МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1990

УДК 532.5.013.4:536.25

Р. В. БИРИХ

О ВИБРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В ПЛОСКОМ СЛОЕ С ПРОДОЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ ТЕМПЕРАТУРЫ

Технологические эксперименты с неравномерно нагретой жидкостью в условиях пониженной гравитации вызвали повышенный интерес к различным механизмам возбуждения конвекции. В [1, 2] обсуждаются условия возникновения свободной конвекции, вызванной высокочастотными вибрациями полости, полностью заполненной жидкостью. Рассмотренное замкнутое виброконвективное течение в плоском слое с продольной компонентой градиента температуры существует лишь при наличии разности температуры между границами слоя в каждом сечении. В [3] утверждается, что в плоском слое с постоянным градиентом температуры, лежащим в одной перпендикулярной к слою плоскости с осью вибрации, возможно механическое равновесие. Естественное физическое требование ограниченности всюду амплитуды пульсационной скорости запрещает равновесную конфигурацию [3] и снимает противоречие ее с [1, 2]. Вопрос о виброконвективном течении при вибрациях под произвольным углом к слою остается открытым.

В [4] исследовано влияние вибрационного поля на адвективное течение в горизонтальном слое [5]. Рассмотренные случаи продольной и поперечной вибрации не имеют предела чисто вибрационной конвекции.

Ниже приведено точное решение уравнений виброгравитационной конвекции в произвольно ориентированном плоском слое жидкости с продольной компонентой градиента температуры. Показано, что в отсутствие статического поля при наклонных вибрациях возникает плоскопараллельное конвективное течение. С другой стороны, гравитационное плоскопараллельное конвективное течение всегда можно подавить соответствующим выбором направления и амплитуды вибрации.

1. Рассмотрим плоский слой вязкой механически несжимаемой жидкости, совершающий высокочастотные гармонические колебания с частотой Ω и амплитудой b вдоль вектора $\mathbf{n}$. Слой находится в статическом поле тяжести $-\gamma g$, в жидкости создана постоянная продольная проекция градиента температуры A. Уравнения осредненных полей скорости $\mathbf{v}$, температуры T, давления p и дополнительной функции $\mathbf{w}$, определяющей амплитуду пульсационной скорости, запишем в виде [1]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\frac{1}{P}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=-\nabla p+\Delta\mathbf{v}+\gamma RT+R_v(\mathbf{w}\nabla)(T\mathbf{n}-\mathbf{w}) \tag{1.1}$$

$$P\frac{\partial T}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)T=\Delta T \tag{1.2}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{w}=\operatorname{rot}(T\mathbf{n}),\qquad \operatorname{div}\mathbf{v}=0,\qquad \operatorname{div}\mathbf{w}=0 \tag{1.3}$$

$$R=\frac{g\beta Ah^4}{\nu\chi},\qquad R_v=\frac{(b\Omega\beta Ah^2)^2}{2\nu\chi},\qquad P=\frac{\nu}{\chi}$$

Здесь выбраны следующие единицы измерения: расстояния — полуширина слоя h, времени — h^2/ν, скорости — χ/h, температуры и $\mathbf{w}$ — $A\cdot h$, давления — $\rho\nu\chi/h^2$ (ν, χ, β — коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и теплового расширения). Система (1.1)—(1.3) содержит три безразмерных параметра: число Рэлея R, вибрационный аналог числа Рэлея R_v, число Прандтля P, и два единичных вектора $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\gamma}$, характеризующих направления внешних силовых воздействий. Еще одно направление в пространстве задается постоянной проекцией градиента температуры — вектором $\mathbf{k}$.

Рассмотрим случай, когда векторы **n**, **γ** и **k** лежат в одной плоскости. Эту плоскость выберем за плоскость xz декартовой системы координат. Ось x направим по нормали к слою, ось z вдоль вектора **k** ($\gamma_z>0$ соответствует подогреву снизу). Начало координат выберем в середине слоя. Уравнения движения (1.1)—(1.3) допускают решения в виде плоскопараллельного течения:

$$\mathbf{v}=\mathbf{k}v(x), \quad T=-z+\tau(x), \quad \mathbf{w}=\mathbf{k}w(x) \qquad (1.4)$$
$$\mathbf{n}=\mathbf{i}n_x+\mathbf{k}n_z, \quad \boldsymbol{\gamma}=\mathbf{i}\gamma_x+\mathbf{k}\gamma_z$$

где **i** и **k** — орты координатных осей x и z.

В равновесной конфигурации [3] предполагается наличие у вектора **w** второй продольной компоненты. Уравнения (1.3) в этом случае приводят к линейной зависимости от y и z проекций амплитуды вибрационной скорости и к их неограниченному росту при y и $z\to\infty$.

Система уравнений (1.1)—(1.3) с учетом (1.4) может быть сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} v'''-(n_z^2R_v-\gamma_zR)\tau'=n_xn_zR_v-\gamma_xR \\ \tau''+v=0, \quad w'=n_x+n_z\tau' \end{gathered} \qquad (1.5)$$

где штрих означает дифференцирование по x.

Безразмерные критерии задачи вместе с проекциями единичных векторов **n** и **γ** скомбинировались в два параметра

$$q=n_xn_zR_v-\gamma_xR, \quad Q=n_z^2R_v-\gamma_zR$$

которые определяют структуру конвективного течения.

Параметр q при однородных граничных условиях для v и τ является единственным неоднородным членом задачи и, следовательно, определяет амплитуду конвективного течения. Значение $q=0$ соответствует состоянию механического равновесия. При наличии статического поля с компонентой вдоль оси x оно возможно при такой ориентации оси и интенсивности вибраций, чтобы

$$R_v=\frac{\gamma_x}{n_xn_z}R \qquad (1.6)$$

В отсутствие статического поля равновесие имеет место или при поперечных вибрациях ($n_z=0$), или при продольных вибрациях ($n_x=0$). При других направлениях вибраций равновесие невозможно.

Параметр Q определяет распределение скорости и температуры в канале. При $Q=0$ устанавливается течение с кубическим профилем скорости и степенным распределением температуры. В зависимости от ориентации и величины статического гравитационного поля Q может принимать любое значение. Положительным и отрицательным значениям этого параметра соответствуют существенно различные режимы конвекции.

2. Для анализа режимов конвекции сформулируем граничные условия и выпишем решения системы (1.5). Рассмотрим замкнутые течения между твердыми плоскостями. Это приводит к следующим условиям:

$$\int_{-1}^{1} v(x)\,dx=0, \qquad x=\pm1\colon\ v=0$$

Форма профиля скорости не чувствительна к граничным условиям для температуры, и при $Q>0$ функция $v(x)$ имеет вид

$$\begin{gathered} v=v_0(\operatorname{ch} rx \sin rx \operatorname{th} r \cos r-\operatorname{sh} rx \cos rx \sin r)/(2Br^2) \\ r=(Q/4)^{1/4}, \quad B=(\operatorname{th}^2 r\cos^2 r+\sin^2 r)\operatorname{ch} r \end{gathered} \qquad (2.1)$$

Такое же распределение скорости имеет место в случае гравитационной конвекции между вертикальными плоскостями, нагретыми до разных температур, при наличии продольного градиента температуры, направленного вверх [6], и для адвективного течения в продольном вибрационном поле [4]. Анализ распределения (2.1) показывает, что с ростом параметра r интенсивность течения уменьшается, при $r>3$ на ограничивающих слой плоскостях образуются гилловские пограничные слои.

Амплитуда скорости v_0 определяется распределением температуры в слое и для различных температурных граничных условий оказывается разной. При формулировке граничных условий для температуры рассмотрим два предельных случая: 1) идеально теплопроводные границы ($x=\pm 1$: $\tau=0$), 2) адиабатические границы ($x=\pm 1$: $\tau'=0$). Распределение температуры в обоих случаях имеет вид

$$T=-z-\frac{q}{Q}x+\frac{v_0}{BQ}(\operatorname{sh} rx\cos rx\operatorname{th} r\cos r+\operatorname{ch} rx\sin rx\sin r) \tag{2.2}$$

$$v_0^1=q, \qquad v_0^2=\frac{2qB\operatorname{ch} r}{r(\operatorname{sh} 2r+\sin 2r)}$$

где v_0^1 и v_0^2 — амплитуды скорости при граничных условиях 1) и 2).

Сравнение амплитуд v_0^1 и v_0^2 показывает, что скорость конвективного течения в случае теплоизолированных границ убывает с ростом r быстрее, чем для хорошо теплопроводных (при $r=0$ отношение амплитуд равно единице, а при $r\to\infty$ равно $1/r$).

Отметим, что рассмотренное конвективное течение сохраняет свою структуру и в отсутствие статического гравитационного поля. Слабое статическое поле с $\gamma_x R>0$ (при $n_x n_z>0$) уменьшает амплитуду конвективного течения. При увеличении статического поля (или уменьшения вибрационного числа Рэлея) с достижением равенства (1.6) конвективное движение прекращается, а затем направление течения меняется на противоположное.

В случае $Q<0$ распределения скорости течения и температуры в рассматриваемых вариантах граничных условий имеют вид

$$v=\frac{v_0}{2\mu^2}\left(\frac{\operatorname{sh}\mu x}{\operatorname{sh}\mu}-\frac{\sin\mu x}{\sin\mu}\right) \tag{2.3}$$

$$T=-z-\frac{q}{Q}x+\frac{v_0}{2Q}\left(\frac{\operatorname{sh}\mu x}{\operatorname{sh}\mu}+\frac{\sin\mu x}{\sin\mu}\right) \tag{2.4}$$

$$v_0^1=q,\ v_0^2=2q/(\operatorname{cth}\mu+\operatorname{ctg}\mu),\ \ \mu=(-Q)^{1/4}$$

Распределение скорости (2.3) также хорошо известно в теории свободной конвекции. Оно, например, возникает в вертикальном канале при наклонном градиенте температуры, соответствующем подогреву снизу [6]. Особенностью течения является наличие у параметра μ критических значений ($\mu=m\pi$, $m=1, 2, \ldots$), при которых амплитуда скорости и температуры обращается в бесконечность. В окрестности значений параметра $Q=-(m\pi)^4$ обсуждаемое плоскопараллельное течение реализоваться не может.

3. Рассмотрим устойчивость равновесного состояния, существующего при выполнении условия (1.6), относительно малых экспоненциально меняющихся со временем возмущений. Так как в аналогичной задаче теории свободной конвекции длинноволновые возмущения оказываются наиболее опасными, исследуем поведение возмущений с пространственной структурой вида (1.4) (волновое число равно нулю). Координатные функции $v_1(x)$, $\tau_1(x)$, $w_1(x)$ этих возмущений для равного нулю декремента затухания удовлетворяют следующим уравнениям и граничным условиям:

$$v_1'''-Q\tau_1'=0,\ \tau_1''+v_1=0,\ w_1'=n_z\tau_1' \tag{3.1}$$

$$x=\pm 1:\ v_1=\tau_1=0 \tag{3.2}$$

$$x=\pm 1:\ v_1=\tau_1'=0 \tag{3.3}$$

Здесь (3.2) для теплопроводных, а (3.3) для адиабатических границ.

Краевые задачи (3.1)—(3.3) совпадают с соответствующими задачами об устойчивости равновесия в плоском вертикальном слое с вертикальным градиентом температуры [6]. Отличные от нуля решения существуют лишь для $Q<0$ (подогрев снизу). Критическое значение параметра $Q=Q_*$, при котором самое опасное возмущение является нейтральным, в случае (3.2) равно $-\pi^4$, в случае (3.3) равно $-(2{,}365)^4$. Если для возмущений не ставится условие замкнутости потока в каждом сечении канала (перевальные движения вдоль оси y), то соответствующие значения Q_* равны $-(\pi/2)^4$ и 0. При $Q<Q_*$ равновесие неустойчиво и сменяется плоскопараллельным конвективным течением.

Таким образом, осредненное равновесие в плоском слое с продольным градиентом температуры существует при следующей связи гравитационного и вибрационного чисел Рэлея и направления вибрации:

$$n_x n_z R_v - \gamma_x R = 0, \quad n_z^2 R_v - \gamma_z R > Q_* \qquad (3.4)$$

Анализ соотношений (3.4) показывает, что соответствующим выбором вектора $\mathbf{n}$ и интенсивности вибраций (R_v) можно всегда подавить конвекцию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* О свободной тепловой конвекции в вибрационном поле в условиях невесомости // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 3. С. 580—584.
2. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Вибрационная тепловая конвекция в невесомости // Гидромеханика и процессы переноса в невесомости. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1983. С. 86—105.
3. *Браверман Л. М.* О некоторых типах вибрационно-конвективной неустойчивости плоского слоя жидкости в невесомости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 5. С. 4—7.
4. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Плоскопараллельные адвективные течения в вибрационном поле // Инж.-физ. журн. 1989. Т. 56. № 2. С. 238—242.
5. *Бирих Р. В.* О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3. С. 69—72.
6. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

Пермь

Поступила в редакцию
11.V.1989