МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1990

УДК 532.546

С. В. ПАНЬКО

О НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ

Вводится обобщение модели М. Г. Алишаева [1] на случай неизотермической фильтрации. В пренебрежении кондуктивным переносом тепла показано, что для рассматриваемой модели возникающие задачи на плоскости комплексного потенциала не только оказываются линейными, но и допускают разделение тепловой и гидродинамической задач. Последняя сведена к смешанной задаче для аналитической функции. Это позволило использовать известные методы и результаты теории предельно-равновесных целиков при изотермической фильтрации [2–5].

Установлено также, что решения нестационарных задач асимптотически стремятся к решениям соответствующих стационарных и получаются из последних простым пересчетом.

Эффективность предлагаемого подхода илюстрируется на задаче о системе источник – сток [1–4].

1. Неизотермические эффекты при разработке месторождений вязких и парафинистых нефтей проявляются в снижении вязкости и уменьшении предельного градиента для нефти с ростом температуры [6].

В [2] зависимость предельного градиента от координат точек границы раздела нефть – вода задавалась (и интерпретировалась как влияние неизотермичности) в таком виде, что при помощи вспомогательной аналитической функции, которая восстанавливается по граничным значениям, для модели [1] был рассмотрен ряд задач. В частности для системы источник – сток [1–4] обнаружено увеличение области фильтрации по сравнению со случаем, когда предельный градиент постоянен. Результаты расчетов, проведенные для пятиточечной схемы, также указывают на увеличение коэффициента нефтеотдачи [6].

Уравнения движения несжимаемой жидкости в однородной пористой среде при нелинейном законе фильтрации [3] естественно обобщить на неизотермический случай следующим образом:

$$\nabla \mathbf{H} = -\frac{\Phi(w,T)}{w}\mathbf{w}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{w}=0, \qquad \Phi(0,T)=\frac{k}{\mu}G(T) \tag{1.1}$$

Здесь H – приведенный напор, w – скорость фильтрации, $G(T)$ – предельный градиент для нефти, T – абсолютная температура. Присоединим к (1.1) уравнение переноса, которое, согласно [7], запишем в виде

$$\gamma(\mathbf{w}\nabla \mathbf{T}) = \operatorname{div}(\chi\nabla \mathbf{T})+q(T), \qquad \gamma=\frac{\rho c_p}{C+m\rho c_p}, \qquad \chi=\lambda\gamma\rho c_p \tag{1.2}$$

В результате получим систему уравнений неизотермической фильтрации неньютоновских жидкостей. В (1.2) $q(T)$ – интенсивность тепловыделения, c – теплоемкость скелета, c_p – теплоемкость жидкости, χ – коэффициент температуропроводности.

Граничные условия для системы (1.1), (1.2) формулируются так же, как в задачах нелинейной фильтрации [3]: добавляются лишь условия $T=T(s)$ или $T_n=T_n(s)$, где s – длина дуги границы, n – нормаль к ней.

На плоскости комплексного потенциала $W=-H+i\psi$, где ψ – функция тока, область течения представляет собой полуполосу $0<\psi<Q$, $-\infty<-H<<0$, в некоторых случаях неоднолистную [2—5], независимо от схемы расстановки скважин. Естественно поэтому выбрать H и ψ за независимые переменные. Тогда на плоскости комплексного потенциала система (1.1), (1.2) примет вид

$$\frac{\Phi}{w}\left[\frac{\partial}{\partial H}w\Phi\chi\frac{\partial T}{\partial H}+w^2\frac{\partial}{\partial\psi}\frac{w\chi}{\Phi}\frac{\partial T}{\partial\psi}\right]+q(T)+\gamma w\Phi\frac{\partial T}{\partial H}=0$$

$$w^2\frac{\partial\theta}{\partial\psi}=\Phi\frac{\partial w}{\partial H},\quad \frac{\partial\theta}{\partial H}=w\frac{\partial}{\partial\psi}\frac{1}{\Phi} \qquad (1.3)$$

$$\Phi=\Phi(w,\ T)$$

где θ — угол наклона скорости к оси x.

По известному решению системы (1.3) возвращение на плоскость течения осуществляется при помощи формул перехода

$$dz=e^{i\theta}\left[-\frac{dH}{\Phi}+i\frac{d\psi}{w}\right] \qquad (1.4)$$

Анализ системы (1.3) при произвольной зависимости $\Phi(w,\ T)$ представляет значительные затруднения в силу ее нелинейности. Поэтому примем следующие упрощающие предположения. Пренебрежем теплопроводностью, т. е. положим $\chi=0$. Это допущение оправдано, если толщина пласта и скорость фильтрации достаточно велики [6] и определяющим будет конвективный перенос тепла. Далее в качестве закона фильтрации возьмем обобщение модели [1]:

$$\mathbf{w}=0,\quad |\nabla H|\leqslant\frac{k}{\mu}G(T)$$

$$\mathbf{H}=-\nabla H,\quad |\nabla H|>\frac{k}{\mu}G(T) \qquad (1.5)$$

Из (1.5) следует, что граница целика уже не будет линией постоянного модуля скорости.

На основе сделанных допущений система (1.3) существенно упрощается и принимает вид

$$w\frac{\partial\theta}{\partial\psi}=\frac{\partial w}{\partial H},\quad w\frac{\partial\theta}{\partial H}=-\frac{\partial w}{\partial\psi}$$

$$\gamma w^2\frac{\partial T}{\partial H}+q(T)=0 \qquad (1.6)$$

Уравнение переноса тепла в (1.6) показывает, что изотермы совпадают с линиями тока лишь при отсутствии источников тепла.

Помимо условия предельного равновесия $w=w(T)$ на границе целика должно выполняться условие непротекания $\psi=0$. Принимая во внимание последнее уравнение (1.6), находим, что вдоль этой границы

$$w=w(T(H,0)),\quad \gamma w^2\frac{\partial T}{\partial H}(H,0)+q(T(H,0))=0 \qquad (1.7)$$

При заданных $w(T)$ и $q(T)$ распределения температуры и скорости фильтрации на границе целика отыскивается из решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (1.7).

В частности, если

$$q(T)=\alpha(T-T_0),\quad w=\lambda_0[1+2\alpha(T-T_0)]^{-1/2} \qquad (1.8)$$

где α, λ_0, T_0 — известные постоянные, то имеем

$$w^2=\lambda_0^2(1-m\exp+bH),\quad G^2(T)=G_0^2(1-m\exp-bH)$$

$$m=1-\frac{G^2(T_1)}{G^2(T_0)},\qquad b=\frac{\alpha}{\gamma G_0^2},\qquad \lambda_0=\frac{kG_0}{\mu}\tag{1.9}$$

Здесь T_1 — заданная температура на контуре питания.

Аналогично, принимая в качестве $G(T)$ зависимость, рекомендуемую в [6]

$$G(T)=G_0\exp-\beta(T-T_0)\tag{1.10}$$

которая удовлетворительно аппроксимирует экспериментальные данные, и задавая интенсивность тепловыделения следующим образом:

$$q(T)=\frac{\alpha}{2\beta}[1-\exp-2\beta(T-T_0)]\tag{1.11}$$

получим

$$\exp-2\beta(T-T_0)=1-m\exp-bH,\qquad w^2=\lambda_0^2(1-m\exp-bH)\tag{1.12}$$

Из соотношений (1.9) и (1.12) следует, что для рассматриваемой модели гидродинамическая и тепловая задачи разделяются. Сначала отыскивается решение гидродинамической задачи — обычной смешанной задачи для аналитической в полуполосе $0<\psi<Q$, $-\infty<-H<0$ функции $F(\zeta)$

$$F(\zeta)=\ln(w/\lambda_0)-i\theta,\qquad \zeta=\xi+i\psi=-H+i\psi$$

$$\operatorname{Im}F=0,\qquad -\infty<\xi<-H_0,\qquad \psi=0\tag{1.13}$$

$$\operatorname{Re}F={}^1/_2\ln(1-m\exp b\xi),\qquad -H_0<\xi<0,\qquad \psi=0$$

$$\operatorname{Im}F=-\theta_0,\qquad -\infty<\xi<0,\qquad \psi=Q$$

Здесь θ_0 — определяется схемой расстановки скважин ($\theta_0=\pi$ — двухскважинная система, $\theta_0=\pi/4$ — пятиточечная схема и т. д.).

Параметрическое уравнение границы целика находим при помощи формул перехода

$$dz=-\frac{dH}{w(H,0)}\exp i\theta(H,0)$$

Распределение температуры вдоль границы целика в соответствии с (1.9) и (1.12) уже известно. Поле температур внутри области течения отыскивается интегрированием последнего уравнения (1.6) при начальном условии $T(0,\psi)=T_1$, когда вместо $w(H,\psi)$ подставляется решение задачи (1.13).

Таким образом, для введенной модели (1.5), как и для модели [1], оказывается возможным использовать аппарат теории аналитических функций и теории струй [8, 9].

Предположение о стационарном характере течения сужает область применения полученных выше результатов. Их можно использовать в тех случаях, когда произошел предварительный разогрев пласта и тепло, приносимое источниками, передается вытесняемой жидкости, изменяя ее свойства.

2. Оставляя в стороне достаточно изученный случай одномерных течений [10, 11] и пренебрегая, как и в предыдущем пункте, кондуктивным переносом тепла, вместо системы (1.1), (1.2) будем иметь следующую:

$$\nabla H=-\frac{\Phi(w,T)}{w}\mathbf{w},\qquad \operatorname{div}\mathbf{w}=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\gamma\mathbf{w}\nabla T=q(T)\tag{2.1}$$

Если в (2.1) перейти к переменным t, H, ψ, то приходим к системе вида

$$w^2\frac{\partial\theta}{\partial\psi}=\Phi\frac{\partial w}{\partial H},\qquad \frac{\partial\theta}{\partial H}=w\frac{\partial}{\partial\psi}\frac{1}{\Phi}$$
$$\frac{\partial T}{\partial t}-\gamma w\Phi\frac{\partial T}{\partial H}=q(T),\qquad \Phi=\Phi(w,T) \tag{2.2}$$

Соответственно для модели (1.5) имеем

$$w\frac{\partial\theta}{\partial\psi}=\frac{\partial w}{\partial H},\qquad w\frac{\partial\theta}{\partial H}=-\frac{\partial w}{\partial\psi}$$
$$\frac{\partial T}{\partial t}-\gamma w^2\frac{\partial T}{\partial H}=q(T) \tag{2.3}$$

Из (2.3) непосредственно видно, что как и в стационарном случае происходит разделение тепловой и гидродинамической задач. Полагая $\psi=0$, $w=(k/\mu)G(T)$ на границе целика, приходим, согласно последнему уравнению (2.3), к нелинейному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial T}{\partial t}-\gamma\left[\frac{k}{\mu}G(T)\right]^2\frac{\partial T}{\partial H}=q(T) \tag{2.4}$$

Его решение при заданных $G(T)$, $q(T)$ и начальном условии $T(0,\ H,\ \psi)=T_1$ дает распределение температуры и скорости фильтрации на границе целика.

Если $G(T)$ и $q(T)$ взяты из (1.8), то решение уравнения (2.4) и значение скорости имеют вид

$$T=T_0+\frac{1}{2\alpha}\frac{m\exp-bH+\exp-\alpha t}{1+m\exp-\alpha t},\qquad w^2=\lambda_0{}^2\frac{1-m\exp-bH}{1+m\exp-\alpha t} \tag{2.5}$$

Аналогично, для $G(T)$ и $q(T)$, определяемых равенствами (1.10) и (1.11), находим

$$T=T_0+\frac{1}{2\beta}\frac{1-m\exp-bH}{1+m\exp-\alpha t},\qquad w^2=\lambda_0{}^2\frac{1-m\exp-bH}{1+m\exp-\alpha t} \tag{2.6}$$

Из (2.5) и (2.6) следует, что распределение скорости вдоль границы целика для, казалось бы, различных, но асимптотически эквивалентных моделей, подчиняется одной и той же зависимости.

Гидродинамическая задача в нестационарном случае отличается от соответствующей стационарной лишь дополнительным слагаемым, так как в силу (2.5), (2.6) на границе целика выполняется условие

$$\operatorname{Re}F=\ln\frac{w}{\lambda_0}=\frac{1}{2}\ln\frac{1-m\exp-bH}{1+m\exp-\alpha t}$$

Согласно (1.14), в параметрическом уравнении границы целика появится дополнительный сомножитель. В результате приходим к следующему уравнению для определения границы целика, которое запишем в безразмерном виде

$$dZ=Q_0\frac{e^{i\theta}}{v}(1+me^{-\alpha t})\,dh,\qquad Q_0=\frac{Q\mu}{2\pi kl},\qquad Z=\frac{z}{l},\qquad h=\frac{\pi H}{Q} \tag{2.7}$$

Таким образом, для указанных выше зависимостей $G(T)$ и $q(T)$ достаточно ограничиться стационарным случаем — задачей (1.13)

3. Для решения краевой задачи (1.13) отобразим полуполосу на верхнюю полуплоскость и воспользуемся формулами Келдыша — Седова [8].

Принимая во внимание ограниченность скорости в точках $\zeta=-a$, $\zeta=-1$, находим

$$F(\zeta)=-i\theta_0+\frac{2\theta_0}{\pi}\ln\frac{\sqrt{\zeta+a}+\sqrt{\zeta+1}}{\sqrt{a-1}}+\frac{R(\zeta)}{\pi i}\int_{-a}^{-1}\frac{f(\tau)\,d\tau}{R(\tau)(\tau-\zeta)}$$

$$R(\zeta)=\sqrt{-(\zeta+a)(\zeta+1)},\quad f(\tau)={}^1/_2\ln[1-(-\tau+\sqrt{\tau^2-1})^n]\tag{3.1}$$

$$\zeta=\operatorname{ch}\frac{\pi W}{Q},\quad a=\operatorname{ch}\frac{\pi H_0}{Q},\quad n=Q_0\frac{\alpha l}{\gamma\lambda_0}$$

Из (3.1) и формул перехода (1.14) находим параметрическое уравнение границы целика, координаты, определяющие положение характерных точек, и формулу, связывающую динамический параметр Q_0 с параметрами m, a, n

$$Z=Q\int_{\zeta}^{\infty}\frac{e^{i\beta\pi}}{\sqrt{\zeta^2-1}}\left(\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{\zeta+a}+\sqrt{\zeta+1}}\right)^{2\beta}\exp I(\zeta)\,d\zeta=Q_0\int_{\zeta}^{\infty}f_1(\zeta)\,d\zeta$$

$$I(\zeta)=\frac{R(\zeta)}{\pi i}\int_{-a}^{-1}\frac{f(\tau)\,d\tau}{R(\tau)(\tau-\zeta)}\tag{3.2}$$

$$X_0=1+Q_0\int_{\infty}^{-a}f_1(\tau)\,d\tau,\qquad Y_0=Q_0\int_{-1}^{1}f_1(\tau)\,d\tau$$

$$1=Q_0\int_{1}^{\infty}f_1(\tau)\,d\tau,\qquad \beta=\frac{\theta_0}{\pi}$$

Построим асимптотическое решение, принимая за малый параметр величину m, характеризующую отклонение предельного градиента от изотермического значения, и полагая для определенности $n=1$.

Учитывая соотношения

$$\ln[1-m(-\tau+\sqrt{\tau^2-1})]\approx m(-\tau+\sqrt{\tau^2-1})=f(\tau)$$

$$\exp-I(\zeta)\approx1+\frac{m}{2}T_1(\zeta)=1+\frac{m}{2\pi i}R(\zeta)\int_{-G}^{-1}\frac{f(\tau)\,d\tau}{R(\tau)(\tau-\zeta)}\tag{3.3}$$

$$I_1(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\left[-\pi\zeta+\sqrt{1-\zeta^2}\ln\frac{A(-1)+A(\zeta)}{A(-1)-A(\zeta)}+R(\zeta)\operatorname{arctg}A(-1)\right]$$

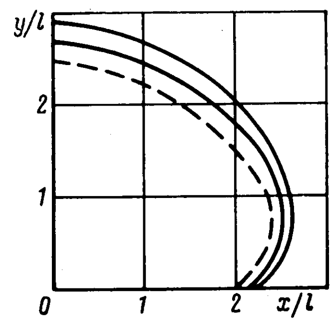
$$A(\zeta)=\sqrt{\frac{1-\zeta}{a+1}}$$

приходим, ограничиваясь случаем $\theta_0=\pi$, к следующему уравнению границы целика для системы источник — сток [1—4]:

$$Z-X_0=Q_0\int_{\zeta}^{\infty}f_1(\zeta)\,d\zeta$$

$$f_1(\zeta)=\frac{(\sqrt{\zeta+a}+\sqrt{\zeta+1})^2}{(a-1)\sqrt{\zeta^2-1}}[1+mI_1(\zeta)]\tag{3.4}$$

По формулам (3.2)—(3.4) проведен расчет границы целика для значений параметра $m=0{,}05$; $0{,}1$ и $a=3$. Вид границы приведен на фигуре, где штриховой линией изображена граница в изотермическом случае ($m=0$). Видно, что вытеснение при закачке жидкости с температурой выше пластовой приводит к уменьшению целика остаточной нефти.



Если $G(T_1)>G(T_0)$, то температура на контуре питания ниже пластовой. Тогда $m<0$ и, в соответствии (3.4), площадь целика увеличивается по сравнению с изотермическим значением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алишаев М. Г., Вахитов Г. Г., Гехтман М. М., Глумов И. Ф.* О некоторых особенностях фильтрации пластовой девонской нефти при пониженных температурах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 3. С. 166–169.
2. *Котляр Л. М., Скворцов Э. В.* Плоские стационарные задачи фильтрации жидкости с начальным градиентом. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. 141 с.
3. *Бернадинер М. Г., Ентов В. М.* Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М.: Наука, 1975. 199 с.
4. *Алишаев М. Г., Бернадинер М. Г., Ентов В. М.* Влияние предельного градиента на потери нефти при вытеснении ее водой. // Вопр. нелинейн. фильтрации и нефтегазоотдачи при разработке нефт. и газ. месторожд. М., 1972. С. 15–32.
5. *Ентов В. М., Одишария М. Г.* О некоторых задачах определения размеров предельно-равновесных целиков при вытеснении вязкопластической нефти водой // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 3. С. 88–93.
6. *Алишаев М. Г., Розенберг М. Д., Теслюк Е. В.* Неизотермическая фильтрация при разработке нефтяных месторождений. М.: Недра, 1985. 271 с.
7. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Движение жидкостей и газов в пористых пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
8. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
9. *Гуревич М. И* Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
10. *Ентов В. М.* Физико-химическая гидродинамика процессов в пористых средах (Мат. модели методов повышения нефтеотдачи пластов). Препринт № 161. М.: ИПМ АН СССР. 1980. 63 с.
11. *Зазовский А. Ф., Федоров К. М.* О вытеснении нефти паром: Препринт № 267. М.: ИПМ АН СССР. 1986. 63 с.

Томск

Поступила в редакцию
2.VI.1989