

УДК 532.72

© 1990 г.

В. Н. КУРДЮМОВ, А. Д. ПОЛЯНИН

### О МАССООБМЕНЕ ЧАСТИЦ, КАПЕЛЬ И ПУЗЫРЕЙ В СДВИГОВОМ ПОТОКЕ

Получено численное решение осесимметричной задачи о стационарном массо- и теплообмене сферических частиц, капель и пузырей в линейном сдвиговом стоксовом потоке во всем диапазоне чисел Пекле. Предложены простые приближенные формулы для среднего числа Шервуда, которые хорошо согласуются с результатами численных расчетов.

В приближении диффузионного пограничного слоя (при больших числах Пекле) аналогичная задача исследовалась в [1, 2]. Несколько первых членов асимптотического разложения среднего числа Шервуда по малым числам Пекле в случае обтекания частицы сдвиговым потоком получено в [3, 4].

**1. Постановка задачи и метод решения.** Рассмотрим стационарную диффузию к поверхности сферической частицы (капли, пузыря радиуса  $a$ ) в осесимметричном линейном сдвиговом течении. Считаем, что концентрация вдали от частицы постоянна и равна  $C_\infty$ , а на межфазной поверхности происходит полное поглощение растворенного в жидкости вещества.

В прямоугольной декартовой системе координат  $X_1, X_2, X_3$ , связанной с центром частицы, распределение скоростей невозмущенного (на больших расстояниях от частицы) осесимметричного сдвигового течения описывается выражениями

$$v_1 \rightarrow -EX_1, \quad v_2 \rightarrow -EX_2, \quad v_3 \rightarrow 2EX_3 \quad (R \rightarrow \infty) \quad (1.1)$$

Здесь  $v_1, v_2, v_3$  — компоненты скорости жидкости;  $E$  — коэффициент сдвига,  $R = (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)^{1/2}$ .

При стоксовом обтекании (малые числа Рейнольдса) решение гидродинамической задачи об обтекании сферической частицы, капли и пузыря с граничными условиями (1.1) получено в [5]. Математическая формулировка соответствующей диффузионной задачи о распределении концентрации  $C$  в сдвиговом потоке в сферической системе координат  $R, \theta, \phi$  имеет вид [1]

$$\frac{Pe}{\sin \theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial c}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) \quad (1.2)$$

$$\psi = \text{sign } E \left( r^3 - \frac{5\beta + 2}{2\beta + 2} + \frac{3\beta}{2\beta + 2} \frac{1}{r^2} \right) \sin^2 \theta \cos \theta, \quad Pe = \frac{a^2 |E|}{D}$$

$$r=1, \quad c=1; \quad r \rightarrow \infty, \quad c \rightarrow 0 \quad (1.3)$$

Здесь  $c = (C_\infty - C)/C_\infty$  — безразмерная концентрация,  $r = R/a$ ,  $\beta$  — отношение динамических вязкостей капли и окружающей жидкости (значение  $\beta = \infty$  соответствует твердой частице, а  $\beta = 0$  — газовому пузырю),  $\psi$  — безразмерная функция тока,  $Pe$  — число Пекле,  $D$  — коэффициент диффузии.

Основная величина, представляющая практический интерес, — среднее число Шервуда — вычисляется по формуле

$$\text{Sh} = \text{Sh}(\beta, \text{Pe}) = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \sin \theta \left( \frac{\partial c}{\partial r} \right)_{r=1} d\theta \quad (1.4)$$

Задача (1.2), (1.3) решалась численно в области  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  (задача симметрична относительно плоскости  $\theta = \pi/2$ ) при помощи метода установления по неявной разностной схеме с расщеплением по пространственным координатам [6]. Пространственная сетка в расчетной области выбиралась следующим образом. При  $\text{Pe} = O(1)$  сетка по разностной координате  $r$  была равномерна с числом шагом 77. При  $\text{Pe} \gg O(1)$  расчетная область разбивалась на область пограничного слоя с мелким шагом (51 точка) и область с большим шагом (24 точки). Сетка по углу  $\theta$  всегда бралась равномерной с числом шагов 33. Проводились также тестовые расчеты на сетках  $150 \times 70$ , которые показали слабое (в пределах 1–2%) уменьшение среднего числа Шервуда.

Далее числа Шервуда для пузыря ( $\beta = 0$ ) и твердой частицы ( $\beta = \infty$ ) будем обозначать  $\text{Sh}_b = \text{Sh}(0, \text{Pe})$  и  $\text{Sh}_p = \text{Sh}(\infty, \text{Pe})$ .

**2. Пузырь ( $\beta = 0$ ).** Для газового пузыря главные члены асимптотических разложений величины  $\text{Sh}_b$  при малых и больших числах Пекле имеют вид [2]

$$\text{Sh}_{b0} = 1 \quad (\text{Pe} \rightarrow 0); \quad \text{Sh}_{b\infty} = (3\text{Pe}/\pi)^{1/2} \quad (\text{Pe} \rightarrow \infty) \quad (2.1)$$

Результаты численных расчетов среднего числа Шервуда при  $\beta = 0$ , полученные в данной работе, изображены точками на фиг. 1, а. Штриховой и штрихпунктирной линиями показаны приближенные зависимости

$$\text{Sh}_b = 1 + 0,36 P_m^{1/2} + \frac{0,13 P_m}{1 + 0,5 P_m^{1/2}}, \quad P_m = 6^{1/2} \text{Pe} \quad (2.2)$$

$$\text{Sh}_b = 1 + \frac{(3 \text{Pe}/\pi)^{1,72}}{0,065 + (3 \text{Pe}/\pi)^{1,22}} \quad (2.3)$$

которые из различных соображений получены в [7]. Обе формулы согласуются с точными асимптотиками (2.1). Видно, что максимальная погрешность выражения (2.2) составляет 2%, а выражения (2.3) — 9%. Сплошной линией на фиг. 1, а показаны результаты вычисления среднего числа Шервуда по формуле

$$\text{Sh}_b = 0,6 + (0,16 + 0,96 \text{Pe})^{1/2} \quad (2.4)$$

максимальная погрешность которой составляет 2%.

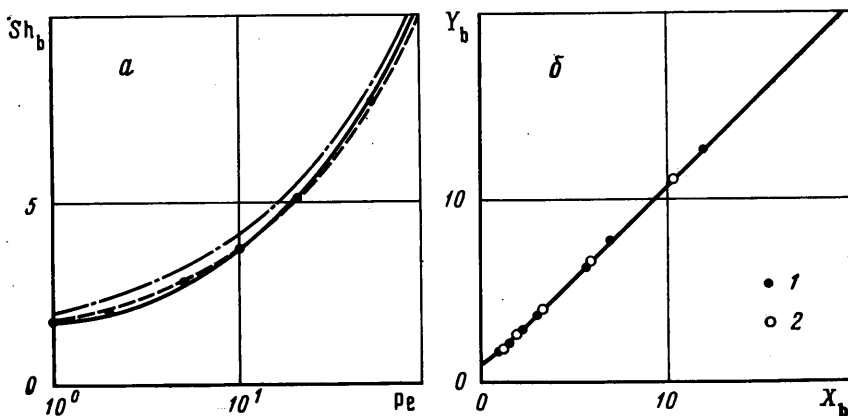
Следуя [7], перейдем от переменных  $\text{Pe}$ ,  $\text{Sh}_b$  к асимптотическим координатам  $\text{Sh}_b/\text{Sh}_{b0}$ ,  $\text{Sh}_{b\infty}/\text{Sh}_{b0}$ , где  $\text{Sh}_{b0}$  и  $\text{Sh}_{b\infty}$  — главные члены асимптотических разложений величины  $\text{Sh}_b$  при  $\text{Pe} \rightarrow 0$  и  $\text{Pe} \rightarrow \infty$  (2.1). На фиг. 1, б в плоскости  $X_b = \text{Sh}_{b\infty}/\text{Sh}_{b0}$ ,  $Y_b = \text{Sh}_b/\text{Sh}_{b0}$  точками 1 изображены данные расчетов числа Шервуда для газового пузыря в осесимметричном сдвиговом потоке. Сплошной линией показана зависимость

$$\frac{\text{Sh}_b}{\text{Sh}_{b0}} = 0,6 + \left[ 0,16 + \left( \frac{\text{Sh}_{b\infty}}{\text{Sh}_{b0}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.5)$$

полученная из формулы (2.4) с учетом выражений для асимптотик (2.1).

Рассмотрим теперь стационарный массообмен сферического пузыря радиуса  $a$ , обтекаемого поступательным стоксовым потоком со скоростью  $U$ . Асимптотики среднего числа Шервуда при малых и больших числах Пекле  $\text{Pe} = aU/D$  в этом случае имеют вид [2, 7, 8]

$$\text{Sh}_{b0} = 1 \quad (\text{Pe} \rightarrow 0); \quad \text{Sh}_{b\infty} = (2 \text{Pe}/3\pi)^{1/2} \quad (\text{Pe} \rightarrow \infty) \quad (2.6)$$



Фиг. 1

При  $0 \leq Pe \leq 500$  эта задача была решена численно в [9]. На фиг. 1, б точками 2 отмечены результаты расчетов числа Шервуда [9], представленные с помощью (2.6) в асимптотических координатах.

Из фиг. 1, б видно, что в обеих задачах о массообмене пузыря с поступательным и сдвиговым стоксовым потоком результаты вычислений среднего числа Шервуда в плоскости асимптотических координат приводят к близким зависимостям (различие составляет 2%), которые хорошо описываются одной формулой (2.5).

Из [10] следует, что формулу (2.5) можно использовать также для расчета  $Sh_b$  в случае сферического пузыря, обтекаемого поступательным потоком при больших числах Рейнольдса.

**3. Твердая частица ( $\beta = \infty$ ).** Главные члены асимптотических разложений среднего числа Шервуда для твердой сферической частицы в сдвиговом потоке при малых и больших числах Пекле получены в [1, 2]

$$Sh_{p0} = 1 \quad (Pe \rightarrow 0); \quad Sh_{p\infty} = 1,22 Pe^{1/2} \quad (Pe \rightarrow \infty) \quad (3.1)$$

Результаты численных расчетов величины  $Sh_p$  для  $\beta = \infty$  при различных числах Пекле показаны точками на фиг. 2, а. Сплошная и штриховая линии построены по формулам

$$Sh_p = 0,5 + (0,125 + 1,49 Pe)^{1/2} \quad (3.2)$$

$$Sh_p = 0,9(P_m^{1/2} + 4,6)^{2/3} - 1,5; \quad P_m = 6^{1/2} Pe \quad (3.3)$$

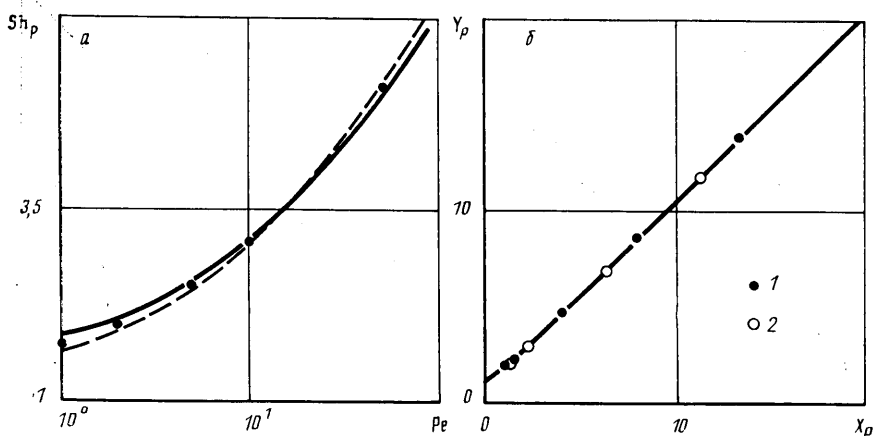
которые с помощью различных приближенных методов были получены в [7] и согласуются с точными асимптотиками (3.1). Видно, что наилучшее совпадение с численными результатами обеспечивает выражение (3.2), максимальная погрешность которого составляет около 1,5% (погрешность формулы (3.3) составляет 2%).

Как и ранее, перейдем от переменных  $Pe, Sh_p$  к асимптотическим координатам  $X_p = Sh_{p\infty}/Sh_{p0}, Y_p = Sh_p/Sh_{p0}$ . На фиг. 2, б сплошной линией показана зависимость

$$\frac{Sh_p}{Sh_{p0}} = 0,5 + \left[ 0,125 + \left( \frac{Sh_{p\infty}}{Sh_{p0}} \right)^3 \right]^{1/2} \quad (3.4)$$

полученная из формулы (3.2) с помощью выражений (3.1); точками 1 изображены данные численных расчетов.

Рассмотрим теперь диффузию к поверхности твердой сферической частицы радиуса  $a$ , обтекаемой стационарным поступательным стоксовым потоком со скоростью  $U$ . Асимптотики среднего числа Шервуда



Фиг. 2

при малых и больших числах Пекле  $Pe = aU/D$  определяются формулами [2, 7, 8]

$$Sh_{p0} = 1 \quad (Pe \rightarrow 0); \quad Sh_{p\infty} = 0,624 Pe^{1/2} \quad (Pe \rightarrow \infty) \quad (3.5)$$

При  $0 \leq Pe \leq 500$  эта задача решена численно в [11]. На фиг. 2, б точками 2 обозначены результаты пересчета данных с помощью асимптотических координат (3.5).

Из фиг. 2, б видно, что формула (3.4) одновременно хорошо описывает массообмен твердой сферической частицы как в поступательном, так и сдвиговом стоксовом потоке.

**4. Капля при больших числах Пекле.** Данные численных расчетов среднего числа Шервуда при больших числах Пекле во всем диапазоне изменения параметра  $\beta$  хорошо аппроксимируются положительным корнем кубического уравнения

$$Sh^3 - \frac{3 Pe}{\pi(\beta+1)} Sh - 1,49 Pe = 0 \quad (4.1)$$

В таблице приведены результаты сопоставления численных расчетов величины  $Sh$  и корня уравнения (4.1). Видно, что при  $Pe \geq 100$  ( $0 \leq \beta \leq \infty$ ) максимальная погрешность формулы (4.1) составляет около 7%. При  $Pe \geq 500$  погрешность формулы (4.1) составляет менее 3%.

Отметим, что уравнение (4.1) можно записать в эквивалентном виде

$$Sh^3 - Sh_{\beta}^2 Sh - Sh_{p\infty}^3 = 0 \quad (4.2)$$

Здесь  $Sh_{\beta}$  и  $Sh_{p\infty}$  — средние числа Шервуда, полученные в приближении диффузионного пограничного слоя для капли умеренной вязкости  $\beta = O(1)$  и твердой частицы  $\beta = \infty$  в осесимметричном сдвиговом потоке [1, 2]

$$Sh_{\beta} = \left[ \frac{3 Pe}{\pi(\beta+1)} \right]^{1/2}, \quad Sh_{p\infty} = 1,22 Pe^{1/2} \quad (4.3)$$

В [7] показано, что формулу (4.2) с успехом можно использовать для приближенного расчета среднего числа Шервуда при обтекании сферической капли поступательным стоксовым потоком для больших чисел Пекле при любых значениях  $\beta$ . Для этого в (4.2) следует подставить соответствующие асимптотики  $Sh_{\beta} = (2 Pe)^{1/2} (3\pi(\beta+1))^{-1/2}$ ,  $Sh_{p\infty} = 0,624 Pe^{1/2}$ , полученные в приближении диффузионного пограничного слоя для капли умеренной вязкости и твердой частицы в поступательном стоксовом потоке [8].

**5. Капля при умеренных числах Пекле ( $0 \leq Pe \leq 100$ ).** При умеренных числах Пекле среднее число Шервуда для капли в осесимметричном

$\beta$	Число Пекле $Pe$					
	100		500		1000	
	Численное решение	(4.1)	Численное решение	(4.1)	Численное решение	(4.1)
0	10,40	10,61	22,34	22,75	31,16	31,81
0,5	9,04	9,14	18,67	19,13	26,70	26,55
1	8,32	8,34	17,02	17,08	23,20	23,55
5	6,81	6,59	12,39	12,37	16,49	16,42
10	6,51	6,17	11,29	11,16	14,84	14,54
$\infty$	6,09	5,66	9,94	9,68	12,43	12,20

сдвиговом потоке во всем диапазоне изменения вязкостей фаз можно вычислять по формуле

$$Sh(\beta, Pe) = \frac{1}{\beta+1} Sh(0, Pe) + \frac{\beta}{\beta+1} Sh(\infty, Pe) \quad (5.1)$$

где  $Sh(0, Pe)$  и  $Sh(\infty, Pe)$  – средние числа Шервуда для пузыря и твердой частицы.

При  $0 \leq Pe \leq 100$  ( $0 \leq \beta \leq \infty$ ) максимальная погрешность выражения (5.1) наблюдается при  $Pe=100$  и составляет около 1% (см. таблицу). В более широком диапазоне  $0 \leq Pe \leq 500$  формула (5.1) дает максимальную погрешность 5%.

Величины  $Sh(0, Pe)$  и  $Sh(\infty, Pe)$  в (5.1) можно вычислять с помощью приближенных зависимостей (2.4) и (3.2).

Формулы (4.1) и (5.1) позволяют вычислять среднее число Шервуда на сферическую каплю в сдвиговом потоке при любых значениях параметров  $Pe$  и  $\beta$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С. Диффузия к частице в случае сдвигового течения вязкой жидкости. Приближение диффузионного пограничного слоя // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 3. С. 475–479.
2. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком. М.: Наука, 1985. 336 с.
3. Batchelor G. K. Mass transfer from a particle suspended in fluid with a steady linear ambient velocity distribution // J. Fluid Mech. 1979. V. 95. № 2. P. 369–400.
4. Acrivos A. A note on the rate of heat or mass transfer from a small particle freely suspended in a linear shear field // J. Fluid Mech. 1980. V. 98. № 2. P. 299–304.
5. Taylor G. I. Viscosity of a fluid containing small drops of another fluid // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1932. V. 138. № 834. P. 41–48.
6. Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 285 с.
7. Дильман В. В., Полянин А. Д. Методы модельных уравнений и аналогий в химической технологии. М.: Химия, 1988. 303 с.
8. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
9. Абрамзон Б. М., Фишбейн Г. А. Некоторые задачи конвективной диффузии к сферической частице при  $Pe < 1000$  // Инж.-физ. журн. 1977. Т. 32. № 6. С. 1053–1058.
10. Полянин А. Д., Дильман В. В. Метод асимптотической аналогии: Препринт № 373. М.: Ин-т проблем мех. АН СССР, 1989. 49 с.
11. Абрамзон Б. М., Ривкинд В. Я., Фишбейн Г. А. Нестационарный массообмен с гетерогенной химической реакцией при ламинарном обтекании сферы // Инж.-физ. журн. 1976. Т. 30. № 1. С. 73–79.

Москва

Поступила в редакцию  
2.VIII.1989