

УДК 532.592

© 1990 г.

А. А. АЛЕКСЕЕВ, Н. А. КУДРЯШОВ

ОСОБЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ДИССИПАТИВНО-ДИСПЕРСИОННЫХ СРЕДАХ С НЕУСТОЙЧИВОСТЬЮ

Рассматриваются волновые процессы в диссипативно-дисперсионных средах с неустойчивостью, описываемые нелинейным эволюционным уравнением четвертого порядка. Получены аналитические решения в виде уединенных и квадрантных волн. Методом численного моделирования показано существование критического значения коэффициента дисперсии, при превышении которого первоначальное возмущение (в частности, состоящее из «белого шума») трансформируется в структуру.

1. Постановка задачи. Нелинейные волновые процессы в пленках жидкости, стекающих по наклонной плоскости [1, 2], возмущения концентрации реагирующих веществ при химических реакциях [3] и горении [4], волны электростатического потенциала в тороидальных системах [5] и т. д. описываются нелинейным волновым уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u^p \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \gamma \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь $u(x, t)$ — функция, характеризующая отклонения от равновесия смещения, концентрации, температуры, потенциала и т. д.; α, β и γ — постоянные коэффициенты; постоянная $p > 0$; x — координата; t — время.

Умножим (1.1) на $u(x, t)$ и в предположении $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_{mx}(x, t) = 0$ ($m=0, 1, 2, 3$; u_{mx} — производная m -го порядка по x) проинтегрируем полученное выражение по x от $-\infty$ до $+\infty$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle u^2 \rangle = \alpha \langle u_x^2 \rangle - \gamma \langle u_{xxx}^2 \rangle, \quad \langle u_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx \quad (1.2)$$

Из (1.2) видно, что при $\alpha > 0, \gamma > 0$ слагаемое со второй производной в (1.1) соответствует увеличению кинетической энергии в системе, а слагаемое с четвертой производной характеризует ее диссипацию.

Исследование устойчивости стационарного движения, описываемого уравнением (1.1), относительно малых возмущений $u' \sim \exp(ikx - i\omega t)$ при $\alpha > 0, \gamma > 0$ показало, что движение устойчиво для коротковолновых возмущений среды ($k > \sqrt{\alpha/\gamma}$) и неустойчиво для длинноволновых ($0 < k < \sqrt{\alpha/\gamma}$). Таким образом, уравнение (1.1) является одним из простейших уравнений, описывающих нелинейные волны в диссипативно-дисперсионных неустойчивых средах.

Уравнение (1.1) допускает группу преобразований сдвига по переменным x и t и, следовательно, имеет решение в виде стационарной волны. Если ввести переменную $\xi = x - ct$, где c — скорость волны, то (1.1) можно представить в виде

$$q - c_0 u + \frac{u^{p+1}}{p+1} + \alpha u_\xi + \beta u_{\xi\xi} + \gamma u_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (1.3)$$

Здесь q — постоянная интегрирования, которая определяется из начальных условий.

Уравнение (1.3) при $p=1$ рассматривалось в ряде работ. В частности, в [1, 6] установлено, что при $\beta=0, \alpha \neq 0, \gamma \neq 0$ оно имеет решения в виде уединенных волн различной конфигурации. В случае $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$ уравнение (1.3) изучалось в [7]. Результаты численных расчетов, приведенные в [7], показали, что (1.3) имеет решения в виде уединенных волн и волн переключения при дискретных значениях скорости волны c , причем значения c , соответствующие скорости распространения уединенных волн, заключены в некотором интервале, величина которого зависит от параметра $\sigma = \beta/\sqrt{\alpha\gamma}$.

В данной работе получены некоторые точные решения уравнения (1.1) при $p=1$ и 3 и проанализирована эволюция начальных возмущений, описываемая этим уравнением.

2. Точные решение уравнения (1.1). В [8] показано, что решение уравнения (1.1) при $p=1$ и α, β, γ , отличных от нуля, может быть представлено выражением

$$u = \frac{15}{76} \left(16\alpha - \frac{\beta^2}{\gamma} \right) \frac{\partial}{\partial x} \ln F + 15\beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln F + 60\gamma \frac{\partial^3}{\partial x^3} \ln F + u_3(x, t) \quad (2.1)$$

Здесь $u(x, t)$ и $u_3(x, t)$ удовлетворяют уравнению (1.1), а $F(x, t)$ — новая функция. Подставляя (2.1) в уравнение (1.1) и приравнявая выражения при одинаковых степенях $F(x, t)$ нулю, получаем переопределенную систему из пяти уравнений, содержащих $u_3(x, t)$ и производные от $F(x, t)$. Эта система уравнений приведена в [8, 9]. Найти аналитические решения этой системы в общем случае не представляется возможным, однако если в нее подставить зависимости $F(x, t)$ и $u_3(x, t)$ в виде

$$F(x, t) = C_2 + C_3 \exp(kx + \omega t), \quad u_3 = C_1 = \text{const} \quad (2.2)$$

то приходим к алгебраической системе уравнений относительно k и ω . Значения k и ω , при которых (2.2) удовлетворяют этой системе, находятся при значениях $\sigma=0, \pm 12/\sqrt{47}, \pm 16/\sqrt{73}, \pm 4$ [10]. В этом случае зависимости (2.2) позволяют найти решения уравнения (1.1) при $p=1$ по формуле (2.1).

В частности, при $\sigma=0$ и $C_1=0$ преобразование (2.1) приводит к решению Курамото уравнения (1.1) при $\beta=0$ [3]

$$u(x, t) = \frac{15}{19} k (2 + 11U^3 - 9U), \quad k = \pm \sqrt{\frac{11\alpha}{19\gamma}}$$

$$U = \text{th} \left[\frac{1}{2} k \left(x - \frac{30}{19} kt \right) \right] \quad (2.3)$$

В случае $\sigma=4$ и $C_1=0$ формула (2.1) после подстановки в нее (2.2) дает решение уравнения (1.1) при $p=1$ в виде уединенной волны

$$u(x, t) = 15\alpha \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} \text{ch}^{-2} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} \left(x - 6\alpha \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} t \right) \right] \times$$

$$\times \left\{ 1 - \text{th} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} \left(x - \frac{6\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\gamma}} t \right) \right] \right\} \quad (2.4)$$

Максимум этой уединенной волны равен $160\alpha\sqrt{\alpha/\gamma}/9$.

Используя преобразование решений (2.1), можно найти более общее, чем (2.4), решение уравнения (1.3) при $p=1$ и $\sigma=4$. Если подставить

$$u = R + R' + C_1$$

в уравнение (1.3), то оно запишется в виде

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} + 5 \frac{dz}{d\xi} + (5-A)z + \frac{2}{5} Rz - \frac{3}{5} \int R dz = 0 \quad (2.5)$$

$$z = R'' + \frac{1}{10} R^2 + AR - \frac{5}{2} (1-A^2), \quad A = \frac{1}{5} (1+C_1-C_0)$$

Из (2.5) видно, что каждое решение уравнения $z=0$ является и решением уравнения (1.3) при $p=1$ и $\sigma=4$. Уравнение $z=0$ можно запи-

сать в виде

$$R'^2 + \frac{1}{15}R^3 + AR^2 - \frac{5}{2}(1-A^2)R + D = 0 \quad (2.6)$$

$$D = \frac{10}{3} \left[\frac{5}{2}(1-A^2) \left(A - \frac{5}{2} \right) + C_0 C_1 - \frac{1}{2} C_1^2 - q \right]$$

Решение (2.6) выражается через эллиптическую функцию Якоби. Обозначив R_1, R_2 и R_3 ($R_1 \geq R_2 \geq R_3$) действительные корни кубического уравнения

$$R^3 + 15AR^2 - \frac{75}{2}(1-A^2)R + 15D = 0$$

получаем

$$R(\xi) = R_2 + (R_1 - R_2) \operatorname{cn}^2 \left[\frac{\xi}{2} \sqrt{\frac{R_1 - R_3}{15}}, s \right], \quad s = \sqrt{\frac{R_1 - R_2}{R_1 - R_3}} \quad (2.7)$$

При $A = -1$, $q = C_0 C_1 - C_1^2 / 2$ решение (2.7) представляет собой уединенную волну

$$R(\xi) = 15 \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{\xi}{2} \right)$$

Это решение приводит к решению (2.4) уравнения (1.3). При $A = -1$ решением уравнения (1.3), следующим из (2.7), будет периодическая кноидальная волна.

Найдем аналитические решения уравнения (1.1) при $p=3$. Используя преобразования растяжения по переменным x, t и u , уравнение (1.1) запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 24u^3 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (2.8)$$

Будем искать решение уравнения (2.8) в виде следующего разложения вблизи особого многообразия $F(x, t)$ [11]:

$$u = \frac{\partial}{\partial x} \ln F + u_1 \quad (2.9)$$

Подставляя (2.9) в уравнение (2.8) и приравнивая выражения при одинаковых степенях $F(x, t)$ нулю, приходим к следующей системе уравнений:

$$u_1 = -\frac{F_{xx}}{2F_x} - \frac{\sigma}{12}, \quad \{F; x\} = \frac{\sigma^2 - 4}{16} \quad (2.10)$$

$$\frac{F_t}{F_x} = \frac{(36 - 7\sigma^2)\sigma}{144}$$

В (2.10) введено обозначение производной Шварца [11]

$$\{F; x\} = \frac{F_{xxx}}{F_x} - \frac{3}{2} \frac{F_{xx}^2}{F_x^2}$$

Решением системы уравнений (2.10) является функция

$$F(x, t) = f(\xi), \quad \xi = x - c_0 t, \quad c_0 = \frac{1}{144} (36 - 7\sigma^2) \sigma$$

которая удовлетворяет уравнению Рикатти

$$y' - \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{16} (\sigma^2 - 4), \quad y = \frac{f_{\xi\xi}}{f_\xi} \quad (2.11)$$

Если ввести новую переменную $y = -2\Psi'/\Psi$, то (2.11) можно представить в виде линейного уравнения второго порядка относительно $\Psi(\xi)$

$$\Psi_{\xi\xi}'' - 1/32(\sigma^2 - 4)\Psi = 0 \quad (2.12)$$

В случае $|\sigma| = 2$ из (2.12) находим

$$\Psi = C_1 \xi + C_2 \quad (2.13)$$

Здесь C_1, C_2 и далее C_i ($i=3, \dots$) — произвольные постоянные. Поскольку $f_{\xi} = C_3 \Psi^{-2}$, то, используя (2.13), при $|\sigma| = 2$ получаем

$$f(\xi) = C_4 - \frac{C_3}{C_1(C_1 \xi + C_2)} \quad (2.14)$$

В случае $|\sigma| \neq 2$ (2.12) приводит к решению

$$\Psi(\xi) = C_5 \exp\{k\xi\} + C_6 \exp\{-k\xi\}, \quad k = \frac{\sqrt{\sigma^2 - 4}}{4\sqrt{2}} \quad (2.15)$$

Полагая в (2.15) $C_5 = k, C_6 = 0$ при $|\sigma| \neq 2$, в частности, получаем

$$f(\xi) = C_7 + \exp(k\xi)$$

Решение уравнения (2.8) в этом случае имеет вид ($C_7 = 1$)

$$u = \frac{k}{2} \operatorname{th}\left(\frac{k\xi}{2}\right) - \frac{\sigma}{12}$$

Это решение имеет вид волнового фронта и типично для нелинейных волновых уравнений. Подобным методом можно найти и другие частные решения уравнения (2.8).

3. Численное моделирование волновых процессов, описываемых уравнением (1.1). При $p=1$ в уравнении (1.1) введем безразмерные переменные и параметры

$$t = \frac{\gamma}{\alpha^2} t', \quad x = \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{1/2} x', \quad u = \alpha \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{1/2} u', \quad \sigma = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}}$$

В этих переменных уравнение (1.1) запишется в виде

$$u_t + uu_x + u_{xx} + \sigma u_{xxx} + u_{xxxx} = 0 \quad (3.1)$$

Численное моделирование распространения уединенной волны, заданной в начальный момент времени $t=0$ выражением (2.4), при условии свободного протекания на концах отрезка $u^k(0) = u^k(10) = 0$ ($k=0, 1, 2$; здесь u^k соответствует производной k -го порядка от u) показало, что эта уединенная волна переносится со скоростью $6\alpha\sqrt{\alpha/\gamma}$ без каких-либо изменений. Профиль уединенной волны полностью соответствует аналитическому решению (2.4) уравнения (1.1).

Кроме того, моделировалось взаимодействие уединенной волны (2.4) с другими возмущениями. Фигура 1 иллюстрирует взаимодействие такой уединенной волны с возмущением, описываемым формулой $u(x, t=0) = 15 \operatorname{ch}^{-2}(6x-15)$ (при $t=0, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 1$ — соответственно фрагменты 1–6). Параметры уединенной волны (2.4): $\alpha = 1/4, \beta = 1/5, \gamma = 10^{-2}$, что соответствует $\sigma = 4$. Из фиг. 1 видно, что уединенная волна (2.4) встречается с возмущением, взаимодействует с ним и расходится без каких-либо изменений, но с некоторой задержкой по фазе. Фактически уединенная волна (2.4) упруго взаимодействует с другими возмущениями и ведет себя так же, как солитон. Поэтому уравнение (1.1) при α, β и γ , отличных от нуля, имеет солитонные решения. Любопытно, что возмущение $u(x, t)$ с течением времени меняется, амплитуда его в отличие от уединенной волны (2.4) увеличивается и при достаточно большом времени расчета это возмущение становится похожим на решение (2.4). Причем этот процесс происходит независимо от взаимодействия с уединенной волной (2.4). В случае $\sigma \neq 4$ уравнение (1.1) при $p=1$ имеет уединенную волну со свойствами, аналогичными решению (2.4).

Обсудим устойчивость уединенной волны (2.4) относительно малых возмущений. Если в уравнение (1.1) подставить $u = u_0(x, t) + u'$ где $u_0(x, t)$ — решение (2.4) уравнения (1.1), а малые возмущения $u' \sim \exp(ikx + \omega t)$, то приходим к дисперсионному уравнению

$$\omega = -k^4 + k^2 - u_{0x} + ik(\sigma k^2 - u_0) \quad (3.2)$$

Из (3.2) следует, что уединенная волна (2.4) неустойчива относительно малых возмущений при условии

$$k^4 - k^2 + u_{0x} < 0 \quad (3.3)$$

С целью исследования устойчивости уединенной волны (2.4) выполнена серия вычислительных экспериментов с возмущением в виде волны

$$u' = 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{T} x\right) \quad (3.4)$$

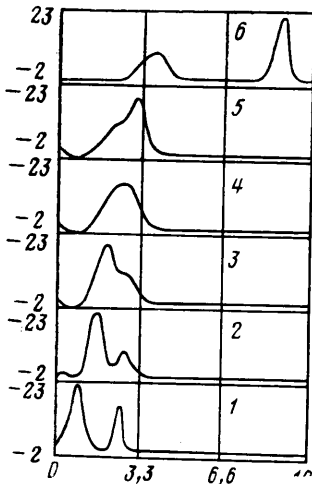
На фиг. 2 показаны результаты численного моделирования уединенной волны (2.4) при возмущении (3.4) для $t=0, 0,5, 1,5, 2,5$ (фрагменты 1-4). Видно, что уединенная волна (2.4) неустойчива при возмущении (3.4) с длиной волны, сравнимой с характерной шириной солитона (а), и устойчива для коротковолновых возмущений (б). Эти результаты находятся в соответствии с условием (3.3).

Уравнение (1.1) в системе координат бегущей волны имеет решение $u(x, t) = u^0(\xi)$, $\xi = x - ct$. Обыкновенное дифференциальное уравнение (1.3), при $p=1$ соответствующее уравнению (1.1), имеет две точки бифуркации рождения цикла $c = c^* = \pm \sigma$, $\sigma = \beta \sqrt{\alpha \gamma}$. Поскольку в этих точках выполняются условия теоремы Хопфа, то стационарные решения уравнения (1.3) при $c < -\sigma$ и при $c > \sigma$ теряют устойчивость и в диссипативно-дисперсионной среде, описываемой уравнением (1.3), возникает автоколебательный процесс.

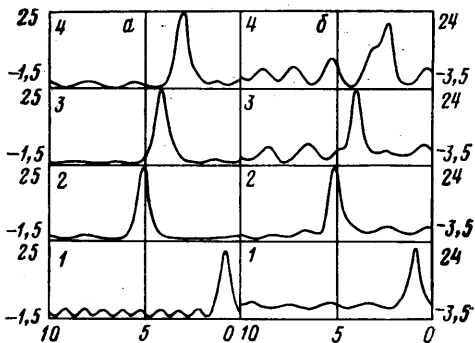
Для проверки возникновения в системе автоволны выполнены расчеты эволюции начальных возмущений, описываемых уравнением (1.1). Использовались периодические граничные условия: $u^h(0) = u^h(10)$ ($h=0, \dots, 2$).

Некоторые результаты численного моделирования этого процесса для $t=0, 0,25, 1, 2,5, 5$ (соответственно фрагменты 1-5) представлены на фиг. 3. Начальное возмущение в виде белого шума, заданного на интервале $[0, 10]$ со средней амплитудой шума 0,5, с течением времени трансформируется в волну, которая при $t \approx 7,5$ образует структуру определенной амплитуды и ширины. Характерной особенностью полученного решения является то, что для данного значения σ ($\sigma=4$) его структура состоит из набора солитонов, каждый из которых описывается аналитической зависимостью (2.4).

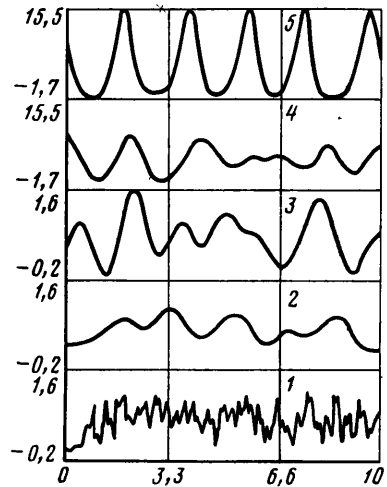
В случае других начальных условий, в частности при $u(x, t) = 20 \operatorname{ch}^{-2}(3x - 15)$, получается в конечном



Фиг. 1

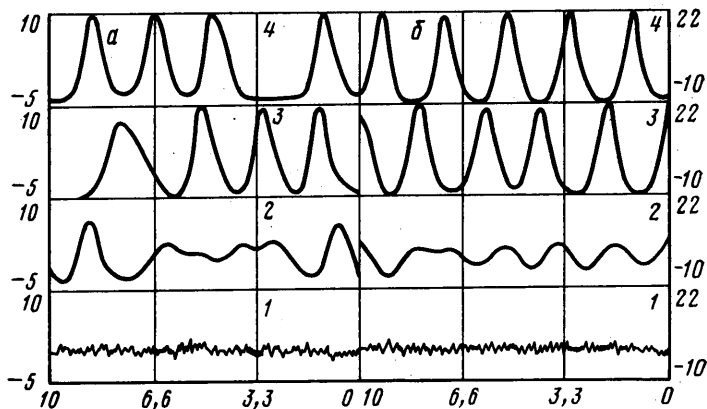


Фиг. 2

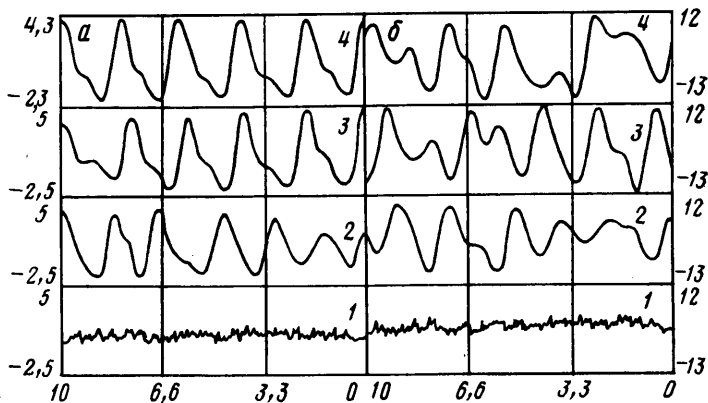


Фиг. 3

итоге аналогичный результат: от начального возмущения распространяется волна, которая с течением времени также преобразуется в структуру. Если в начальный момент времени зависимость от x задается в виде синусоиды, то с течением времени образуется структура, как и в предыдущем случае. Наибольшее число солитонов, об-



Фиг. 4



Фиг. 5

разовавшихся на отрезке длиной 10, при $\sigma=4$ равно 5. В случае длинноволнового начального возмущения их число меньше.

При численном моделировании волновых процессов, описываемых уравнением (1.1), рассмотрено влияние параметра σ при $p=1$ на структурообразование в диссипативно-дисперсионной неустойчивой среде. На фиг. 4 представлена эволюция начальных сигналов из белого шума при $\sigma=2$ (а) и 6 (б) при $t=0, 2,5, 5, 7,5$. В этих случаях, так же как и при $\sigma=4$, имеет место эффект самовозбуждения и усиления волны определенной частоты с последующим процессом самоорганизации. Амплитуда образовавшейся при этом структуры зависит от значения коэффициента σ . Большому значению σ соответствует большая амплитуда волны, но меньшая ширина отдельного солитона. Так, при $\sigma=2$ конечная амплитуда волны равна 13,5 и на отрезке длиной 10 укладывается всего четыре солитона, в случае $\sigma=6$ амплитуда волны 32, а на отрезке расчета образуется структура из шести солитонов.

В случае $\sigma u_{xxx} \sim uu_x \gg u_{xx} \sim u_{xxxx}$ для уравнения (1.1) можно получить приближенное решение, если представить его в виде солитона с медленно меняющимися во времени амплитудой, шириной и скоростью распространения волны

$$u(x, t) = A(t) \operatorname{ch}^{-2} \left[\left(x - \frac{1}{3} \int_0^t A(\tau) d\tau \right) (12\sigma A)^{-1/2} \right] \quad (3.5)$$

Подставляя (3.5) в уравнение (1.1), приходим к уравнению для $A(t)$ в виде

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A^2}{21\sigma^2} \left(\frac{21\sigma}{5} - A \right) \quad (3.6)$$

При $t \rightarrow \infty$ решение этого уравнения имеет амплитуду $A_\infty = 4,2\sigma$, что находится в соответствии с результатами численного моделирования.

Моделирование эволюции начального возмущения при уменьшении σ показало, что форма солитона в структуре меняется. Это иллюстрирует фиг. 5, а при $\sigma=0,4$

для $t=0, 2,5, 5, 20$ (фрагменты 1–4). Существует критическое значение $\sigma_* \approx 0,3$, такое, что при $\sigma < \sigma_*$ структура из набора солитонов не образуется. При $\sigma = 0 < \sigma_*$ процесс имеет аперриодический характер (фиг. 5, 6): $t=0, 2,5, 10, 30$ (фрагменты 1–4). Уравнение (1.1), по-видимому, имеет стохастические решения, типичные для гидродинамических систем, причем переход к стохастике в решениях уравнения (1.1) осуществляется скачкообразно.

Количество солитонов в структуре определяется длиной отрезка, на которой проводился расчет. С увеличением длины отрезка увеличивается число образовавшихся солитонов и время образования структуры. Однако небольшое увеличение отрезка (на длину меньшую, чем ширина солитона) не приводит к увеличению их числа, солитоны в этих случаях только несколько удаляются друг от друга.

Расчеты, выполненные для граничных условий $u^k(0) = u^k(10) = 0$ ($k=0, 1, 2$) и при заданном в начальный момент времени шуме на отрезке $[3, 5]$ (на остальной части $u(x, t=0) = 0$), показали, что в этих случаях образуются структуры их солитонов. При этом в начальные моменты времени из локализованного шума образуется волна, которая затем трансформируется в набор солитоноподобных импульсов, распространяющихся влево. С течением времени происходит эволюция каждого из импульсов до солитоноподобного решения, в частности, при $\sigma = 4$ — до решений, соответствующих (2.4).

Если в качестве начального возмущения принимать некоторое локализованное возмущение (например, односолитонное решение уравнение Кортевега — де Вриза), то это возмущение с течением времени трансформируется в солитонное решение уравнения (1.1), которое далее распространяется без каких-либо изменений. Параметры этой уединенной волны не зависят от вида начального условия, если ширина возмущения меньше или сравнима с шириной уединенной волны. При $\sigma = 4$ уединенная волна совпадает с решением (2.4) уравнения (1.1).

Образование уединенной волны из локализованного решения происходит не только при $\sigma > \sigma_*$, но и при $\sigma < \sigma_*$, хотя для периодических граничных условий уравнение (1.1) в этом случае имеет стохастическое решение. Однако в случае $\sigma < \sigma_*$ уединенная волна имеет на переднем фронте осцилляции, амплитуда и число которых с уменьшением σ увеличивается.

Численное моделирование уравнения (1.1) при $p=3$ показало, что волновые процессы, которые описываются этим уравнением, имеют аналогичные особенности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шкадов В. Я. Уединенные волны в слое вязкой жидкости. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 1. С. 63–66.
2. Topper J., Kawahara T. Approximate equations for long nonlinear waves on viscous fluid // J. Phys. Soc. Japan. 1978. V. 44. № 2. P. 663–666.
3. Kuramoto Y., Tsuzuki T. Persistent propagation of concentration waves in dissipative media for from thermal equilibrium // Progr Theor. Phys. 1976. V. 55. № 2. P. 356–369.
4. Sivashinsky G. I. Instabilities, pattern formation, and turbulence in flames // Annu. Rev. Fluid Mech. Palo Alto. Calif. 1983. V. 15. P. 179–199.
5. Cohen B. I., Krommes J. A., Tang N. M., Rosenbluth M. N. Non-linear saturation of the dissipative trapped-ion mode by mode coupling // Nuclear Fusion. 1976. V. 16. № 6. P. 971–992.
6. Дежухин Е. А., Шкадов В. Я. К теории солитонов в системах с диссипацией // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 3. С. 91–97.
7. Гордеев Ю. Н., Кудряшов Н. А. Уединенные волны в диссипативно-дисперсионных системах с неустойчивостью // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 2. С. 99–104.
8. Кудряшов Н. А. Преобразования Бэклунда для уравнения вязкоупругих волн в диспергирующей среде: Препринт № 007–87. М.: МИФИ, 1987. 15 с.
9. Кудряшов Н. А. Преобразования Бэклунда для уравнения в частных производных четвертого порядка с нелинейностью Бюргерса — КдФ // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 2. С. 342–345.
10. Кудряшов Н. А. Точные солитонные решения обобщенного эволюционного уравнения волновой динамики // ПММ. 1988. Т. 52. № 3. С. 465–470.
11. Weiss J. The Painleve property for partial differential equations. II. Bäcklund transformation, Lax pairs, and the Schwarzian derivative // J. Math. Phys. 1983. V. 24. № 6. P. 1405–1413.

Москва

Поступила в редакцию
9.VI.1989