотность газа.

Линеаризованные граничные условия при  $\eta = j - 1, j = 1, 2$  имеют вид

$$\frac{\partial h_j}{\partial \tau} + U_1 \frac{\partial h_j}{\partial \xi} + \varepsilon_* V_1 \frac{\partial h_j}{\partial \theta} = w_1, \quad \frac{\partial h_j}{\partial \tau} = (w_g)_1 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \frac{\partial w_1}{\partial \xi} - 2\varepsilon_* U_1 \frac{\partial h_j}{\partial \xi} + U_1'' h_j = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + \varepsilon_* \frac{\partial w_1}{\partial \theta} - 2\varepsilon_*^2 U_1 \frac{\partial h_j}{\partial \theta} + V_1'' h_j = 0$$

$$p_1 - (p_2)_1 - \frac{2}{\text{Re}_*} \frac{\partial w_1}{\partial \eta} + (-1)^j \frac{A_0}{\varepsilon_*^2} \left( \frac{\partial^2 h_j}{\partial \xi^2} + \varepsilon_*^2 \frac{\partial^2 h_j}{\partial \theta^2} \right) = 0, \quad A_0 = \frac{\sigma}{\rho \Omega^2 r_0^3}$$

где  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $(w_2)_1$  — возмущение осевой скорости в газе.

Задача, включающая (2.2), уравнения для возмущений в газе, (2.3) и условия для затухания возмущений в газе вдали от поверхности пленки ( $(w_2)_1 \rightarrow 0$  при  $\eta \rightarrow \pm\infty$ ), имеет волновые решения вида  $f(\eta) \exp i(\alpha\xi + k\theta - \omega\tau)$ , для которых после некоторых преобразований получим

$$w^{IV} - \left\{ \frac{2\alpha^2 b_2}{b_1} \left[ 1 - \frac{i\varepsilon_*}{\alpha b_2} \left( 2 - \frac{4i\varepsilon_*}{\alpha} + 3\varepsilon_*^2 \beta^2 \right) \right] + \text{Re}_* \left( \frac{i\alpha}{\varepsilon_*} E + 2U_1 \right) \right\} w'' -$$

$$- \frac{2\varepsilon_* \beta \text{Re}_*}{b_1} (V_1 w')' + \alpha \left[ \alpha^2 b_2 \left( \alpha b_3 + \frac{i \text{Re}_*}{\varepsilon_*} E \right) + i \text{Re}_* \left( \frac{b_1}{\varepsilon_*} U_1'' + \beta V_1'' \right) \right] w +$$

$$+ 2i\alpha \left( b_1 + \frac{\varepsilon_*^2 \beta^2}{b_1} \right) [i\alpha\beta\varepsilon_*^2 v' - \text{Re}_*(V_1 v)'] = 0 \quad (2.4)$$

$$v'' - \left[ \alpha^2 b_3 + \frac{i\alpha \text{Re}_*}{\varepsilon_*} E + 2(\text{Re}_* U_1 - i\alpha\varepsilon_*) + \frac{4i\beta\varepsilon_*^2}{\alpha b_2} (i\alpha\beta\varepsilon_*^2 - \text{Re}_* V_1) \right] v -$$

$$- \frac{i\beta\varepsilon_*}{\alpha b_2} w''' + \frac{i}{\alpha b_2} [i\alpha\beta \text{Re}_* E + \alpha^2 \beta \varepsilon_* b_3 + 2 \text{Re}_*(\varepsilon_* \beta U_1 - V_1)] w' +$$

$$+ \frac{b_1 \text{Re}_*}{b_2} \left( \beta U_1' - \frac{V_1'}{\varepsilon_*} \right) w = 0$$

$$\eta = j-1, \quad j=1, 2: \quad v' + i \left[ \alpha\beta\varepsilon_* - \frac{1}{\alpha E} (V_1'' - 2i\alpha\beta\varepsilon_*^2 U_1) \right] w = 0$$

$$w'' + b_1 \left[ \alpha^2 - \frac{1}{E} (U_1'' - 2i\varepsilon_* U_1) \right] w + i\alpha\beta\varepsilon_* v' = 0$$

$$w''' - \left\{ \frac{3\alpha^2}{b_1} \left[ b_3 - \frac{4i\varepsilon_*}{\alpha} \left( 1 - \frac{i\varepsilon_*}{\alpha} + \frac{2\varepsilon_*^2 \beta^2}{3} \right) \right] \right\} +$$

$$+ \text{Re}_* \left( \frac{i\alpha}{\varepsilon_*} E + 2U_1 + \frac{2\beta\varepsilon_*}{b_1} V_1 \right) \left\} w' + (-1)^j \frac{i\alpha \text{Re}_*}{\varepsilon_*^2 E} (A_0 \alpha^2 b_2 b_3 - \lambda c^2 \delta \varepsilon_*) w +$$

$$+ 2i\alpha \left( b_1 + \frac{\varepsilon_*^2 \beta^2}{b_1} \right) (i\alpha\beta\varepsilon_*^2 - \text{Re}_* V_1) v = 0$$

$$E = U_1 - c + \varepsilon_* \beta V_1, \quad b_1 = 1 - \frac{2i\varepsilon_*}{\alpha}, \quad b_2 = b_1 + (\varepsilon_* \beta)^2$$

$$b_3 = 1 + (\varepsilon_* \beta)^2, \quad \beta = \frac{k}{\alpha}, \quad c = \frac{\omega}{\alpha}, \quad \delta = \alpha \sqrt{b_2}$$

причем  $\delta_r > 0$  (здесь и далее индекс «r» обозначает действительную часть соответствующей величины, «i» — мнимую).

Уравнения и граничные условия (2.4) позволяют рассматривать возмущения с пространственной или с временной периодичностью. Определение таких возмущений связано с решением задач на собственные значения, в которых вычисляются величины  $s$  или  $\alpha$  соответственно. Для численного решения (2.4) применяется метод дифференциальной прогонки с ортонормированием частных решений во внутренних точках [8]. При этом определяются три линейно независимых решения, начальные условия ко-

торых удовлетворяют соотношениям при  $\eta=0$ ; характеристическое уравнение для определения собственных значений следует из условия при  $\eta=-1$  и нетривиальности решения.

Собственные значения вычисляются параметрическим продолжением величин, полученных в [9, 10] для плоскопараллельного течения пленки с постоянным профилем скорости и рассмотренных в [3] для осесимметричной пленки в рамках невязкой постановки задачи об устойчивости.

В [3] показано, что для течения с симметричным относительно плоскости  $\eta=0,5$  профилем скорости существуют симметричные и антисимметричные решения задачи на собственные значения, причем в случае течения с близким к постоянному профилю скорости наиболее неустойчивы симметричные возмущения первого вида, для течения с развитым профилем — симметричные возмущения второго вида. Аналогичные результаты дает решение задачи (2.4); сравнение собственных значений (2.4) и величин из [3] показывает их близость. Например, в случае  $\lambda=10^{-3}$ ,  $Q=\pi \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>/с,  $H_c=2 \cdot 10^{-3}$  м,  $R=0,1$  м,  $x_0=0$ ,  $A_0=0,115 \cdot 10^{-3}$  при  $\alpha=0,1$ ,  $k=0$  для течения с профилем скорости  $U_i=1$ ,  $V_i=0$  значение  $c_1=0,961+0,0822i$  из [3] является решением (2.4) при  $Re_* = 100$ . Для профиля скорости

$$U_i = \frac{10}{11} (30\eta^4 - 60\eta^3 + 30\eta^2 + 0, 1), \quad V_i = 1 + 15(2\eta^3 - \eta^4 - \eta^2)$$

рассмотренного в [3], примеры собственных значений приводятся ниже, причем последняя величина является решением невязкой задачи [3]. Можно отметить, что в данном примере значение  $Re_* = 100$  соответствует пленке воды в воздухе

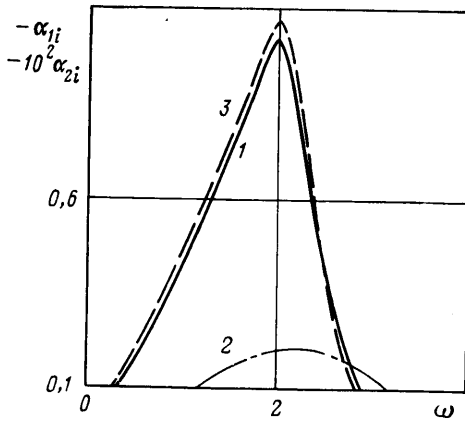
Re.	100	500	1000	$\infty$
$c_{2r}$	1,12	1,12	1,12	1,12
$c_{2i}$	0,364	0,379	0,380	0,385

Далее устойчивость основного течения изучается относительно периодических по времени возмущений. Неустойчивые возмущения второго вида, связанные с неоднородностью профиля скорости основного течения, существуют и для несимметричных относительно плоскости  $\eta=0,5$  течений. На фиг. 3 приводятся коэффициенты усиления возмущений в течении с профилем скорости (1.14) для указанных выше условий задачи (2.4) и  $Re_* = 100$ ,  $U_d = 0,1$ , причем кривые 1, 3 соответствуют возмущениям первого вида, 2 — второго (кривым 1, 2 соответствуют значения  $V_d = 2$ ,  $V_u = 0,4$ , кривой 3 —  $V_d = V_u = 0$ ). Из фиг. 3 следует, что возмущения первого вида более неустойчивы, чем второго; наличие азимутальной скорости оказывает стабилизирующее влияние. Вычисление значений  $\alpha(\omega)$  в случае, соответствующем кривым 1, 2 на фиг. 3, в области  $\omega_i > M$ , где  $M$  — максимальный коэффициент усиления периодических по пространству возмущений двух видов, показывает, что  $\alpha_i > 0$ , т. е. возмущения распространяются от оси симметрии течения [11].

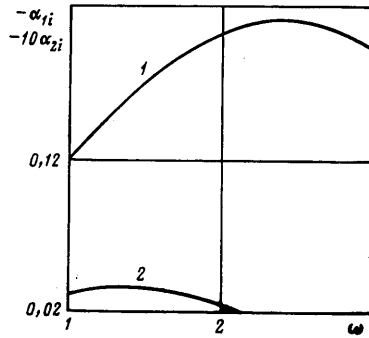
Для того же течения ниже приводятся характеристики возмущений с максимальными коэффициентами усиления (с точностью  $\Delta\omega = 0,005$ ) для различных значений  $k$ ; для спиральных возмущений, раскручивающихся в направлении вращения пленки ( $k < 0$ ), неустойчивость увеличивается. Надо отметить, что возможные значения  $|k|$  ограничены выполнением предположения о локальной плоскопараллельности и определяются видом зависимости основного течения от радиуса

$k$	0	-1	-2	-3
$\omega$	1,985	1,955	1,925	1,895
$\alpha_{1r}$	2,054	2,051	2,048	2,045
$\alpha_{1i}$	-1,003	-1,022	-1,041	-1,061

Результаты вычислений показывают, что поверхностное натяжение оказывает стабилизирующее влияние на течение; течение с профилем скорости (1.14) неустойчиво относительно возмущений обоих видов и в вакууме



Фиг. 3



Фиг. 4

( $\lambda=0$ ). Неустойчивые возмущения третьего и четвертого видов [3] для (1.14) не получены.

Выше приведены примеры характеристик устойчивости (1.14) при указанных условиях для  $x_0=0$ ,  $Re_* = 100$ . На фиг. 4 представлены коэффициенты усиления осесимметричных возмущений первого (кривая 1) и второго (кривая 2) вида при  $x_0=0,2$ , что соответствует компонентам скорости, обозначенным кривыми 2, 5 на фиг. 2, и  $\epsilon_* = 0,011$ ,  $Re_* = 30,4$ ,  $A_0 = 0,632 \cdot 10^{-4}$ .

В заключение отметим, что в отличие от [3] для рассмотренных режимов течений и профилей скорости, компоненты которых обладают одной точкой перегиба и качественно соответствуют стекающим с распыливающих насадок пленкам, наиболее неустойчивы возмущения первого вида.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дитякин Ю. Ф., Клячко Л. А., Новиков Б. В., Ягодкин В. И. Распыливание жидкостей. М.: Машиностроение, 1977. 207 с.
2. Huang J. C. P. The break-up of axisymmetric liquid sheets // J. Fluid Mech. 1970. V. 43. № 2. P. 305–319.
3. Сисоев Г. М., Шкадов В. Я. Течение и устойчивость свободной осесимметричной пленки жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 5. С. 23–29.
4. Шкадов В. Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во МГУ, 1973. 192 с.
5. Сисоев Г. М., Тальдрик А. Ф., Шкадов В. Я. Течение пленки вязкой жидкости по поверхности вращающегося диска // Инж.-физ. журн. 1986. Т. 51. № 4. С. 571–575.
6. Gottlieb D., Orszag S. A. Numerical analysis of spectral methods: theory and applications. Philadelphia, 1977. 172 p.
7. Charwat A. F., Kelly R. E., Gazley C. The flow and stability of thin liquid films on a rotating disk // J. Fluid Mech. 1972. V. 53. № 2. P. 227–255.
8. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Усп. матем. наук. 1961. Т. 16. Вып. 3. С. 171–174.
9. Squire H. B. Investigation of the instability of a moving liquid film // Brit. J. Appl. Phys. 1953. V. 4. № 6. P. 167–169.
10. Hagerty W. W., Shea J. F. A study of the stability of plane fluid sheets // J. Appl. Mech. 1955. V. 22. № 4. P. 509–514.
11. Куликовский А. Г. Об устойчивости однородных состояний // ПММ. 1966. Т. 30. № 1. С. 148–153.

Москва

Поступила в редакцию  
24.V.1989