

УДК 532.51.013.4:536.25

© 1990 г.

Ю. Е. КАРЯЖИН

## НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЕСТЕСТВЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ В ТОРОИДАЛЬНОЙ ЕМКОСТИ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Рассматривается нестационарная естественная конвекция в тороидальных емкостях, меридиональное сечение которых — четырехугольник с произвольными криволинейными границами. Вектор силы тяжести параллелен оси симметрии. Уравнения Навье — Стокса и энергии приведены к универсальному виду, описывающему конвективные процессы как в плоском, так и в осесимметричном случае. Численное решение задачи производится на основе многошагового неявного конечно-разностного метода. Выполнен расчет нестационарной естественной конвекции в тороидальной емкости, сечение которой образовано отрезками прямых линий.

Необходимость исследования естественно-конвективных процессов в емкостях тороидальной формы появилась в связи с расширением конструкторских работ по созданию коллекторов солнечной энергии, а также резервуаров криогенной техники. В [1, 2] на основе проведенных экспериментов построена система критериев подобия, позволяющая оценивать основные термодинамические характеристики процесса конвекции в тороидальном резервуаре, частично заполненном криогенной жидкостью.

**1 Исходные уравнения.** Уравнения нестационарной естественной конвекции в приближении Буссинеска, записанные относительно произвольной криволинейной неортогональной системы координат  $(x^1, x^2, x^3)$ , имеют вид [3–5]

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial (v^{*k} v_i^*)}{\partial x^k} = -\text{Gr} \frac{g_i}{g} \theta - \frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^k} \left( g^{*kl} \frac{\partial v_i^*}{\partial x^l} \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial (v^{*k} \theta)}{\partial x^k} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left( g^{*kl} \frac{\partial \theta}{\partial x^l} \right) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial v^{*k}}{\partial x^k} = 0 \quad (i, k, l=1, 2, 3) \quad (1.3)$$

где  $v_i, v^i$  — ковариантные и контравариантные составляющие вектора скорости в системе координат  $(x^1, x^2, x^3)$ ,  $t$  — время,  $p$  — давление,  $\theta = (T - T_2)/(T_1 - T_2)$  — относительная температура,  $T$  — размерная температура ( $T_1$  и  $T_2$  — ее некоторые характерные значения),  $g^{*kl}$  — составляющие метрического тензора,  $g$  — ускорение свободного падения,  $g_i$  — его ковариантная составляющая,  $\text{Gr}$  — число Грасгофа,  $\text{Pr}$  — число Прандтля. Дважды повторяющиеся индексы здесь и далее предполагают суммирование по всем допустимым для них значениям.

Составляющие вектора скорости в системе координат  $(x^1, x^2, x^3)$  связаны с его компонентами  $u_1, u_2, u_3$  в декартовой системе координат  $(y_1, y_2, y_3)$  известными соотношениями тензорного анализа ( $\alpha=1, 2, 3$ )

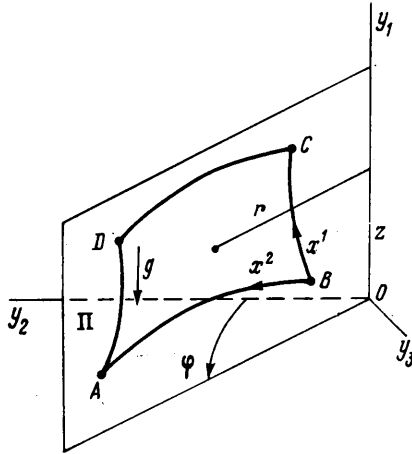
$$v_i = u_\alpha \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i}, \quad v^i = u_\alpha \frac{\partial x^i}{\partial y_\alpha}, \quad u_\alpha = v_i \frac{\partial x^i}{\partial y_\alpha} = v^i \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} \quad (1.4)$$

а величины  $v_i^*, v^{*i}, g^{*kl}$ , входящие в (1.1)–(1.3), определяются с помощью производных  $\partial x^i / \partial y_\alpha$  и  $\partial y_\alpha / \partial x^i$ , зафиксированных в точке дифференциро-

вания  $Q$

$$v_i^* = u_\alpha \left( \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} \right)_Q, \quad v^{*i} = u_\alpha \left( \frac{\partial x^i}{\partial y_\alpha} \right)_Q, \quad g^{*kl} = \frac{\partial x^i}{\partial y_\alpha} \left( \frac{\partial x^k}{\partial y_\alpha} \right)_Q \quad (1.5)$$

2. Универсальная форма уравнений конвекции. Рассмотрим теперь случай осесимметричного конвективного движения в тороидальном канале, меридиональное сечение которого — четырехугольник  $ABCD$  с произвольными криволинейными границами (фиг. 1). Пусть  $y_1$  является осью симметрии канала, не пересекающей фигуру  $ABCD$ , а вектор силы тяжести



Фиг. 1

параллелен этой оси. Будем предполагать, что закрутка потока отсутствует. В плоскости сечения  $\Pi$  выберем криволинейную, в общем случае неортогональную систему  $(x^1, x^2)$ , координатные линии которой совпадают с границами исследуемой области. Потребуем, чтобы четырехугольная фигура  $ABCD$  преобразовывалась в этой системе в каноническую — квадрат со стороной, равной единице ( $0 \leq x^1 \leq 1, 0 \leq x^2 \leq 1$ ). В качестве координаты  $x^3$  выберем угол поворота  $\varphi$  плоскости  $\Pi$  вокруг оси  $y_1$ .

Из соотношений, связывающих декартовы координаты любой точки плоскости  $\Pi$  с цилиндрическими координатами ( $y_1 = z, y_2 = r \cos x^3, y_3 = r \sin x^3$ ), вытекают выражения, справедливые при  $x^3 = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial x^1} &= \frac{\partial z}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x^1} = \frac{\partial r}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x^2} = \frac{\partial r}{\partial x^2} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x^3} &= \frac{\partial y_2}{\partial x^3} = \frac{\partial y_3}{\partial x^1} = \frac{\partial y_3}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial y_3}{\partial x^3} = r \end{aligned} \quad (2.1)$$

Причем в случае осесимметричного канала  $r = r(x^1, x^2), z = z(x^1, x^2)$ .

Предполагая, что существует обратное преобразование координат, можно получить ( $x^3 = 0$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^1}{\partial y_1} &= \frac{1}{J} \frac{\partial r}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial x^1}{\partial y_2} = -\frac{1}{J} \frac{\partial z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial y_1} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial r}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial x^2}{\partial y_2} = \frac{1}{J} \frac{\partial z}{\partial x^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial y_3} &= \frac{\partial x^2}{\partial y_3} = \frac{\partial x^3}{\partial y_1} = \frac{\partial x^3}{\partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial x^3}{\partial y_3} = \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{\partial x^1}{\partial y_3} \right) = \frac{\partial x^1}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{\partial x^2}{\partial y_3} \right) = \frac{\partial x^2}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x^3} \left( \frac{\partial x^3}{\partial y_3} \right) = 0 \quad (2.3)$$

$$J = \frac{\partial z}{\partial x^1} \frac{\partial r}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial x^2} \frac{\partial r}{\partial x^1}$$

Рассмотрим теперь особенности кинематических характеристик в осесимметричном случае движения. Пусть  $U$ ,  $V$  — не зависящие от  $x^3$  осевая и радиальная скорости в цилиндрической системе координат. Тогда зависимость декартовых составляющих скорости от координаты  $x^3$  определяется формулами

$$u_1 = U, \quad u_2 = V \cos x^3, \quad u_3 = V \sin x^3 \quad (2.4)$$

Используя (1.5), (2.1), (2.2) и (2.4), получим выражения для функций  $v_i^*$ ,  $v^{*i}$

$$\begin{aligned} v_1^* &= U \frac{\partial z}{\partial x^1} + V \frac{\partial r}{\partial x^1} \cos x^3, & v_2^* &= U \frac{\partial z}{\partial x^2} + V \frac{\partial r}{\partial x^2} \cos x^3 \\ v_3^* &= rV \sin x^3 \\ v^{*1} &= \frac{1}{J} \left( U \frac{\partial r}{\partial x^2} - V \frac{\partial z}{\partial x^2} \cos x^3 \right), & v^{*2} &= \frac{1}{J} \left( V \frac{\partial z}{\partial x^1} \cos x^3 - U \frac{\partial r}{\partial x^1} \right) \\ v^{*3} &= \frac{V}{r} \sin x^3 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Входящие в (2.5) величины  $r$ ,  $J$ ,  $\partial r/\partial x^1$ ,  $\partial r/\partial x^2$ ,  $\partial z/\partial x^1$ ,  $\partial z/\partial x^2$  предполагаются фиксированными в точке дифференцирования  $Q$ , расположенной в плоскости  $x^3=0$ .

Из (2.5) следует, что значения величин  $v_i^*$  и  $v^{*i}$  зависят от координаты  $x^3$ . Для получения уравнений естественной конвекции в осесимметричном случае необходимо раскрыть аналитически входящие в (1.1)–(1.3) производные по координате  $x^3$ . В силу осевой симметрии эту процедуру достаточно выполнить в какой-либо одной меридиональной плоскости, скажем, при  $x^3=0$ .

Прежде всего рассмотрим уравнение неразрывности (1.3). Выделим из его левой части производную по координате  $x^3$

$$\frac{\partial v^{*k}}{\partial x^k} = \frac{\partial v^{*s}}{\partial x^s} + \frac{\partial v^{*3}}{\partial x^3} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x^s} (rv^{*s}) \quad (k, l=1, 2, 3; s=1, 2) \quad (2.6)$$

При этом учтено, что при  $x^3=0$

$$\frac{\partial v^{*3}}{\partial x^3} = \frac{V}{r} = \frac{v^s}{r} \frac{\partial r}{\partial x^s} \quad (2.7)$$

Используя (2.5) и (2.7), преобразуем конвективные члены уравнений (1.1) в осесимметричном случае следующим образом:

$$\frac{\partial (v^{*k} v_i^*)}{\partial x^k} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x^s} (rv^{*s} v_i^*) \quad (k=1, 2, 3; i, s=1, 2) \quad (2.8)$$

Соответственно диффузионные члены с учетом (2.1)–(2.3) приведутся к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^k} \left( g^{*kl} \frac{\partial v_i^*}{\partial x^l} \right) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x^s} \left( rg^{*sm} \frac{\partial v_i^*}{\partial x^m} \right) + I_i \quad (k, l=1, 2, 3; i, s, m=1, 2) \\ I_i &= -\frac{V}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x^i} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Аналогично преобразуются слагаемые уравнения энергии (1.2). Используя выражения (2.6), (2.8) и (2.9), представим систему уравнений

(1.1)–(1.3) в универсальном виде, описывающем нестационарную естественную конвекцию жидкости в приближении Буссинеска как в плоском, так и в осесимметричном случае относительно произвольной криволинейной неортогональной системы координат

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{r^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^s} (r^\sigma v^{*s} v_i^*) = F_i - \frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{1}{r^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^s} \left( r^\sigma g^{*sm} \frac{\partial v_i^*}{\partial x^m} \right) + \sigma I_i \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{r^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^s} (r^\sigma v^{*s} \theta) = \frac{1}{\text{Pr} r^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^s} \left( r^\sigma g^{*sm} \frac{\partial \theta}{\partial x^m} \right) \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{r^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^s} (r^\sigma v^{*s}) = 0 \quad (i, s, m=1, 2) \quad (2.12)$$

Входящие в (2.10) ковариантные составляющие вектора подъемной силы имеют вид

$$F_i = -\text{Gr} \theta \frac{\partial z}{\partial x^i} \text{sign}(g_{vi})$$

где  $g_{vi}$  – проекция вектора ускорения свободного падения на ось  $y_i$ .

При исследовании естественной конвекции в плоских областях следует полагать  $\sigma=0$  в уравнениях (2.10)–(2.12). В случае осесимметричной конвекции в тороидальной емкости (фиг. 1) считаем, что  $\sigma=1$ . Разумеется, уравнения (2.10)–(2.12) пригодны для описания конвекции и в таких осесимметричных областях, ось симметрии которых совпадает с каким-либо участком границы фигуры  $ABCD$ . В этом случае потребуется лишь дополнительное исследование особенностей, которые появятся в точках, расположенных на оси симметрии.

Система уравнений (2.10)–(2.12) замыкается соответствующими граничными условиями: прилипания и непротекания – для компонент вектора скорости, первого или второго рода – для температуры  $\theta$ . Задавая температурные условия второго рода, следует учитывать, что производная по нормали к координатной линии  $x^i = \text{const}$  ( $i=1, 2$ ) имеет вид (не суммировать по  $i!$ )

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial n} \right|_{x^i = \text{const}} = \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}} g^{si} \frac{\partial \theta}{\partial x^s} \quad (s=1, 2)$$

При решении нестационарной задачи используются также начальные условия: в начальный момент времени жидкость предполагается неподвижной во всей области конвекции, а ее температура  $\theta=0,5$ .

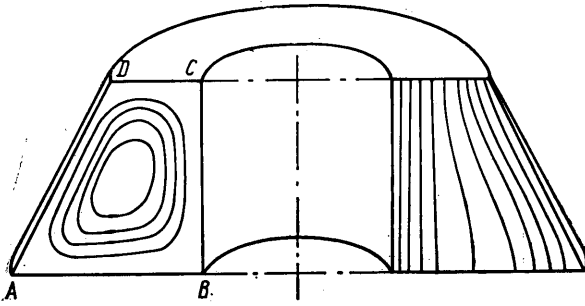
**3. Численный метод.** Опишем кратко особенности используемого конечно-разностного метода решения уравнений (2.10)–(2.12).

В области интегрирования наносится неравномерная разностная сетка с экспоненциальными сгущениями узлов вблизи границ. Значения искомых сеточных функций  $v_1, v_2, p$  и  $\theta$  задаются способом, характерным для MAC-сетки [6]. Конвективные производные аппроксимируются по схеме с квадратичной интерполяцией против потока [7], остальные производные – с помощью центральных разностей.

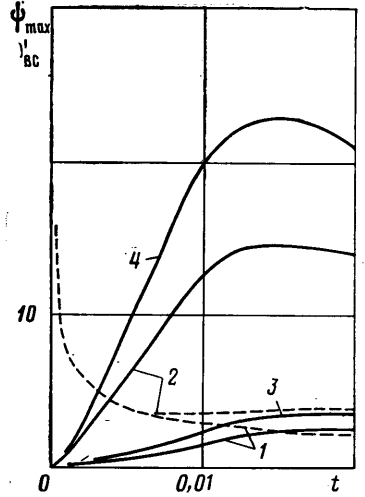
Используется многошаговая неявная разностная схема с расщеплением исходных уравнений по физическим процессам и пространственным переменным [3, 8]. Задача решается относительно поправок к искомым величинам. При нахождении поля поправок к давлению вводится набор шагов по релаксационному времени, обеспечивающий равномерную сходимость решения во всем спектре собственных частот задачи. Выполняется так называемое ориентированное расщепление, которое определяется направлением потока и осуществляется непосредственно в процессе решения задачи. Получающаяся разностная схема приобретает параболические свойства, она особенно эффективна при исследовании течений с циркуляционными зонами.

При задании на какой-либо границе температурного граничного условия второго рода его разностный аналог реализуется с помощью скалярной прогонки вдоль этой границы. Все расчеты выполнялись на неравномерной сетке  $30 \times 30$ .

**4. Результаты расчетов.** Описанный выше конечно-разностный метод применялся для численного моделирования нестационарных естественно-



Фиг. 2



Фиг. 3

конвективных процессов в тороидальных емкостях нескольких конфигураций. В качестве примера рассмотрим конвекцию в емкости, меридиональное четырехугольное сечение которой образовано отрезками прямых линий (фиг. 2).

Пусть известны цилиндрические координаты угловых точек:  $A(z_A, r_A)$ ,  $B(z_B, r_B)$ ,  $C(z_C, r_C)$ ,  $D(z_D, r_D)$ . Систему координат  $(x^1, x^2)$  введем следующим образом:

$$x^1 = \frac{z - z_{AB}(x^2)}{z_{DC}(x^2) - z_{AB}(x^2)}, \quad x^2 = \frac{r - r_{BC}(x^1)}{r_{AD}(x^1) - r_{BC}(x^1)} \quad (4.1)$$

В случае прямолинейных границ области конвекции будем иметь

$$z_{AB}(x^2) = z_B + x^2(z_A - z_B), \quad z_{DC}(x^2) = z_C + x^2(z_D - z_C) \\ r_{BC}(x^1) = r_B + x^1(r_C - r_B), \quad r_{AD}(x^1) = r_A + x^1(r_D - r_A) \quad (4.2)$$

Преобразование (4.1), (4.2) трансформирует сечение  $ABCD$  в каноническую область в плоскости координат  $(x^1, x^2)$  — квадрат со стороной, равной единице. Используя эти выражения, легко вычислить необходимые для расчетов значения производных  $\partial z/\partial x^1$ ,  $\partial z/\partial x^2$ ,  $\partial r/\partial x^1$  и  $\partial r/\partial x^2$ .

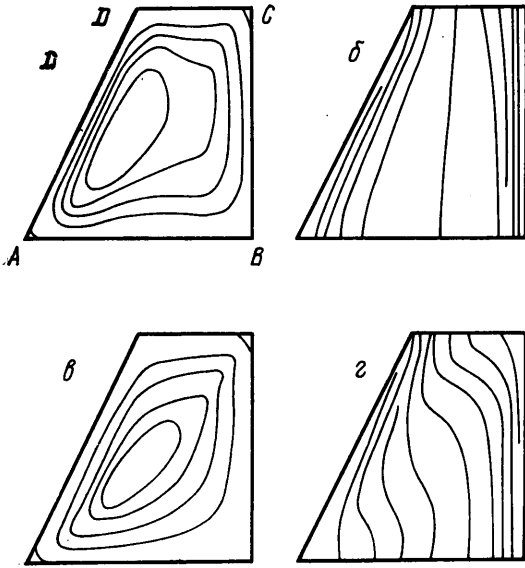
Предполагается, что внутренняя и внешняя границы емкости изотермические ( $BC$  — горячая,  $AD$  — холодная), а основания теплоизолированы, т. е.

$$\theta_{AD} = 0, \quad \theta_{BC} = 1, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial n} \right|_{AB} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial n} \right|_{DC} = 0$$

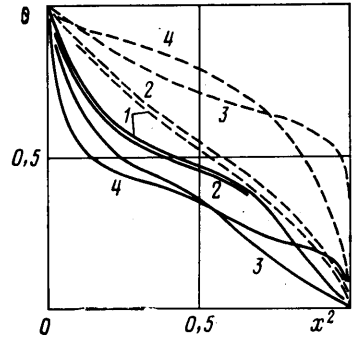
Решение задачи найдено в диапазоне  $10^3 \leq Gr \leq 10^6$  при  $Pr = 0,7$ . Вектор ускорения силы тяжести направлен в сторону, противоположную оси  $y_1$ . Рассматриваются тороидальные емкости с одинаковым меридиональным сечением высоты  $H=1$  при двух значениях радиуса внутреннего цилиндра  $r_0$ :  $r_0 = r_C = r_B = 0,5$  (в этом случае  $r_D = 1$ ,  $r_A = 1,5$ ) и  $r_0 = 1$  ( $r_D = 1,5$ ,  $r_A = 2$ ).

На фиг. 3 сплошными линиями показано развитие во времени максимального значения функции тока в емкости, определяемой в сечении  $x^1 = \text{const}$  как

$$\psi = \int_0^{x^2} \sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}} (v_1 g^{11} + v_2 g^{21}) r dx^2$$



Фиг. 4



Фиг. 5

где  $g_{22}$  — составляющая дважды ковариантного метрического тензора. Там же штриховыми линиями нанесены средние значения градиента температуры по нормали к стенке  $BC$

$$\theta_{BC}' = \int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{x^2=0} dx^1$$

Цифры 1, 2 соответствуют значениям  $Gr=10^4$ ,  $10^5$  в емкости с  $r_0=0,5$ , а 3, 4 — с  $r_0=1$ .

При  $Gr \leq 10^4$  максимальное значение функции тока, характеризующее интенсивность конвективного движения в емкости, монотонно возрастает со временем, достигая некоторого предела. Зависимость  $\theta_{BC}'(t)$  имеет монотонно убывающий характер. При  $Gr \geq 10^5$  величина  $\psi_{max}$  в некоторый момент времени достигает максимума, а затем убывает, стремясь к своему стационарному значению. Зависимость  $\theta_{BC}'(t)$  также становится немонотонной. В исследованных случаях параметр  $r_0$  слабо влияет на величину  $\theta_{BC}'$ .

На фиг. 2 нанесены линии тока (слева) с шагом  $\Delta\psi/\psi_{max}=0,2$  и изотермы (справа) с шагом  $\Delta\theta=0,1$  в установившемся режиме конвекции при  $Gr=10^3$  для емкости с  $r_0=0,5$ . Как следует из рисунка, в области движения образуется циркуляционная зона с направлением вращения жидкости в левом сечении против часовой стрелки. Расположение изотерм свидетельствует о том, что происходящие в емкости процессы определяются в основном теплопроводностью.

С ростом числа Грасгофа интенсивность конвективных процессов возрастает. На фиг. 4 показано развитие естественной конвекции в сечении емкости при  $Gr=10^5$ ,  $r_0=0,5$  (а, в — линии тока, б, г — изотермы). Фиг. 4, а; 4, б соответствует значению безразмерного времени  $t=0,004$ , фиг. 4, в, г —  $t=0,01$ . По мере развития конвекции линии тока вытягиваются вдоль большей диагонали сечения. Вблизи угловых точек  $A$  и  $C$  появляются застойные области, на стенках  $AD$  и  $BC$  формируются ярко выраженные градиентные зоны типа температурных пограничных слоев.

На фиг. 5 приведено распределение безразмерной температуры  $\theta$  вдоль нижнего (сплошные линии) и верхнего (штрихи) теплоизолированных оснований емкости с  $r_0=0,5$  при  $Gr=10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$  и  $10^6$  (кривые 1—4). Отчетливо прослеживается образование температурных градиентных областей вблизи точек  $B$  и  $D$  емкости с ростом числа Грасгофа.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кириченко Ю. А., Супрунова Ж. А.* Экспериментальное исследование теплообмена в тороидальной емкости, частично заполненной жидкостью // Инж.-физ. журн. 1978. Т. 35. № 1. С. 54–61.
2. *Кириченко Ю. А., Супрунова Ж. А.* Методика моделирования процесса теплообмена в замкнутом объеме // Расчет и исследования криогенных систем: Сб. науч. тр. Киев: Физ.-техн. ин-т низких температур АН УССР. 1981. С. 81–99.
3. *Карякин Ю. Е.* Разностный метод исследования нестационарной естественной конвекции в емкостях произвольного сечения // Моделирование в механике. 1988. Т. 2. № 4. С. 75–85.
4. *Маргынченко О. Г., Соковишин Ю. А., Карякин Ю. Е.* Свободная конвекция на вертикальной поверхности и в областях произвольной конфигурации: Препринт № 3. Минск: ИТМО АН БССР. 1988. 49 с.
5. *Карякин Ю. Е.* Нестационарная естественная конвекция в емкостях произвольного сечения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 29–33.
6. *Роуч П. Дж.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
7. *Leonard B. P.* A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation // Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng. 1979. V. 19. № 1. P. 59–98.
8. *Карякин В. Е., Карякин Ю. Е., Нестеров А. Я.* Численное моделирование нестационарных движений вязкой жидкости в поворотных каналах // Инж.-физ. журн. 1988. Т. 54. № 1. С. 25–32.

Ленинград

Поступила в редакцию  
15.VI.1989