

УДК 533.6.011.72

© 1990 г.

С. А. ЩЕРБАКОВ

ФОРМИРОВАНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СО СЛАБЫМ РАЗРЫВОМ НА ГРАНИЦЕ МЕСТНОЙ ДОЗВУКОВОЙ ЗОНЫ

Для уравнения Трикоми плоского потенциального течения в переменных годографа скорости получено автомодельное решение, которое объясняет возникновение на звуковой линии ударной волны сильного семейства (число Маха за волной меньше единицы). В точку формирования (взаимодействия) приходит характеристика с разрывом производных газодинамических параметров, а характеристика другого семейства, выходящая из этой точки, не содержит особенности. Интенсивность ударной волны изменяется вдоль ее образующей по степенному закону с показателем, близким к единице. В точке взаимодействия разрыв производных вдоль линии тока равен бесконечности.

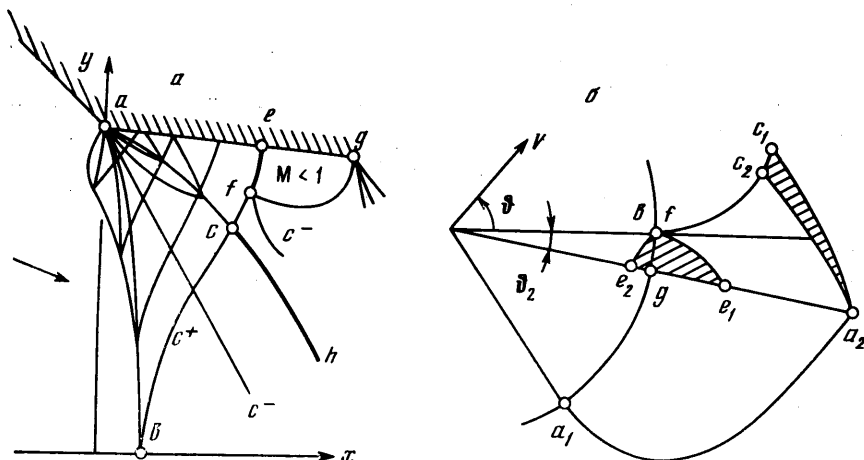
1. Дозвуковые зоны внутри сверхзвукового потока, как правило, возникают за ударными волнами переменной интенсивности. При этом следует различать два случая. Первый — когда звуковая линия, ограничивающая дозвуковую зону, выходит из некоторой промежуточной точки ударной волны, и второй — со звуковой линией, выходящей из точки формирования ударной волны. Ниже рассмотрен второй случай, который представляет наибольший интерес, поскольку такое решение объясняет и подтверждает возникновение ударной волны на линии перехода от сверх-к дозвуковому течению.

Типичный пример течения, в котором формируется такая волна, показан на фиг. 1, а. Здесь схематично изображена структура однородного по полным параметрам потока в сужающемся плоском симметричном канале с изломом контура (показана верхняя его часть). Если угол сужения за изломом не слишком велик, то на стенке вблизи выходящей кромки g образуется дозвуковая зона, а весь поток переходит через звуковую линию, которая соединяет точку a излома с точкой b — так называемым центром сопла. Вблизи центра b трансзвуковое течение описывается решением [1], согласно которому на выходящей из этой точки характеристике c^+ равны нулю производные модуля и угла наклона вектора скорости, давления, плотности. Эта характеристика пересекается в точке c с выходящим из точки a скачком уплотнения, который, согласно решению [2], формируется на границе между пучком волн разрежения из излома и волнами сжатия от стенки.

Как известно, на характеристике сохраняется (с точностью до малых третьего порядка при пересечении скачка уплотнения) инвариант Римана, т. е. для скорости V или числа Маха M и угла наклона θ вектора V к оси симметрии течения x существует (в плоском случае) взаимнооднозначная связь

$$R^+ = \theta + \mu(M) = \text{const}, \quad \mu(1) = 0$$

Поскольку в точке b инвариант равен нулю ($\theta = 0$ и $M = 1$), это означает, что характеристика bcf не попадает на прямолинейную стенку, наклоненную под отрицательным углом θ_2 к оси x . В противном случае получаем ошибочное равенство $R^+ = 0$ при $M \geq 1$ и $\theta < 0$. Отметим, что при



Фиг. 1

$\vartheta_2=0$ на стенке существует точка, которая принадлежит и выходящей из центра характеристике c^+ , причем число M в этой точке минимально и равно единице. Однако по мере уменьшения ϑ_2 вблизи точки локального минимума числа M невозможно образование местной дозвуковой зоны с непрерывным переходом потока через скорость звука. Это противоречило бы монотонному изменению ϑ на звуковой линии [3]. Более того, так как волны сжатия (от звуковой линии ab) не могут приходить на звуковую линию [4], то дозвуковая зона не существует слева от cf . Этот участок характеристики совпадает со слабым разрывом (первых производных газодинамических параметров), который возникает после пересечения с ударной волной ach . Разрыв производных на cf подтверждается результатами расчетов [5] при $\vartheta_2=0$.

Таким образом, в рассматриваемом течении возможна единственная ситуация, когда в точке f формируется ударная волна fe , как это показано на фиг. 1, а. Из точки f также выходит характеристика c^- и звуковая линия fg . Характеристика второго семейства уже не несет особенности, так как иначе перед скачком fe и характеристикой первого семейства bcf якобиан преобразования Δ в плоскость годографа скорости, которая показана на фиг. 1, б, имеет такой же знак, как и за скачком и характеристикой c^- . Напомним, что $\Delta < 0$ при $M \leq 1$ и $\Delta = \pm \infty$ на слабом разрыве [4], а знак якобиана легко определяется по ориентации соответствующих контурных элементов в физической плоскости и плоскости годографа.

На фиг. 1, б структура течения показана в соответствии с фиг. 1, а. Звуковая линия ab показана участком дуги окружности, эпициклоиды a_1a_2 и bc_1c_2f отображают излом стенки a и слабый разрыв на выходящей из центра b характеристике, скачку ac соответствует криволинейный заштрихованный треугольник $a_2c_1c_2$, а скачку fe — заштрихованная зона fe_1e_2 , которая покрывает участок дуги звуковой окружности и выходящую из точки f вторую эпициклоиду. По обоим скачкам, характеристике bc_1 и слабому разрыву c_2f проходят складки листов римановой поверхности, причем линии тока, попадая на сверхзвуковую границу fe_1 ударной волны, как бы отражаются от ее дозвуковой границы fe_2 с переходом на второй лист. Так как на фиг. 1, а, б, ориентация контурных элементов перед cfe одинаковая, то $\Delta > 0$ в подтверждение отмеченному выше исчезновению в точке f особенности, приходящей по характеристике c^+ .

2. Прежде чем переходить к построению вблизи точки взаимодействия f решения, приведем основные уравнения и формулы трансзвукового приближения теории годографа [6], которые будут использоваться. Уравнение Чаплыгина для функции тока $\psi(V, \vartheta)$ в трансзвуковой области те-

чения приводится к уравнению Трикоми

$$\psi_{\eta\eta} - \eta\psi_{\tau\tau} = 0, \quad \eta \equiv (V-1)/V, \quad \tau \equiv (\kappa+1)^{-1/2}(\theta - \theta_f) \quad (2.1)$$

Здесь и ниже κ — показатель адиабаты для совершенного газа, масштабом скорости служит критическая скорость звука, а переменная τ отсчитывается от ее значения в точке f . Это возможно, поскольку как уравнение Чаплыгина, так и (2.1) не содержат коэффициентов, которые зависели бы от угла наклона скорости.

В трансзвуковом приближении имеем формулы преобразования в физическую плоскость, якобиан Δ и уравнение ударной поляры (индексом 1 и 2 обозначены величины перед и за ударной волной)

$$dy = d\psi, \quad dx = \psi_\eta d\tau + \eta\psi_\tau d\eta - \tau d\psi \quad (2.2)$$

$$\Delta = \eta\psi_\tau^2 - \psi_\eta^2 \quad (2.3)$$

$$2(\tau_2 - \tau_1)^2 = (\eta_1 - \eta_2)^2 (\eta_1 + \eta_2) \quad (2.4)$$

Первое уравнение из (2.2) показывает, что в физической плоскости рассматривается область течения, в которой с точностью до малых величин более высокого порядка линии тока — прямые, т. е. не учитывается их кривизна. На ударной волне необходимо удовлетворить уравнению (2.4), условиям нулевой толщины и непрерывности функции тока $x_1 = x_2$, $\psi_1 = \psi_2$.

Уравнение (2.1) допускает решения автомодельного вида $\psi = |\tau|^{2k} F(\xi)$, где $F(\xi)$ — общая, состоящая из двух линейно-независимых решений гипергеометрическая функция, $\xi = 1 - 4\eta^3/(9\tau^2)$ — автомодельная переменная и $k = \text{const}$ — показатель автомодельности. В этих переменных из (2.2) — (2.4) следует с точностью до несущественных постоянных множителей ($s = \text{sign}(\tau)$)

$$x = s(1 - \xi)^{3/2} (kF - \xi F') |\tau|^{2k+1/2} \quad (2.5)$$

$$\Delta = (1 - \xi)^{1/2} \{ [kF + (1 - \xi)F']^2 - (1 - \xi)F'^2 \} |\tau|^{4(k-1/2)} \quad (2.6)$$

$$8(1 - t^2) = 9(1 - \xi_1) (t^{3/2} + \sigma) (t^{3/2} - \sigma)^2 \quad (2.7)$$

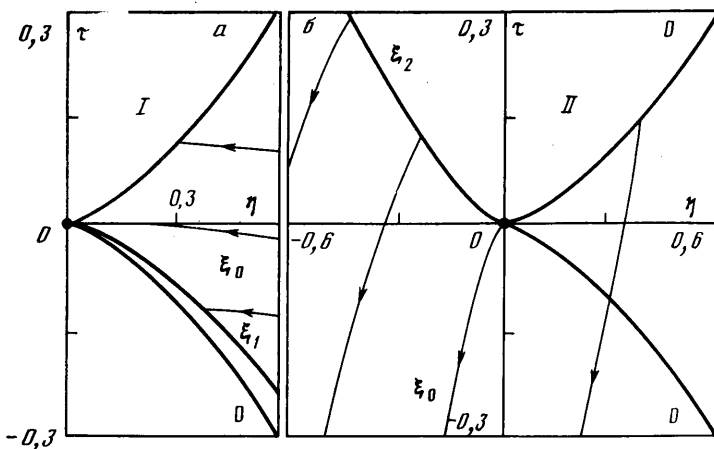
$$t = \left| \frac{\tau_1}{\tau_2} \right|, \quad \sigma^3 = \frac{1 - \xi_2}{1 - \xi_1}$$

Здесь и ниже F' — производная по аргументу. Отметим, что вблизи звуковой линии, на которой $\xi = 1$, гипергеометрическая функция имеет асимптотику

$$F(\xi) - F(1) \sim (\xi - 1)^{1/2} \quad (2.8)$$

Плоскость годографа τ, η двузначна по ξ так, что одному значению ξ соответствуют две симметрично расположенные относительно оси η линии. Уравнение характеристик: $\xi = 0$. На положительной оси η переменная $\xi = -\infty$, на отрицательной $\xi = +\infty$.

3. Предполагаемая структура годографа течения вблизи точки формирования (начала координат) показана на фиг. 2. Первому листу (I) римановой поверхности (до сверхзвуковой границы ударной волны и слабого разрыва) соответствует фиг. 2, а, второму листу (II) (вниз по потоку от ударной волны и разрыва) — фиг. 2, б. Ударную волну ограничивают линии ξ_1 и ξ_2 , характеристика c^+ слабого разрыва отображена линией $\xi = 0$ при $\tau > 0$, а образ характеристики c^- совпадает с линией $\xi = 0$ при $\tau < 0$ на втором листе. Линии тока показаны со стрелками по направлению течения, причем нулевая линия тока, на которой по построению должно выполняться равенство $F(\xi_0) = 0$, проходит через начало координат.



Фиг. 2

Гипергеометрическую функцию — решение вблизи характеристики без особенности — представим в виде ($c_1, c_2 = \text{const}$)

$$F^{II}(\xi) = c_1 F_1(\xi) + c_2 F_2(\xi), \quad |\xi| \leq 1, \quad \tau < 0 \quad (3.1)$$

$$F_1 = F(-k, \frac{1}{2}-k; \frac{5}{6}-2k; \xi)$$

$$F_2 = F(k+\frac{1}{6}, k+\frac{2}{3}; 2k+\frac{7}{6}; \xi) |\xi|^{2k+\frac{1}{6}}$$

Для того чтобы решение не содержало особенности при $\xi=0$, необходимо либо выполнить равенство $c_2=0$, либо выбрать k из условия $2k+\frac{1}{6}=n$, где n — целое число. Однако в последнем случае не определена функция $F_1(\xi)$ и замена ее другим частным решением с логарифмической особенностью также неприемлема. Поэтому в (3.1) принимаем $c_2=0$ и без ограничения общности $c_1=1$.

В области сверхзвукового течения на втором листе решение получаем с помощью формул аналитического продолжения [6]

$$F_1(\xi) \rightarrow |\xi|^k [A_1 F_3(\xi^{-1}) - s B_1 |\xi|^{-\frac{1}{2}} F_4(\xi^{-1})], \quad -\infty \leq \xi \leq -1 \quad (3.2)$$

$$F_3 = F(-k, \frac{1}{6}+k; \frac{1}{2}; \xi^{-1}), \quad F_4 = F(\frac{1}{2}-k, \frac{2}{3}+k; \frac{3}{2}; \xi^{-1})$$

$$A_1 = \frac{\Gamma(\frac{5}{6}-2k)\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k)\Gamma(\frac{5}{6}-k)}, \quad B_1 = -\frac{\Gamma(\frac{5}{6}-2k)2\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(-k)\Gamma(\frac{1}{3}-k)}$$

$$F_1(\xi) \rightarrow A_2 F_1(\xi) + B_2 F_2(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 0, \quad \tau > 0 \quad (3.3)$$

$$A_2 = \frac{1}{2 \sin[\pi(2k+\frac{1}{6})]}, \quad B_2 = \frac{\Gamma(\frac{5}{6}-2k)\Gamma(-2k-\frac{1}{6})}{\Gamma(-2k)\Gamma(\frac{2}{3}-2k)} 2^{-4k-\frac{1}{6}}$$

Здесь и ниже $\Gamma(\dots)$ — гамма-функция. Для перехода в дозвуковую область через отрицательную ось τ , которая совпадает со звуковой линией $\xi=1$, используем преобразование

$$F_1(\xi) \rightarrow 2\xi^k \{ -A_1 \sin[\pi(k-\frac{1}{6})] F_3(\xi^{-1}) - s B_1 \cos[\pi(k-\frac{1}{6})] \xi^{-\frac{1}{2}} F_4(\xi^{-1}) \}, \quad \xi \geq 1 \quad (3.4)$$

Таким образом, единственное (для определенного k) решение уравнения (2.4) без особенности на характеристике c^- на втором листе получено. Оно вычисляется по правым частям выражений (3.1)–(3.4), умноженным на $|\tau|^{2k}$. Это решение нельзя аналитически продолжить (без разрыва $F'(\xi)$) в верхней полуплоскости через полукубическую параболу $\xi=0$ или $\tau=2\eta^{\frac{2}{3}}$, которая соответствует слабому разрыву.

Так как функция $F(\xi)$ непрерывна, то на первом листе вблизи слабого разрыва имеем решение с неопределенной константой $c_0 \neq 0$

$$F^1(\xi) = A_2 F_1(\xi) + c_0 F_2(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 0, \quad \tau > 0 \quad (3.5)$$

При аналитическом продолжении этого решения в подобласть $\xi \leq -1$ и в нижнюю полуплоскость до линии $\xi = 0$ наряду с (3.2)–(3.4) используем формулы преобразования для $F_2(\xi)$

$$\begin{aligned} F_2(\xi) &\rightarrow |\xi|^k [a_1 F_3(\xi^{-1}) + s b_1 |\xi|^{-1/2} F_4(\xi^{-1})], \quad \xi \leq -1 \\ F_2(\xi) &\rightarrow a_2 F_1(\xi) - A_2 F_2(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 0 \\ a_1 &= \frac{\Gamma(2k + 7/6) \pi^{1/2}}{\Gamma(k + 2/3) \Gamma(k + 1)}, \quad b_1 = -2 \frac{\Gamma(2k + 7/6) \pi^{1/2}}{\Gamma(k + 1/6) \Gamma(k + 1/2)} \\ a_2 &= \frac{\Gamma(2k + 7/6) \Gamma(2k + 1/6)}{\Gamma(2k + 1) \Gamma(2k + 1/3)} \cdot 2^{2k + 1/2} \end{aligned}$$

Вместе с (3.5) на первом листе имеем решение

$$F^1(\xi) = c_1 F_1(\xi) + c_4 F_2(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 0, \quad \tau < 0 \quad (3.6)$$

$$c_1 = A_2^2 + a_2 c_0, \quad c_4 = (B_2 - c_0) A_2$$

$$F^1(\xi) = |\xi|^k [c_2 F_3(\xi^{-1}) + s c_3 |\xi|^{-1/2} F_4(\xi^{-1})], \quad \xi \leq -1 \quad (3.7)$$

$$c_2 = A_1 A_2 + a_1 c_0, \quad c_3 = A_2 B_1 + b_1 c_0$$

Для вычисления функции $\psi(\tau, \xi)$ следует умножить (3.5)–(3.7) на $|\tau|^{2k}$.

Выясним диапазон изменения k и c_0 , в котором возможно решение с предполагаемой на фиг. 2 структурой. Так как нулевая линия тока $\xi = \xi_0$ расположена на первом листе между полукубическими параболой с уравнением $\xi = 0$ при $\tau > 0$ и $\tau < 0$, то из (3.5) и (3.6) получим $A_2 > 0$ и $c_1 < 0$ или $k < 5/12$ и $c_0 < -A_2^2/a_2$. На втором листе линия ξ_0 расположена в третьем квадранте, и поэтому на звуковой линии $F^{II} > 0$, или

$$F_1(1) = \frac{\Gamma(5/6 - 2k) \Gamma(1/3)}{\Gamma(5/6 - k) \Gamma(1/3 - k)} > 0$$

Отсюда следует неравенство для показателя автомодельности $1/6 < k - n/2 < 1/3$, где $n = 0, 1, \dots$. Ограничение снизу в этом неравенстве следует из (3.4), поскольку $F_1(\infty) = 0$ лишь при $k = 1/6 + n$. В исследуемом течении не должны возникать особенности кроме рассмотренных выше. Однако анализ решения показывает, что при $n \neq 0$ существует нерегулярность, связанная с возвратным течением. Из условия, что на первом листе (фиг. 2, а) нулевая линия тока расположена при $\tau < 0$, получаем $c_2 > 0$ или $c_0 > -A_1 A_2 / a_1$. Суммируя сказанное, окончательно имеем интервалы изменения определяющих параметров решения

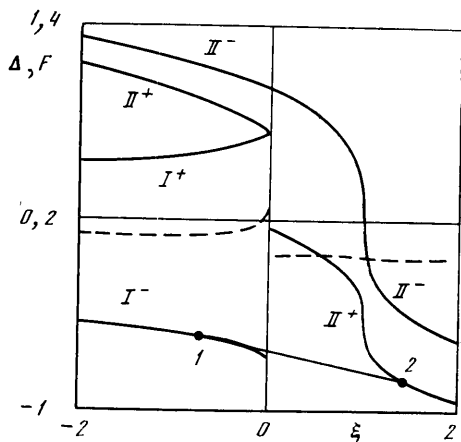
$$-A_1 A_2 / a_1 < c_0 < -A_2^2 / a_2, \quad 1/6 < k < 1/3 \quad (3.8)$$

Пример гипергеометрической функции $F(\xi)$, которая вычислена по формулам (3.1)–(3.7) при $k = 0,3$ и $c_0 = -0,357$, показан на фиг. 3. Здесь римские цифры у сплошных кривых обозначают номер риманова листа, а знак плюс или минус соответствует верхней или нижней полуплоскости фиг. 2 (при $\tau > 0$ или $\tau < 0$).

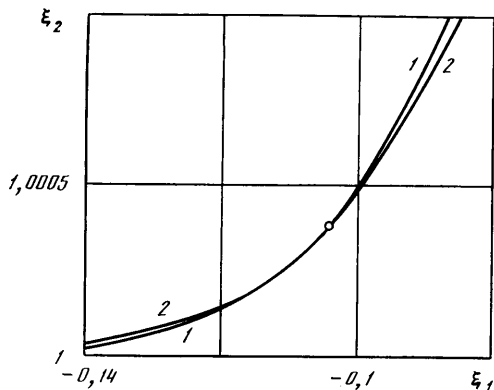
Показанные на фиг. 3 кривые одного индекса, но с разным знаком асимптотически приближаются друг к другу по мере увеличения $|\xi|$ и сливаются при $\xi = \pm \infty$ (вне рамок чертежа). Решению на первом листе (фиг. 2, а) при продвижении от слабого разрыва к другой эпициклоиде соответствует на фиг. 3 перемещение вдоль кривой I^+ от $\xi = 0$ до $\xi = -\infty$ с последующим возвратом по кривой I^- от $\xi = -\infty$ до $\xi = 0$. Решению на втором листе

(фиг. 2, б) при продвижении от слабого разрыва по часовой стрелке вокруг начала координат соответствует на фиг. 3 перемещение от точки с абсциссой $\xi=0$ вдоль кривой Π^+ при $\xi < 0$ с последующим возвратом из $\xi=-\infty$, переходом в $\xi=+\infty$ по кривой Π^- и возвратом из $\xi=+\infty$ по кривой Π^+ до $\xi=0$. Значения автомодельной переменной ξ_0^I и ξ_0^{II} находим по точкам пересечения с прямой $F(\xi)=0$ линий I^- и Π^- . При этом всегда $\xi_0^{II} > 1$ и лишь при $k=1/3$ для любого c_0 будет $\xi_0^{II}=1$, т. е. линия тока после прохождения точки f совпадает со звуковой линией.

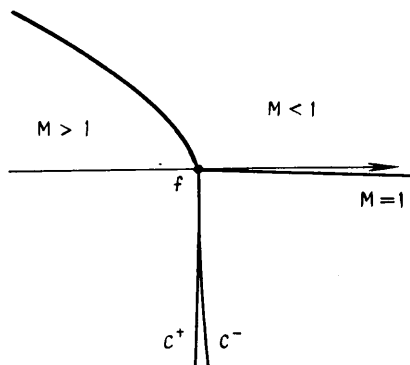
В общем случае кривые I^- и Π^+ на фиг. 3 не стыкуются при $\xi=0$. Это показывает, что обход вокруг точки формирования осуществляется с разрывом функции $F(\xi)$. Ясно, что физически такой разрыв функции тока не реален и должен быть устранен рассмотрением скачка уплотнения, который соединяет точки 1 и 2, как это показано на фиг. 3. Отметим, что лишь при $c_1=2A_2 \sin[\pi(4k-1/6)]$ обход вокруг начала координат возможен без разрыва $F(\xi)$. Однако в этом случае на интервале $0 \leq \xi \leq 1$ якобиан (2.3), проходя через ноль, меняет знак, что также указывает, согласно [6], на существование ударной волны. Изменение на линиях I^- и Π^+ зависимо от ξ множителя Δ в (2.6) показано на фиг. 3 штриховой линией.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Для любых значений k и C_0 из (3.8) имеет место скачок производной $F' = \pm\infty$ на слабом разрыве (вертикальная касательная в точке стыковки линий Π^+ и I^+).

Координаты точек 1 и 2 скачка уплотнения должны удовлетворять трем указанным в разд. 2 уравнениям. При решении этой системы уравнений с помощью равенства $\psi_1 = \psi_2$ исключаем t из (2.7) и условия $x_1 = x_2$, используя (2.5). Тогда остается два уравнения $P(\xi_1, \xi_2) = 0$ и $X(\xi_1, \xi_2) = 0$, которые в трансзвуковом приближении соответствуют выполнению соотношений на косом скачке уплотнения и его нулевой толщине.

Двухпараметрический поиск решения при изменении определяющих параметров в интервалах (3.8) проведен численно. Не останавливаясь на процедуре вычисления гипергеометрических рядов (она аналогична той, которая применена в [7]), укажем лишь на необходимость использования асимптотики (2.8), поскольку вблизи звуковой линии эти ряды медленно

сходятся, а производная $F'(1) = -\infty$. В результате получено пересечение кривых $P(\xi_1, \xi_2)$ и $X(\xi_1, \xi_2)$ в точке $\xi_1 = -0,104$ и $\xi_2 = 1,00038$ при $k = 0,3328$ и $c_0 = -0,2812$. Поведение этих кривых показано на фиг. 4, причем цифре 1 соответствует кривая X , а цифре 2 — кривая P .

4. Таким образом, найдено точное автомодельное решение задачи формирования на границе местной дозвуковой зоны ударной волны сильного семейства при взаимодействии со слабым разрывом. Это решение дает гипергеометрическая функция (3.1)–(3.7) с указанными выше показателем автомодельности k и параметром c_0 . После отображения этого решения в физическую плоскость, используя (2.2) и (2.5), получаем уравнение характерных кривых $x = c_x y^n$ с $n \approx 3/2$ и коэффициентами: $c_x = 149,68$ на звуковой линии, $c_x = -0,041$ на слабом разрыве, $c_x = 0,041$ на выходящей из точки формирования характеристике c^- и $c_x = -1,77$ на ударной волне. Эти кривые построены на фиг. 5. Здесь звуковая линия ($M=1$), касаясь в точке формирования f ударной волны и характеристик, расположена близко к линии тока (со стрелкой), слабый разрыв и характеристика без особенности симметричны относительно оси y , а ударная волна переменной интенсивности имеет вогнутую по направлению к набегающему потоку форму.

По построению на скачке уплотнения

$$y \sim \psi \sim \tau^{2k} \sim (\Delta\eta)^{2k} \sim (\Delta p)^{3k} \quad (4.1)$$

где Δ означает теперь разность параметров по обе стороны от скачка, p — давление. Для приращения энтропии S в ударной волне используем оценку $\Delta S \sim (\Delta p)^3$ из [6]. Поэтому из (4.1) следует, что в полученном решении энтропия нарастает вдоль ударной волны примерно по кубическому закону, а завихренность $\omega \sim dS/d\psi$ — по квадратичному закону. Так же из (4.1) получаем, что интенсивность ударной волны Δp изменяется практически линейно вдоль ее образующей. Однако для оценок следует иметь в виду, что производная от интенсивности вдоль образующей ударной волны равна нулю в точке ее формирования, как и в случае образования слабых скачков уплотнения внутри сверхзвукового течения [2, 6]. В полученном решении это позволяет выполнить равенство (2.4), несмотря на то что ударная волна расположена на границе между сверх- и дозвуковым потоками.

На проходящей через точку формирования линии тока $x \sim \eta^{3k+1/2} \sim \eta^{5/2}$, и поэтому производная dV/dx обращается в бесконечность при $x=0$. Это означает бесконечное усиление слабого разрыва в точке взаимодействия с ударной волной.

Результаты докладывались на семинаре Г. Г. Чёрного. Автор благодарит руководителя семинара и участников за обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фалькович С. В. К теории сопла Лаваля // ПММ. 1946. Т. 10. Вып. 4. С. 503–512.
2. Войченко В. С., Лифшиц Ю. Б. Трансзвуковое течение около выпуклого угла // Уч. зап. ЦАГИ. 1976. Т. 7. № 2. С. 8–16.
3. Никольский А. А., Таганов Г. И. Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения // ПММ. 1946. Т. 10. Вып. 4. С. 481–502.
4. Гудерлей К. Г. Теория околосзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 421 с.
5. Алексеев В. А., Сафонов В. П., Щербаков С. А. Исследование газодинамических характеристик плоского или осесимметричного сопла с прямолинейной образующей сверхзвуковой части // Уч. зап. ЦАГИ. 1989. Т. 20. № 6. С. 100–104.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
7. Щербаков С. А. Расчет головной или кормовой части плоского тела, обтекаемого дозвуковым потоком с максимально возможным критическим числом Маха // Уч. зап. ЦАГИ. 1988. Т. 19. № 4. С. 10–18.