

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ЧЕРЕЗ
ТОНКУЮ ЩЕЛЬ

Течение газа через тонкую щель исследовалось в узком диапазоне чисел Кнудсена либо в предельном случае истечения газа в вакуум. В [1] рассматривалось изотермическое течение газа в широком диапазоне чисел Кнудсена при малых перепадах давления. В данной работе исследуется неизотермическое движение газа через тонкую щель под действием малых перепадов давления и температуры. Найден поле течения и потоки массы и тепла. Показано, что теплообмен между газом и перегородкой, вызванный перепадом давления, приводит к эффекту тепловой поляризации. Проведена проверка соотношения взаимности Онзагера.

1. Пусть бесконечная тонкая перегородка, находящаяся в плоскости $x=0$, делит бесконечное пространство, заполненное газом, на две части. Перегородка имеет бесконечную щель в области $-a/2 \leq y \leq a/2$, $-\infty < z < \infty$, где a — высота щели. На бесконечном удалении от щели слева поддерживаются давление газа p_1 и температура T_1 , а справа — p_2 и T_2 . При этом функции распределения вдали от щели имеют вид абсолютных максвеллианов

$$f_i = \frac{p_i}{kT_i} \left(\frac{m}{2\pi kT_i} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT_i}\right), \quad i=1, 2$$

Здесь m — масса молекулы, k — постоянная Больцмана. Перегородка непроницаема для молекул газа и абсолютно нетеплопроводна, слева ее температура T_1 , справа — T_2 . Предполагается, что относительные перепады давления и температуры малы: $|p_2 - p_1|/p_1 \ll 1$, $|T_2 - T_1|/T_1 \ll 1$. Необходимо найти поле течения и потоки тепла и массы через щель.

2. В отличие от [1] за исходное уравнение для функции распределения возьмем модельное уравнение Больцмана третьего порядка, обеспечивающее адекватное описание процессов тепло- и массопереноса одновременно, так называемую S -модель

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \frac{p}{\eta} (f^+ - f) \quad (1.1)$$

$$f^+ = f^0 \left[1 + \frac{4}{15} \mathbf{S} \mathbf{W} \left(W^2 - \frac{5}{2} \right) \right]$$

$$f^0 = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp(-W^2)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n} \int \mathbf{W} W^2 f d\mathbf{v}, \quad \mathbf{W} = \sqrt{\frac{m}{2kT}} (\mathbf{v} - \mathbf{u})$$

$$n = \int f d\mathbf{v}, \quad n\mathbf{u} = \int \mathbf{v} f d\mathbf{v}, \quad T = \frac{2}{3k} \int \frac{mv^2}{2} f d\mathbf{v}, \quad p = nkT$$

$$\eta = \frac{1}{2} nm \langle v \rangle \lambda, \quad \langle v \rangle = \left(\frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2}$$

Здесь η — коэффициент вязкости, λ — длина свободного пробега, $\langle v \rangle$ — тепловая скорость молекулы.

Введем следующие безразмерные величины:

$$\mathbf{c} = \left(\frac{m}{2kT_1} \right)^{1/2} \mathbf{v}, \quad \mathbf{u}' = \left(\frac{m}{2kT_1} \right)^{1/2} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{q}' = \left[\frac{1}{2} n_1 m \left(\frac{2kT_1}{m} \right)^{3/2} \right]^{-1} \mathbf{S}, \quad x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{a}$$

Далее у безразмерных величин штрихи опускаются.

В силу малости перепадов давления и температуры неизвестную функцию распределения представим в виде

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{c}) = f_1[1 + h(\mathbf{r}, \mathbf{c})], \quad |h| \ll 1 \quad (1.2)$$

Подставляя (1.2) в (1.1), получим линеаризованное уравнение S -модели

$$\mathbf{c} \frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}} = \delta \left[\vartheta + 2\mathbf{c}\mathbf{u} + \left(\frac{4}{15} \mathbf{q}\mathbf{c} + \tau \right) \left(c^2 - \frac{5}{2} \right) - h \right], \quad \delta = \frac{\sqrt{\pi} a}{2\lambda} \quad (1.3)$$

Здесь δ — параметр разреженности, ϑ и τ — относительные отклонения давления и температуры соответственно от равновесных значений в первом сосуде.

Интегродифференциальное уравнение (1.3) решалось интегрально-моментным методом. Подставив выражение для функции возмущения, получаемое интегрированием (1.3) по характеристике, в формулы для моментов функции распределения

$$[\vartheta; \mathbf{u}; \tau; \mathbf{q}] = \int f_1 h \left[\frac{2}{3} c^2; \mathbf{c}; \frac{2}{3} c^2 - 1; \mathbf{c} \left(c^2 - \frac{5}{2} \right) \right] d\mathbf{c}$$

получим систему интегральных уравнений

$$M_i(\mathbf{r}) = \frac{\delta}{\pi} \sum_{j=1}^6 \int_0^{2\pi} \int_0^{S_0} K_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') M_j(\mathbf{r}') ds d\varphi + \frac{1}{\pi} \Phi_i(\mathbf{r}), \quad 1 \leq i \leq 6$$

$$\mathbf{r}' = (x', y') = (x - s \cos \varphi, y - s \sin \varphi)$$

$$M_1 = \vartheta(\mathbf{r}), \quad M_2 = u_x(\mathbf{r}), \quad M_3 = u_y(\mathbf{r})$$

$$M_4 = \tau(\mathbf{r}), \quad M_5 = q_x(\mathbf{r}), \quad M_6 = q_y(\mathbf{r})$$

Здесь S_0 — расстояние от точки наблюдения до границы поля течения в направлении $-\mathbf{c}_p$, где $\mathbf{c}_p = \mathbf{c}_x + \mathbf{c}_y$. Выражения для K_{ij} и Φ_i даны в приложении. Процедура получения интегральных уравнений для моментов функции распределения приведена в [1].

3. Система интегральных уравнений решалась методом Крылова — Боголюбова [3]. Расчеты проведены на ЭВМ с точностью не хуже 2% в диапазоне чисел δ от 0,02 до 2. Точность вычислений контролировалась сравнением результатов расчетов на различных сетках.

В силу геометрической симметрии и линейности задачи имеют место следующие равенства:

$$u_x(x, y) = u_x(-x, y) = u_x(x, -y)$$

$$u_y(x, y) = -u_y(-x, y) = -u_y(x, -y)$$

$$q_x(x, y) = q_x(-x, y) = q_x(x, -y)$$

$$q_y(x, y) = -q_y(-x, y) = -q_y(x, -y)$$

Поэтому поле течения достаточно представить в первой четверти плоскости XU . Говоря о направлении скорости газа \mathbf{u} и плотности потока \mathbf{q} , для определенности будем подразумевать, что $p_2 < p_1$ и $T_2 > T_1$.

Введем функцию тока $\psi(x, y)$ поля так, что $u_x = A \partial \psi / \partial x$, $u_y = -A \partial \psi / \partial y$, где A — нормировочный коэффициент, вычисляемый из условия $\psi(0, 1/2) - \psi(0, 0) = 1$. Семейство кривых $\psi(x, y) = \text{const}$ определяет линии тока. Аналогично вводятся и линии тока векторного поля плотности потока тепла \mathbf{q} .

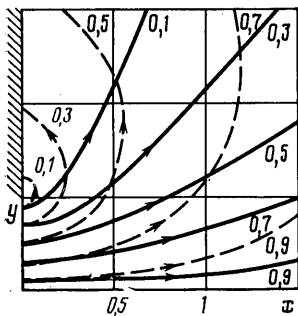
В силу линейности задачи моменты функции распределения можно разложить на составляющие

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^p \frac{\Delta p}{p_1} + \mathbf{u}^T \frac{\Delta T}{T_1}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}^p \frac{\Delta p}{p_1} + \mathbf{q}^T \frac{\Delta T}{T_1}$$

Рассмотрим каждую из этих составляющих в отдельности и соответствующие им линии тока.

На фиг. 1 сплошной линией представлены линии тока поля скорости \mathbf{u}^T при $\delta = 2$. По форме они близки к гиперболам с фокусами в точках $x = 0$; $y = \pm 0,5$. При других значениях δ линии тока векторных полей \mathbf{u}^p и \mathbf{u}^T имеют аналогичный вид. Необходимо учитывать, что векторы \mathbf{u}^p направлены справа налево, так как справа большее давление, а \mathbf{u}^T — слева направо, т. е. от «холодного» сосуда к «горячему». В предельных режимах течения $\delta = 0$ и ∞ поле скорости \mathbf{u}^p можно найти аналитически. Для режима сплошной среды оно получено в [4]. В обоих предельных случаях линии тока в точности совпадают с гиперболами.

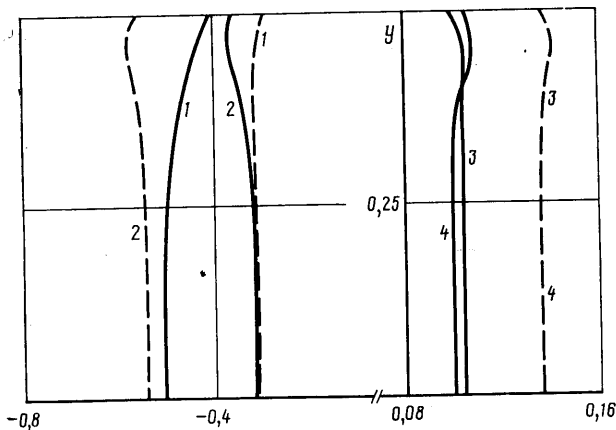
На фиг. 1 штриховыми линиями показаны линии тока поля плотности потока тепла \mathbf{q}^p при $\delta = 2$. Линии тока начинаются и оканчиваются на вертикальной стенке.



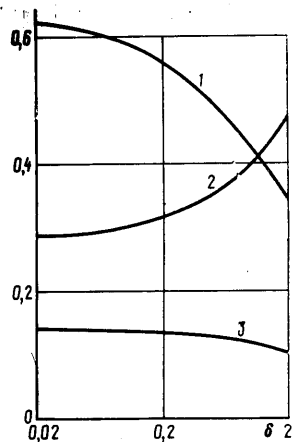
Фиг. 1

Это указывает на теплообмен между газом и поверхностью перегородки. Особенно интенсивно теплообмен происходит возле кромки щели. С уменьшением числа δ линии тока поля q^p приближаются к линиям тока поля u^T . Линии тока полей q^T и q^p аналогичны. При этом надо учитывать, что векторы q^T направлены справа налево, так как справа температура больше, а векторы q^p — слева направо, т. е. от сосуда с меньшим давлением к сосуду с большим давлением.

Заметим, что если поверхности перегородки не термостатированы, то наличие потока тепла q^p приведет к нагреву одной стороны перегородки и охлаждению другой, т. е. к эффекту тепловой поляризации. Максимальное проявление эффекта тепловой поляризации следует ожидать при промежуточных числах Кнудсена, так как в свободномолекулярном режиме



Фиг. 2



Фиг. 3

отсутствует нормальная к стенкам щели составляющая плотности потока тепла q^p , а в режиме сплошной среды плотность потока тепла по величине меньше, чем в промежуточном режиме.

На фиг. 2 показаны профили продольных компонент скорости газа u_x^p (кривые 1), u_x^T (кривые 4) и плотности потока тепла q_x^T (кривые 2), q_x^p (кривые 3) в плоскости $x=0$ для разных δ (сплошные кривые — $\delta=2$, штриховые — $\delta=0.2$). Заметим, что здесь используются разные масштабы для прямых и перекрестных потоков. Из фиг. 2 видно, что все профили, кроме u_x^p , имеют небольшой максимум вблизи кромки щели и минимум в центре. При уменьшении числа δ профили выравниваются.

Потоки массы и тепла через щель введем следующим образом:

$$G_p = - \int_{-1/2}^{1/2} u_x^p(0, y) dy, \quad G_T = \int_{-1/2}^{1/2} u_x^T(0, y) dy$$

$$Q_p = \int_{-1/2}^{1/2} q_x^p(0, y) dy, \quad Q_T = - \int_{-1/2}^{1/2} q_x^T(0, y) dy$$

Поясним их физический смысл: G_p — поток массы под действием перепада давления, Q_T — поток тепла под действием перепада температур, соответствующий термокрипу, G_T — поток массы под действием перепада температуры, соответствующий механокалорическому эффекту. Как показано в [5], для G_T и Q_p справедливо соотношение Онзагера $G_T = Q_p$. Анализ результатов численного расчета показывает, что при всех значениях δ это соотношение выполнялось в пределах погрешности вычислений. В силу того что заранее это условие на решение не накладывалось, его выполнение следует рассматривать как дополнительное подтверждение высокой точности численных расчетов.

Заметим, что массовый расход газа под действием перепада давления традиционно представлялся в виде M/\dot{M}_0 , где M — массовый расход газа при произволь-

ном режиме течения, \dot{M}_0 — массовый расход газа в свободномолекулярном режиме течения. Связь этой величины с расходом G_p имеет вид $\dot{M}/\dot{M}_0 = G_p/2\sqrt{\pi}$.

На фиг. 3 показаны зависимости потоков G_p (кривая 1), $Q_p = G_p$ (кривая 2), Q_T (кривая 3) от обратного числа Кнудсена δ . Все потоки, кроме G_p , с увеличением δ уменьшаются.

Ниже приведено сравнение результатов расчета с помощью S- и БГК-модели [1]:

	δ	0,2	0,2	2
S-модель		0,288	0,316	0,482
БГК-модель		0,288	0,313	0,476

Видно, что в рассматриваемом диапазоне различие не превышает 2%. Следовательно, для вычисления потоков массы под действием перепада давления для функции распределения достаточно использовать модельное кинетическое уравнение первого порядка. Температуру газа при этом можно считать постоянной во всем поле течения.

Приложение

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= \frac{1}{3}(2I_2 + I_0), & K_{12} &= \frac{2}{3}(2I_3 + I_1) \cos \varphi \\
 K_{14} &= \frac{2}{3}I_4 - I_2 - \frac{1}{3}I_0, & K_{15} &= \frac{4}{15} \left(\frac{2}{3}I_5 - I_3 - \frac{1}{3}I_1 \right) \cos \varphi \\
 K_{21} &= I_1 \cos \varphi, & K_{22} &= 2I_2 \cos^2 \varphi \\
 K_{24} &= (I_3 - 2I_1) \cos \varphi, & K_{25} &= \frac{4}{15}(I_4 - 2I_2) \cos^2 \varphi \\
 K_{41} &= \frac{2}{3}(I_2 - I_0), & K_{42} &= \frac{4}{3}(I_3 - I_1) \cos \varphi \\
 K_{44} &= \frac{2}{3}I_4 - 2I_2 + \frac{5}{3}I_0, & K_{45} &= \frac{4}{15} \left(\frac{2}{3}I_5 - 2I_3 + \frac{5}{3}I_1 \right) \cos \varphi \\
 K_{51} &= K_{24}, & K_{52} &= \frac{15}{2}K_{25} \\
 K_{54} &= \left(I_5 - 4I_3 + \frac{9}{2}I_1 \right) \cos \varphi, & K_{55} &= \frac{4}{15} \left(I_6 - 4I_4 + \frac{9}{2}I_2 \right) \cos^2 \varphi \\
 K_{ij} &= K_{i,j-1} \operatorname{tg} \varphi, & K_{ji} &= K_{j-1,i} \operatorname{tg} \varphi \\
 \Phi_i &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cos \varphi} \left(\frac{1}{2}K_{i2}\vartheta_w + \frac{15}{4}K_{i5} \frac{\Delta T}{T_1} \right) dy' \Big|_{x'=0} \\
 & & & 1 \leq i \leq 6, \quad j = 3, 6 \\
 I_n &= \int_0^{\infty} c^n \exp\left(-c^2 - \frac{\delta s}{c}\right) dc \\
 s &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{1/2}, & \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{y - y'}{x - x'} \\
 \vartheta_w &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_{c_n < 0} \exp(-c^2) h(r', c) dc & \left(y' > \frac{1}{2}; y' < -\frac{1}{2} \right) \\ \frac{\Delta p}{p_1} & \left(-\frac{1}{2} \leq y' \leq \frac{1}{2} \right) \end{cases}
 \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шарипов Ф. М., Акинъшин В. Д., Селезнев В. Д. Течение разреженного газа через тонкую щель. Минск, 1987. 11 с.— Деп. в ВИНТИ 17.06.87. № 4392—В87.
2. Шахов Е. М. Метод исследования движений разреженного газа. М.: Наука, 1974. С. 207.
3. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
4. Roscoe R. The flow of viscous fluids round Plane obstacles // Phil. Mag., 1949. V. 40. № 302. P. 338—351.
5. Шарипов Ф. М., Акинъшин В. Д. Симметрия кинетических коэффициентов в линейных задачах динамики разреженного газа. Минск, 1988. 44 с.— Деп. в ВИНТИ 18.03.88. № 2123—В88.

Свердловск

Поступила в редакцию
18.V.1988

УДК 533.6.011.8

© 1990 г.

К. В. НИКОЛАЕВ

ОБТЕКАНИЕ СФЕРЫ РАЗРЕЖЕННЫМ ГАЗОМ ПРИ НАЛИЧИИ ВДУВА

Рассматривается обтекание наветренной стороны сферы гиперзвуковым потоком разреженного газа при наличии распределенного вдува с поверхности тела. Аналогичная задача решалась ранее как в рамках механики сплошной среды [1—3], так и на основе модельных кинетических уравнений [4]. В данной работе расчеты проведены методом прямого статистического моделирования Монте-Карло [5, 6]. Вдувался газ того же сорта, что и в набегающем потоке. Использована модель простого одноатомного газа с потенциалом взаимодействия твердых шаров. Отражение молекул от поверхности тела предполагалось диффузным с полной аккомодацией энергии. Методика расчетов с использованием весовых множителей описана в работе [7]. Исследовано влияние вдува на силовое и тепловое воздействие потока газа на тело при различной степени разреженности среды и интенсивности вдува.

1. Расчеты проведены для числа Маха невозмущенного потока $M_\infty = 20$, температурного фактора (отношения температуры тела к температуре торможения) $t_w = T_w/T_0 = 0,03$ и диапазона чисел Рейнольдса $0,01 \leq Re_0 \leq 100$ ($Re_0 = \rho_\infty V_\infty r_0 / \mu_0$, где ρ_∞ и V_∞ — плотность и скорость невозмущенного потока, r_0 — радиус сферы, μ_0 — коэффициент вязкости при температуре торможения.) Соответствующий диапазон чисел Кнудсена $Kn_\infty = \lambda_\infty / r_0$ в невозмущенном потоке составил $0,028 \leq Kn_\infty \leq 280$.

Распределение потока массы вдуваемого газа по телу задавалось в виде

$$F_m = \varepsilon \rho_\infty V_\infty \cos \theta \quad (1.1)$$

где угол θ отсчитывался от оси симметрии. Параметр вдува ε в расчетах задавался в диапазоне $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Функция распределения молекул вдуваемого газа предполагалась максвелловской при температуре тела.

2. Расчетная сетка строилась в полярных координатах r, θ . По координате θ производилось равномерное разбиение на 12 ячеек. По координате r сетка сгущалась к телу с таким расчетом, чтобы величина шага Δr всюду была по крайней мере в 3 раза меньше местной длины свободного пробега молекул. Расстояние от центра сферы до внешней границы расчетной области выбиралось таким, чтобы охватить внешнюю границу размытой ударной волны, и изменялось от $1,5 r_0$ при $Re_0 = 100$ до $10 r_0$ при $Re_0 \leq 0,1$. Поскольку столкновительная релаксация осуществлялась по схеме испытаний Бернулли [6], приходилось заботиться о том, чтобы число моделирующих частиц в ячейках не было слишком большим. С этой целью шаг сетки Δr вблизи внешней границы расчетной области задавался много меньшим длины свободного пробега молекул. Качество расчетов от этого должно было только выигрывать, однако число ячеек по координате r приближалось в некоторых расчетах к тысяче.

3. Следуя терминологии, принятой в механике сплошной среды, силовое воздействие потока газа на тело можно условно разделить на нормальное (давление) и касательное (трение) напряжения.