

УДК 532.546

© 1990 г.

Э. Н. БЕРЕСЛАВСКИЙ, Л. А. ПАНАСЕНКО

**О ЛИНЗАХ ПРЕСНЫХ ВОД ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ
ИЗ ОРОСИТЕЛЕЙ**

В гидродинамической постановке исследуется плоская модель установившейся линзы пресной воды над соленой водой, образующейся при работе кротового полива [1]. Решение соответствующей краевой задачи осуществляется с помощью метода П. Я. Полубариновой-Кочиной, основанного на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений [1]. Приводятся результаты численных расчетов и дается анализ влияния определяющих параметров модели на форму и размеры линз.

1. Постановка задачи. На фиг. 1 схематично представлена правая половина области движения — область $BCGD$ плоскости z . Пресные воды плотности ρ_1 , фильтруясь из кротового оросителя диаметра D , растекаясь в стороны и частично углубляясь, продавливают первоначально горизонтальную поверхность более плотных соленых грунтовых вод и вытесняют в зоне оросителя соленые подпорные воды, образуя на них пресную линзу $BCGD$. Будем считать, как это принято в задачах подобного рода [1], что между пресными и солеными водами существует резко выраженная граница раздела BC . Предполагается, что расположенные ниже границы раздела соленые воды плотности $\rho_2 (\rho_2 > \rho_1)$ неподвижны [1], а движение в линзе установившееся, что обеспечивается наличием испарения со свободной поверхности с постоянной интенсивностью ϵ ($\epsilon \neq 0$, $\epsilon < \rho$). При первоначальном рассмотрении ороситель заменим точечным источником, расположенным в точке A . Задача состоит в определении кривой депрессии CD и границы раздела BC при следующих условиях:

$$AB: x=0, \Psi=0; BC: \varphi-\rho y=\text{const}, \Psi=0 \tag{1.1}$$

$$(\rho=\rho_2/\rho_1-1)$$

$$CD: \varphi+y=H, \Psi+\epsilon x=1/2Q; AD: x=0, \Psi=1/2Q$$

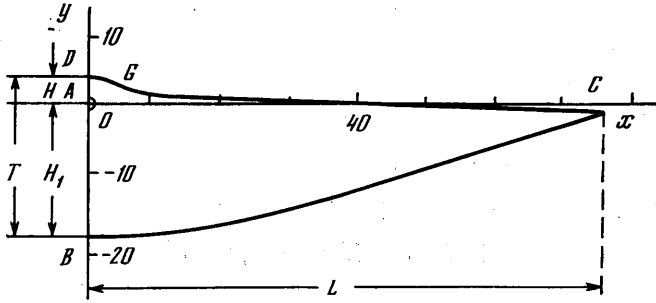
где Q — искомый фильтрационный расход оросителя на единицу его длины.

В уравнении (1.1) $\omega=\varphi+i\Psi$ и $z=x+iy$ — комплексный потенциал течения и комплексная координата, отнесенные соответственно к kH_0 и H_0 (k — коэффициент фильтрации), где H_0 — глубина исходной (до формирования линзы) поверхности соленых вод, для которой имеем следующее выражение [1]:

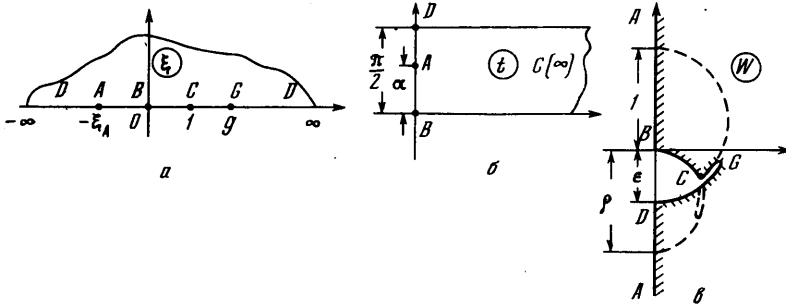
$$H_0 = - \int_0^L y_{BC}(x) dx/L \tag{1.2}$$

Полагая во втором условии для участка CD $x=L$, получим $Q=2\epsilon L$. Это соотношение выражает равенство расхода из оросителя величине испарения со свободной поверхности в условиях установившейся фильтрации.

2. Построение решения. Для решения используется метод П. Я. Полубариновой-Кочиной, основанный на применении аналитической теории



Фиг. 1



Фиг. 2

дифференциальных уравнений [1]. Вводятся вспомогательная переменная ξ (фиг. 2, а) и искомые функции

$$Z = \frac{dz}{d\xi}, \quad \Omega = \frac{d\omega}{d\xi} \quad (2.1)$$

Определяя показатели функций (2.1) около особых точек, найдем, что Z и Ω представляют линейные комбинации двух ветвей функции Римана [2]

$$P \begin{Bmatrix} -\xi_A & 0 & 1 & g & \infty \\ 0 & 0 & -(1+\nu)/2 & 0 & 3/2 \\ -1 & -1/2 & -(1-\nu)/2 & 2 & 2 \\ & & & \xi & \end{Bmatrix} = \\ = \frac{1}{(\xi + \xi_A) \sqrt{\xi(1-\xi)^{1+\nu}}} P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & g & \infty \\ 0 & 0 & 0 & -(1+\nu)/2 \\ 1/2 & \nu & 2 & -\nu/2 \\ & & & \xi \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\nu = 2\pi^{-1} \operatorname{arccotg} \sqrt{\varepsilon(\rho+1)/(\rho-\varepsilon)}$$

Здесь точка $\xi = -\xi_A$ с показателями 0 и -1 , отвечающая источнику, является устранимой (см. например, [3, § 31, с. 35; 4]).

Последнему символу Римана в (2.2) соответствует следующее дифференциальное уравнение второго порядка класса Фукса с четырьмя особыми точками:

$$y'' + \left(\frac{1}{2\xi} + \frac{1-\nu}{\xi-1} - \frac{1}{\xi-g} \right) y' + \frac{\nu(1+\nu)\xi-\lambda}{4\xi(\xi-1)(\xi-g)} y = 0 \quad (2.3)$$

При интегрировании уравнения (2.3) возникают трудности принципиального характера [2], которые обусловлены тем, что коэффициенты уравнения кроме неопределенной величины g содержат еще и так называемый аксессуарный параметр λ , также неизвестный заранее. Эти постоянные не определяются полностью положением особых точек уравнения и показателями в них и никакими общими методами для их нахождения до сих

пор не существует. В рассматриваемом случае, однако, вид дифференциального уравнения (2.3) позволяет прибегнуть к непосредственному интегрированию, причем в замкнутой форме через элементарные функции, и полностью определить все неизвестные константы.

Замена переменных $\xi = th^2 t$ переводит верхнюю полуплоскость в полуплоску t (фиг. 2,б), а (2.3) преобразуется при этом в следующее уравнение:

$$[(g-1)sh^2 t + g]ch^2 ty'' + [v(g-1)sh^2 t + 1 + vg]sh2ty' + + [(v^2 + v - \lambda)sh^2 t - \lambda]y = 0 \quad (2.4)$$

Будем искать два линейно независимых решения уравнения (2.4) в виде

$$y_1 = (A \operatorname{ch} t \operatorname{ch} vt + B \operatorname{sh} t \operatorname{sh} vt) \times \operatorname{ch}^{-(1+v)} t \quad (2.5)$$

$$y_2 = (A \operatorname{ch} t \operatorname{sh} vt + B \operatorname{sh} t \operatorname{ch} vt) \times \operatorname{ch}^{-(1+v)} t \quad (2.6)$$

где A и B — некоторые, не обращающиеся одновременно в нуль постоянные и такие, что $B/A \neq v$ и $-A/B \neq v$.

Если (2.5) и (2.6) подставить в уравнение (2.4) и в полученном выражении собрать члены при $\operatorname{ch} vt$ и $\operatorname{sh} vt$ и приравнять их нулю, то в обоих случаях придем к одной и той же системе линейных однородных алгебраических уравнений

$$[v(v-1)g - \lambda]A + 2vgB = 0 \\ 2vA + [(v^2 - v - 2)g + 2 - \lambda]B = 0 \quad (2.7)$$

Для того чтобы постоянные A и B были отличны от нуля, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был равен нулю. Это требование приводит к следующему уравнению между параметрами g и λ :

$$\lambda^2 - 2\lambda[1 + g(v^2 - v - 1)] + v(1 + v)g[(1 - v)(2 - v)g - 2] = 0 \quad (2.8)$$

которое совпадает с известным условием П. Я. Кочкиной [1, с. 255, (6.24)].

Так как решения уравнения (2.5) — (2.6) определяются с точностью до множителя, то один из коэффициентов A или B можно взять произвольным; при этом искомые параметры g и λ выражаются через отношение этих постоянных в виде

$$g = \frac{(v+C)C}{1+vC}, \quad \lambda = gv[2C - (1-v)], \quad C = \frac{B}{A} \quad (2.9)$$

На фиг. 2,в изображена область комплексной скорости $w = d\omega/dz$, которая представляет собой круговой четырехугольник с одним произвольным углом ν , двумя прямыми углами и разрезом при вершине G . Функция, конформно отображающая область w на область переменной t , имеет вид [5]

$$w = \frac{\gamma\rho(\operatorname{ch} t \operatorname{sh} vt + C \operatorname{sh} t \operatorname{ch} vt)}{\operatorname{ch} t(\operatorname{ch} vt + i\gamma \operatorname{sh} vt) + C \operatorname{sh} t(\operatorname{sh} vt + i\gamma \operatorname{ch} vt)} \quad (2.10)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{\varepsilon}{(\rho+1)(\rho-\varepsilon)}}, \quad C = \frac{\operatorname{ctg} \alpha(1-\gamma \operatorname{tg} \nu\alpha)}{\gamma + \operatorname{tg} \nu\alpha}$$

Здесь α — аффикс точки A на плоскости t . Случаям $-1/v < C < -1$ или $0 < C < 1$ соответствует разрез CGD [5]; если же $-1 < C < -v$ или $C > 1$, то имеем разрез BGC (штриховая линия на фиг. 2,в).

Отметим, что если исходить из формулы Лиувилля [2]

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{C_1 \exp\left(-\int p(\xi) d\xi\right)}{y_1^2}$$

где $p(\xi)$ — коэффициент при y' в уравнении (2.3), и использовать решение y_1 (2.5) и формулу (2.10), то снова придем к системе (2.7)

Принимая во внимание (2.10) и учитывая (2.2) и $\xi = th^2t$, найдем решение задачи в параметрическом виде

$$Z = \frac{A \operatorname{ch} t (\operatorname{ch} vt + i\gamma \operatorname{sh} vt) + C \operatorname{sh} t (\operatorname{sh} vt + i\gamma \operatorname{ch} vt)}{\gamma \rho \operatorname{ch} 2t - \cos 2\alpha} \quad (2.11)$$

$$\Omega = A \frac{\operatorname{ch} t \operatorname{sh} vt + C \operatorname{sh} t \operatorname{ch} vt}{\operatorname{ch} 2t - \cos 2\alpha} \quad (2.12)$$

$$A = 2Q\pi^{-1} \sin \alpha (\sin \nu \alpha + \gamma \cos \nu \alpha)$$

3. Анализ численных результатов. Запись представлений (2.11) — (2.12) для различных участков границ области t с последующим интегрированием приводит к параметрическим уравнениям граничных участков модели. Принимая в качестве контура оросителя линию равного напора, проходящую через верхнюю точку сечения оросителя M_0 , распространим полученные результаты на случай малого, близкого к полукругу поперечного сечения оросителя с диаметром D . В результате расчетные зависимости содержат три неизвестные постоянные A , α и аффикс точки M_0 на плоскости t . Для определения этих постоянных служат радиус оросителя $D/2$, напор на его контуре h_0 и глубина H_0 невозмущенного зеркала соленых грунтовых вод.

После нахождения параметров отображения определению подлежат расход Q из формулы (2.12), а затем ширина линзы L из $Q = 2\varepsilon L$ и ее толщина $T = H + H_1$, где H — максимальная высота кривой депрессии, H_1 — наибольшее расстояние границы раздела от уровня заложения оросителя. Приведем здесь параметрические уравнения двух искомых границ линзы.

Для свободной поверхности CD

$$x = \frac{A \cos(\pi\nu/2)}{\varepsilon} \int_0^t \frac{\operatorname{sh} t \operatorname{sh} vt + C \operatorname{ch} t \operatorname{ch} vt}{\operatorname{ch} 2t + \cos 2\alpha} dt$$

$$y = H - A \sin \frac{\pi\nu}{2} \int_0^t \frac{\operatorname{sh} t \operatorname{ch} vt + C \operatorname{ch} t \operatorname{sh} vt}{\operatorname{ch} 2t + \cos 2\alpha} dt \quad (0 \leq t < +\infty) \quad (3.1)$$

Для поверхности раздела BC

$$x = \frac{A}{\gamma \rho} \int_0^t \frac{\operatorname{ch} t \operatorname{ch} vt + C \operatorname{sh} t \operatorname{sh} vt}{\operatorname{ch} 2t - \cos 2\alpha} dt$$

$$y = -H_1 + \frac{A}{\rho} \int_0^t \frac{\operatorname{ch} t \operatorname{sh} vt + C \operatorname{sh} t \operatorname{ch} vt}{\operatorname{ch} 2t - \cos 2\alpha} dt \quad (0 \leq t < +\infty). \quad (3.2)$$

На фиг. 1 изображена линза, рассчитанная при $\varepsilon = 0,01$; $\rho = 0,1$; $D = 0,3$; $h_0 = 0,4$ и $H_0 = 1,0$. В табл. 1 и 2 сведены результаты расчетов размеров линз $2L$ и T при некоторых значениях ε , ρ , D и h_0 . В каждом из разделов таблиц изменению подвергается один из указанных параметров, а остальные фиксируются при тех же значениях, что и на фиг. 1. В табл. 1, кроме того, фигурируют величины $\mu = H_1/H$ и $\delta = T/2L$. Первая из указанных величин позволяет оценить степень отжима соленых вод пресными; вторая отражает форму линзы: при изменении ε величина δ характеризует степень вытянутости линзы, при фиксировании ε — степень ее сжатия. Результаты таблиц позволяют сделать некоторые заключения о влиянии физических параметров на форму и размеры линз.

Таблица 1

ε	$2L$	T	μ	δ	ρ	$2L$	T	μ	δ
0,0001	8496,7	139,5	11,3	0,016	0,02	175,3	50,7	21,5	0,289
0,001	1096,9	55,7	8,9	0,051	0,03	170,5	41,9	16,9	0,246
0,005	274,7	30,1	7,9	0,109	0,05	163,7	32,7	12,2	0,200
0,01	152,4	23,0	7,4	0,151	0,1	152,4	23,0	7,4	0,151
0,05	38,6	11,9	6,1	0,308	0,2	140,1	16,1	4,3	0,115

Таблица 2

D	$2L$	T	h_0	$2L$	T
0,05	86,6	13,1	0,1	68,7	10,4
0,1	105,5	15,9	0,2	99,9	15,1
0,2	131,8	19,9	0,3	126,8	19,1
0,3	152,4	23,0	0,4	152,4	23,0
0,4	169,0	25,5	0,6	197,8	29,9

Из табл. 1 следует, что при убывании ε линза увеличивается в размерах, главным образом вширь, так как величина L возрастает пропорционально $1/\varepsilon$. Кроме того, можно заметить, что величина δ уменьшается почти в 19 раз. Толщина линзы также значительно возрастает, причем величина H_1 может превышать H более чем в 11 раз.

С уменьшением ρ , т. е. с ослаблением подпора со стороны соленых вод, наблюдается существенный рост толщины линзы и теперь она в основном углубляется; величина μ при этом возрастает более чем в 5 раз.

Любопытно отметить, что при одинаковых значениях ρ/ε величина δ практически не изменяется, т. е. уменьшение параметров ε и ρ в одинаковое число раз влечет равномерное увеличение размеров линзы. Например, для $\rho/\varepsilon=10$ $0,141 < \delta < 0,151$.

Таким образом, в отношении влияния параметров ε и ρ видим некоторое сходство с линзами в зоне каналов, описанными в [6].

Представленные в табл. 2 расчеты по изучению влияния на форму и размеры линз диаметра D и величины напора h_0 показывают, что зависимость величин $2L$ и T является прямо пропорциональной. Интересно отметить, что величины μ и δ здесь также практически не изменяются и равны соответственно 7,40 и 0,151.

Авторы глубоко благодарят В. М. Ентова и А. Р. Цицкишвили за советы и замечания, способствовавшие улучшению работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
2. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
3. Ризенкампф Б. К. Гидравлика грунтовых вод // Уч. зап. Сарат. ун-та. 1940. Т. 15. Вып. 5. С. 3–93.
4. Калинин Н. К. К методу П. Я. Полубариновой-Кочиной решения задач на движение грунтовых вод // Докл. АН СССР. 1944. Т. 45. № 3. С. 110–113.
5. Береславский Э. Н. Об одном случае конформного отображения круговых четырехугольников с разрезом // Изв. вузов. Математика. 1987. № 4. С. 11–12.
6. Эмих В. Н. О форме линзы пресных вод при фильтрации из канала // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 2. С. 115–119.

Ленинград

Поступила в редакцию
17.VI.1988