МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1990

УДК 532.59.013.2:517.955.8

В. А. БОРОВИКОВ

ФОРМИРОВАНИЕ КРИТИЧЕСКОГО СЛОЯ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ СО СРЕДНИМИ ТЕЧЕНИЯМИ

Рассматривается задача о возбуждении в стратифицированной среде со средними сдвиговыми течениями внутренних волн с заданными волновым числом k и частотой ω. Установившееся при $t\to\infty$ в среде без диссипации поле внутренних волн вида $v(z)\exp(-i\omega t+ikx)$ имеет особую точку на горизонте $z=z_0$ (критическом уровне), на котором скорость течения $U(z)$ совпадает с фазовой скоростью ω/k. Диссипативные эффекты (вязкость и теплопроводность) сглаживают эту особенность. В работе строится точное решение модельного уравнения, описывающего при $t\to\infty$ и $z\to z_0$ поле, возбуждаемое включенными при $t=0$ осциллирующими источниками, с учетом диссипации. Это позволило описать предельное установившееся поле, определить критический слой как окрестность критического уровня, в которой существенны эффекты диссипации, и оценить его ширину и скорость сходимости к предельному установившемуся режиму. Рассмотрена асимптотика выписанных полей при $\mathrm{Ri}\gg1$, где Ri – число Ричардсона. Показано, что при выполнении известного условия устойчивости Майлса $\mathrm{Ri}>{}^1/_4$ не существует собственных колебаний с критическим уровнем.

1. Постановка задачи. Распространяющаяся в стратифицированной среде со средними сдвиговыми течениями внутренняя бегущая волна

$$w(t,x,z)=v(z)\exp i(kx-\omega t) \tag{1.1}$$

имеет на горизонте $z=z_0$, на котором фазовая скорость ω/k совпадает со скоростью течения $U(z)$, особую точку – точку ветвления [1–3]. Действительно, если подставить (1.1) в уравнение внутренних волн

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2(w_{xx}''+w_{yy}'')-\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)U_{zz}''w_x'+N^2w_{xx}''=0 \tag{1.2}$$

где w – вертикальная скорость, $U=U(z)$ – скорость течения, $N=N(z)$ – частота Брента – Вяйсяля, то получим для $v(z)$ уравнение Тейлора – Гольштейна

$$(\omega-kU)^2v''+\{k^2[N^2-(\omega-kU)^2]+kU''(\omega-kU)\}v=0 \tag{1.3}$$

где коэффициент при v'' обращается в нуль при $z=z_0$.

Далее уравнения (1.2)–(1.3) будем рассматривать в слое $-H<z<0$ с нулевыми граничными условиями при $z=0$, предполагая, что выполнено условие устойчивости Майлса

$$\mathrm{Ri}(z)=N^2(z)[U_z'(z)]^{-2}>{}^1/_4 \tag{1.4}$$

обеспечивающее отсутствие экспоненциально нарастающих собственных колебаний. Из принципа предельного поглощения следует [2], что решение $v(z,\omega)$ уравнения (1.3) должно допускать аналитическое продолжение в область $\mathrm{Im}\,\omega>0$, что дает правило обхода особой точки $z=z_0$ при интегрировании (1.3).

В реальных задачах не могут возникать поля с особыми точками и обращающимися в этих точках в бесконечность вертикальными градиентами. Нелинейные и диссипативные эффекты, а также нестационарность поля, т. е. его отличие от бегущей волны (1.1), вызывают «размывание» особенностей и формирование в окрестности критического уровня (т. е.

горизонта $z=z_0$) переходной зоны (критического слоя), в которой вертикальные градиенты поля хотя и велики, но конечны. Основной целью настоящей работы является построение поля в этой зоне, а также оценка времени ее формирования при учете диссипации, но в линейном приближении.

Показано, что если выполнено условие (1.4), то не существует собственных колебаний с критическим уровнем (в [2] это утверждение было доказано для строго монотонной $U(z)$). Этот факт имеет простую физическую интерпретацию: при $\operatorname{Im}\omega=0$ волновая энергия свободного колебания должна сохраняться, а при наличии критического уровня часть энергии поля внутренних волн поглощается, переходя в энергию средних течений (см., например, [1, разд. 4.1]). Поэтому критические слои могут возникать лишь для вынужденных колебаний с заданными $\omega=\omega_0$ и k.

Следуя [3, 4], будем рассматривать поля, возбуждаемые начавшимися при $t=0$ колебаниями дна в форме бегущей волны, т. е. решение $w(t, x, z)$ уравнения (1.2), удовлетворяющее условиям

$$w\equiv 0 \quad (t<0); \quad w(t, x, 0)=0; \quad w(t, x, -H)= \\ =\exp i(kx-\omega_0 t), \quad t>0 \tag{1.5}$$

Можно ожидать, что при $t\to\infty$ поле w стремится к функции вида (1.1), где $v(z)$ имеет точку ветвления на критическом уровне $z=z_0$.

Эта задача была рассмотрена в [3] для постоянного N и линейной $U(z)$. Было показано, что ее решение при $t\to\infty$ стремится к пределу вида (1.1) равномерно по z вне переходной зоны — окрестности критического уровня, размер которой стремится к нулю при $t\to\infty$ как t^{-1}. В [4] было найдено поле в переходной зоне, что позволило оценить размер этой зоны в зависимости от параметров задачи и найти асимптотику поля при $\mathrm{Ri}\gg 1$, когда существенно поглощение энергии поля в критическом слое.

В [3, 4] рассматривалась идеальная жидкость без диссипации. Учет диссипативных эффектов приводит в окрестности критического уровня к модельному уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+ik\zeta U'-K\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+ik\zeta U'-\nu\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta^2}-k^2N^2w=0 \tag{1.6}$$

где $N=N(z_0)$, $U'=U_z'(z_0)$; K, ν — коэффициенты теплопроводности и вязкости. Установившееся при $t\to\infty$ решение этого уравнения, переходящее при $K, \nu\to 0$ (или $|\zeta|\to\infty$) в известное [3, 4] решение без диссипации, отыскивалось в [5, 8] численно для нескольких значений $p=\nu/K$ и Ri ($1<p<7$; $0{,}2501\leqslant\mathrm{Ri}\leqslant 4$). Ниже будет найдено точное аналитическое решение (1.6). Это позволит оценить скорость сходимости поля к предельному при $t\to\infty$, определить размеры критического слоя (т. е. окрестности критического уровня, в которой существенны эффекты диссипации), а также найти асимптотику как установившегося поля, так и переходного режима при $\mathrm{Ri}\gg 1$, когда возникают существенно новые качественные эффекты. В частности, будет показано, что в типичных для шельфа условиях формирование критического слоя требует нереально большого числа чисто гармонических колебаний.

Критические слои могут также возникать при наличии подветренных волн. Рассмотрим поток жидкости, набегающей на какое-либо препятствие, например на уступ или локальное возвышение. За этим препятствием может возникнуть уходящая от него волна и если набегающая жидкость стратифицирована, то эта волна может возбуждать внутренние волны.

Соответствующая граничная задача для уравнения (1.2) имеет вид

$$w(t, x, 0)\equiv 0; \quad w(t, x, -H)=0, \quad x<0 \\ w(t, x, -H)=\exp i(k_0x-\omega_0 t), \quad x>0 \tag{1.7}$$

Отыскивается решение, гармонически зависящее от времени и удовлетворяющее условию излучения [7]. Здесь критический слой формируется при удалении от препятствия, т. е. при $x \to \infty$. В этой задаче также будут учтены диссипативные эффекты и оценена скорость сходимости к пределу при $x \to \infty$.

Однако постановка граничной задачи (1.2), (1.7) не всегда корректна. Пусть колебания границы (1.7) включаются при $t=0$. Тогда волновое поле стремится при $t \to \infty$ к гармонически зависящему от t решению задачи (1.2), (1.7), лишь если выполнено дополнительное условие (назовем его условием A): требуется, чтобы не существовало собственной волны, которая при заданном $\omega=\omega_0$ имеет равную нулю групповую скорость. Будет показано, что если это условие не выполнено, то поле, возбуждаемое включенными при $t=0$ колебаниями границы, содержит компоненту, растущую при $t \to \infty$ как $\sqrt{t}$.

2. Решение задачи (1.2), (1.5) и его асимптотика при $t \to \infty$. Будем искать решение $w(t, x, z)$ уравнения (1.2) с граничными и начальными условиями (1.5) в форме $w=u(t, z)\exp ikx$. Тогда для $u(t, z)$ получим краевую задачу ($U=U(z)$; $N=N(z)$)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+ikU\right)^2[-k^2u+u_{zz}]-ik\left(\frac{\partial}{\partial t}+ikU\right)U''u-k^2N^2u=0 \tag{2.1}$$

$$u\equiv 0 \quad (t<0); \quad u(t,0)=0; \quad u(t,-H)=$$
$$=\exp(-i\omega_0 t), \quad t>0$$

Прямая выкладка показывает, что решение этой задачи имеет при $t>0$ вид

$$u(t,z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\omega|=R}\frac{\exp(-i\omega t)\,v(\omega,z)\,d\omega}{(\omega-\omega_0)\,v(\omega,-H)} \tag{2.2}$$

где окружность $|\omega|=R$ охватывает все нули знаменателя. Здесь $v(\omega, z)$ — решение уравнения (1.3), удовлетворяющее граничным условиям $v(\omega, 0)=0$; $v_z'(\omega, 0)=1$. Эта функция — аналитическая функция ω с разрезом на интервале I_k: $(k\min\limits_z U,\ k\max\limits_z U)$. Все нули ω_n функции $v(\omega, -H)$ (т. е. собственные числа спектральной задачи (1.3) с нулевыми граничными условиями) просты, находятся на вещественной оси вне I_k и образуют две бесконечные серии, стремящиеся к концам I_k (см. [9]).

Представим интеграл (2.2) в виде суммы вычетов в нулях ω_n функции $v(\omega, -H)$ и интеграла по охватывающему I_k контуру L

$$u(t,z)=\sum_n\frac{\varphi_n(z)\exp(-i\omega_n t)}{d_n(\omega_n-\omega_0)}+u^*(t,z)$$

$$u^*(t,z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\exp(-i\omega t)\,\xi(\omega,z)\frac{d\omega}{\omega-\omega_0}; \qquad \xi(\omega,z)=\frac{v(\omega,z)}{v(\omega,-H)} \tag{2.3}$$

Каждое слагаемое суммы в (2.3) — это собственная функция $\varphi_n=v(\omega_n, z)$, осциллирующая со своей частотой ω_n и амплитудой, пропорциональной резонансному множителю $(\omega_n-\omega_0)^{-1}$; $d_n=\partial v(\omega_n, -H)/\partial\omega$. Решение (2.3) — сумма таких собственных колебаний и интеграла u^* по непрерывному спектру I_k. Поэтому задача сводится к вычислению асимптотики этого интеграла при $t \to \infty$.

Функция $\xi(\omega, z)$ в интеграле (2.3) — решение уравнения (1.3), аналитическое по ω в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\omega>0$ и имеющее [2], как функция ω при фиксированном z, точку ветвления при $\omega=\omega_1=kU(z)$

$$\xi \sim A_+(\omega-\omega_1)^{1/2+i\mu}+A_-(\omega-\omega_1)^{1/2-i\mu}, \qquad \mu=\sqrt{Ri-1/4}$$

Если $z \neq z_0$, то $\omega_1 \neq \omega_0$. Переводя интегрирование на контур L_1, обходящий снизу полюс $\omega=\omega_0$, и оценивая интеграл по L_1 при $t \to \infty$, получим

$$u^*(t, z)=e^{-i\omega_0}\xi(\omega_0, z)+\delta(t); \qquad \delta(t)=O(t^{-1/2}) \tag{2.4}$$

При $t \to \infty$ функция $u(t, z)$ стремится к сумме собственных колебаний и вынужденного колебания $\exp(-i\omega_0 t)\xi(\omega_0, z)$.

Асимптотика (2.4) неравномерна; она неприменима, когда z стремится к z_0, т. е. точка ветвления ω_1 стремится к полюсу ω_0. Модельным интегралом в этой ситуации является выражение, полученное из (2.3) заменой $\xi(\omega, z)$ на $(\omega-\omega_1)^{1/2 \pm i\mu}$, а контура интегрирования — на вещественную ось

$$I(t, \omega_1, \omega_0)=\frac{-1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}(\omega-\omega_1)^{\lambda}\frac{d\omega}{\omega-\omega_0}; \qquad \lambda=\frac{1}{2}\pm i\mu$$

где особые точки обходятся в верхней полуплоскости. Интеграл I выражается через неполную гамма-функцию $\Phi(t, \omega_1-\omega_0, \lambda)$, для которой можно выписать два эквивалентных выражения:

$$\Phi(t, \zeta, \lambda)=-\frac{e^{-\pi i\lambda/2}}{\Gamma(-\lambda)}\int_t^{\infty} e^{-i\tau\zeta}\tau^{-\lambda-1}\,d\tau+\begin{cases} |\zeta|^{\lambda}, & \zeta>0 \\ e^{-\pi i\lambda}|\zeta|^{\lambda}, & \zeta<0 \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\Phi(t, \zeta, \lambda)=\frac{e^{-\pi i\lambda/2}}{\Gamma(-\lambda)}\int_0^{t} e^{-i\tau\zeta}\tau^{-\lambda-1}\,d\tau \tag{2.6}$$

Поскольку $\omega_1(z)-\omega_0=k[U(z)-U(z_0)] \sim kU_z'(z-z_0)$, то равномерная асимптотика u^*, при $t \to \infty$ и малых $z-z_0$ выражается через $\Phi(t, kU'(z-z_0), \lambda)$. Приведем соответствующие формулы. Пусть сперва $kU'>0$. Тогда установившееся решение $\exp(-i\omega_0 t)\xi(z)$ аналитично в нижней полуплоскости $\mathrm{Im}\, z<0$ и его главную часть при $z \sim z_0$ можно записать в виде [2]

$$\begin{gathered} \xi \approx A_+\xi_+(z-z_0)+A_-\xi_-(z-z_0) \\ \eta>0{:}\ \ \xi_+(\eta)=\eta^{1/2-i\mu};\ \ \xi_-(\eta)=ie^{-\pi\mu}\eta^{1/2+i\mu} \\ \eta<0{:}\ \ \xi_+(\eta)=-ie^{-\pi\mu}|\eta|^{1/2-i\mu};\ \ \xi_-(\eta)=|\eta|^{1/2+i\mu} \end{gathered} \tag{2.7}$$

Функция ξ_+ представляет собой волну, падающую на критический слой сверху, со стороны $\eta>0$; ξ_- — волну, падающую снизу. Каждая из этих волн, проходя через критическое сечение, убывает по амплитуде в $\exp(\pi\mu)$ раз, отдавая часть энергии средним течениям.

Предельному решению (2.7) соответствует поле

$$\begin{gathered} u^*=\exp(-i\omega_0 t)v^* \\ v^*(t, z)=(kU')^{-1/2+i\mu}A_+\Phi(t, kU'(z-z_0), \\ 1/2-i\mu)+(kU')^{-1/2-i\mu}A_-\Phi(t, kU'(z-z_0), \quad 1/2+i\mu) \end{gathered} \tag{2.8}$$

Как видно из (2.5), при $t \to \infty$ это поле переходит в $\xi(z)\exp(-i\omega_0 t)$. Формула (2.8) была получена в [4]; данный вывод проще, чем в [4], и не предполагает, что $\mathrm{Ri} \gg 1$.

Оценим характер сходимости функции Φ к пределу ξ_+. Для этого следует оценить интеграл в (2.5). Здесь надо рассмотреть два случая.

При $\mathrm{Ri} \sim 1$, т. е. $\mu \sim 1$, интеграл в (2.5) оценивается интегрированием по частям и для отношения δ первого члена в (2.5) ко второму имеем.

$$\delta \leqslant A\frac{\sqrt{\mathrm{Ri}}}{\sqrt{\pi}|t\zeta|^{3/2}}\left(1+O\left(\frac{\mu}{|\zeta|}\right)\right) \tag{2.9}$$

где $A=1$ при $\zeta>0$ и $A=\exp(\pi\mu)$ при $\zeta<0$.

В случае $\mu \gg 1$ (см. [4]) падающая волна, проходя через критический уровень, экспоненциально затухает. Под знаком интеграла в (2.6) оказывается быстро осциллирующая функция и асимптотика Φ при $\mu \gg 1$ зависит от того, попадает ли стационарная точка $\tau = \zeta/\mu$ этой функции в область интегрирования. Полагая для простоты в (2.7) $A_+ = 1$, $A_- = 0$, получаем асимптотику

$$v^* \approx \eta^\lambda \chi + \frac{\exp(-\pi i/4 + i\mu)\mu^{-i\mu}(kU't)^{-\lambda}\exp(-ikU't\eta)}{\sqrt{2\pi}(1-kU't\eta/\mu)}$$

где $\chi = 1$ при $kU't\eta > \mu$ и $\chi = 0$ при $kU't\eta < \mu$. В окрестности значения $t = \mu(kU_\eta')^{-1}$ поперечником $\sqrt{\mu}$ эта асимптотика неприменима и v^* выражается через интеграл Френеля.

Из выписанной асимптотики видно, что v^* при $kU't\eta < \mu$ относительно мала и убывает с ростом t как $t^{-1/2}$. В окрестности значения $t = \mu/(kU'\eta)$ поперечником порядка $\sqrt{\mu}$ эта функция быстро возрастает до значения, близкого к $\eta^{1/2 - i\mu}$, и далее приближается к этому предельному значению, имея погрешность порядка $t^{-3/2}$. Можно сказать, что v^* имеет приближающийся к критическому уровню фронт $\eta = \mu/(kU't)$.

При $\eta < 0$ предельное значение $i|\eta|^\lambda \exp(-\pi\mu)$ функции v^* экспоненциально мало по μ, а поправка к нему убывает при $t \to \infty$ как $\mu t^{-3/2}$. Чтобы поле стало относительно близко к предельному значению, здесь требуется экспоненциально большое время порядка $2\exp \pi\mu/3$.

Случай $kU' < 0$ приводится к рассмотренному случаю $kU' > 0$ заменой η на $-\eta$.

3. Учет вязкости и теплопроводности. При увеличении t вертикальные градиенты поля растут и становится существенной диссипация. Чтобы ее учесть, выпишем точное решение соответствующего модельного уравнения.

Исходная система уравнений (см. [8, формулы (1)–(4)]) стандартным образом приводится к одному уравнению для вертикальной скорости. Полагая $w = \exp(ikx - i\omega_0 t)v(t, z)$ и отбрасывая в уравнении для v члены, относительно малые при больших t и малых $z - z_0$, придем к уравнению (1.6), отличающемуся от аналогичных уравнений в [5, 8], описывающих стационарное поле, наличием слагаемых $\partial/\partial t$.

Функция $(kU')^\lambda \Phi(t, kU'(z-z_0), \lambda)$ — точное решение этого уравнения при $K = \nu = 0$, стремящееся при $t \to \infty$ к $(z-z_0)^\lambda$. Поэтому будем искать решение уравнения (1.6), переходящее в эту функцию при K, $\nu \to 0$.

В безразмерных переменных [10] ζ и θ уравнение (1.6) примет вид

$$z - z_0 = Z_\nu \zeta; \qquad Z_\nu = (\nu/kU')^{1/3}; \qquad \theta = kU'Z_\nu t$$

$$\left[-i\frac{\partial}{\partial\theta} + \zeta + iq\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right]\left[-i\frac{\partial}{\partial\theta} + \zeta + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right]\frac{\partial^2 v}{\partial\zeta^2} + \mathrm{Ri}\cdot v = 0 \qquad (1.3)$$

$$q = K/\nu; \qquad \mathrm{Ri} = N^2(U')^{-2}$$

Прямая выкладка показывает, что искомое решение имеет вид

$$v(\theta, \zeta) = \frac{Z_\nu^\lambda e^{-\pi i\lambda/2}}{\Gamma(-\lambda)}\int_0^\theta e^{-i\tau\zeta}\tau^{-\lambda-1}e^{-1/3 q\tau^3} M\left(1 - \frac{\lambda}{3}, \frac{4-2\lambda}{3}, \frac{\tau^3(q-1)}{3}\right)d\tau \qquad (3.2)$$

где $M(a, b, \xi)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Установившееся при $t \to \infty$ поле, для которого в [5, 8] отыскивалось численное решение, это предел $v(\zeta)$ интеграла (3.2) при $\theta \to \infty$.

Вычисляя асимптотику $v(\zeta)$ при $|\zeta| \to \infty$, получим

$$v(\zeta) = Z_\nu^\lambda \zeta^\lambda (1 + ih\zeta^{-3} + O(\zeta^{-6})), \qquad \zeta > 0 \qquad (3.3)$$

$$v(\zeta) = Z_\nu^\lambda |\zeta|^\lambda e^{-\pi i\lambda}(1 + ih|\zeta|^{-3} + O(|\zeta|^{-6})), \qquad \zeta < 0$$

$$h = {}^1/_6\lambda(\lambda - 1)[(\lambda - 3) + q(\lambda - 1)]$$

Из этих оценок видно, что при $|\zeta|\to\infty$ роль диссипации исчезает и $v(\zeta)$ стремится к $\xi_+(z-z_0)$. Переходную зону (критический слой) можно определить как окрестность критического уровня, в которой нельзя отбросить второй член в (3.3), например условием $|\zeta|<2|h|^{1/3}<2\mu+1$, т. е.

$$|z-z_0|<(2\mu+1)Z_\nu \tag{3.4}$$

В окрестности значения $\zeta=0$ функция $v(\zeta)$ является при $q\neq0$, т. е. при $K\neq0$, аналитической функцией ζ. Если $q=0$, то $v(\zeta)$ имеет при $\zeta=0$ логарифмическую особенность: $v(\zeta)=F_1(\zeta)+\zeta^3\ln|\zeta|F_2(\zeta)$, где $F_1(\zeta)$ и $F_2(\zeta)$ — аналитические функции ζ.

Укажем асимптотику $v(\zeta)$ при $\mu\gg1$. Если $|\zeta|\gg\mu^{2/3}$ (практически достаточно полагать $|\zeta|\geqslant5\mu^{2/3}$), то

$$\begin{aligned} v(\zeta)&\approx Z_\nu^\lambda\zeta^\lambda\exp\left(-\frac{(q+1)\mu^3}{6\zeta^3}\right), \qquad \zeta>0\\ v(\zeta)&\approx iZ_\nu^\lambda|\zeta|^\lambda\exp\left(\frac{(q+1)\mu^3}{6|\zeta|^3}\right), \qquad \zeta<0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

При $|\zeta|>2\mu$ экспоненту в (3.5) можно отбросить.

Диссипация приводит в интервале $5\mu^{2/3}<|\zeta|<2\mu$ к появлению дополнительного экспоненциального множителя, меньшего единицы при $\zeta>0$ и большего единицы при $\zeta<0$. Этот множитель описывает обусловленный вязкостью и теплопроводностью дополнительный перенос энергии из области $z>z_0$, откуда пришла первичная волна, в область $z<z_0$.

Вертикальной скорости (3.5) соответствует горизонтальная скорость

$$\begin{aligned} u(\zeta)&=\frac{i\lambda}{k}Z_\nu^{\lambda-1}\zeta^{\lambda-1}\exp\left(-\frac{(q+1)\mu^3}{6\zeta^3}\right), \qquad \zeta>0\\ u(\zeta)&=\frac{-i\lambda}{k}Z_\nu^{\lambda-1}|\zeta|^{\lambda-1}e^{-\pi i\lambda}\exp\left(\frac{(q+1)\mu^3}{6|\zeta|^3}\right), \qquad \zeta<0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Функция $|u(\zeta)|$ принимает максимальное значение

$$|u|_{\max}=e^{-1/6}\frac{|\lambda|}{k}|Z_\nu\mu|^{-1/2}(q+1)^{-1/6} \qquad (\zeta=\mu(q+1)^{1/3})$$

При отсутствии диссипации $u(\zeta)$ стремится к бесконечности при $\zeta\to0$ как $|\zeta|^{-1/2}$.

При $\zeta<5\mu^{2/3}$ функции $v(\zeta)$, $u(\zeta)$ экспоненциально малы. В частности, при $\zeta=0$

$$\begin{aligned} &|v(0)|\approx\mu^{1/3}\sqrt{Z_\nu/3q^{1/4}}\,e^{-\pi\mu/6}; \qquad |u(0)|\approx\frac{\mu^{2/3}}{k\sqrt{3Z_\nu}}q^{1/12}e^{-\pi\mu/6}, \qquad q\neq0\\ &|v(0)|\approx\mu^{-1/6}\sqrt{\frac{Z_\nu}{\pi}}\,e^{-\pi\mu/6}; \qquad |u(0)|\approx\frac{\Gamma(2/3)}{k3^{1/3}}\left[\frac{\mu}{\pi Z_\nu}\right]^{1/2}e^{-\pi\mu/6}, \qquad q=0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Положим $\zeta=c\mu^{2/3}$. Тогда при $0<c<5$

$$\begin{aligned} |v(\zeta)|&\approx\mu^{1/3}A_v(c,\,q)\,e^{-\mu B(c,\,q)}; \qquad |u(\zeta)|\approx\\ &\approx\mu^{2/3}A_u(c,\,q)\,e^{-\mu B(c,\,q)} \end{aligned} \tag{3.8}$$

где вычисление функций A_v, A_u, B сводится к решению трансцендентных уравнений. При $c\to\infty$ формула (3.8) переходит в (3.5), (3.6), т. е. $B\to\to(q+1)/6c^3$; $A_v\to(cZ_\nu)^{1/2}$, $A_u\to(k\sqrt{cZ_\nu})^{-1}$. При $q=1$ функции A_u, A_v, B можно приближенно описать выражениями

$$B\approx[3c^3-1{,}3c^2+2{,}5c+6/\pi]^{-1}$$

$$A_v\approx(c^2+9)^{1/4}\sqrt{Z_\nu}; \qquad A_u\approx(c^2-3c+9)^{-1/4}(k\sqrt{Z_\nu})^{-1} \tag{3.9}$$

4. Оценки переходного процесса. Оценим время θ, необходимое для того, чтобы поле $v(\theta, \zeta)$ было близко к своему стационарному пределу $v(\zeta)$. Очевидно

$$\delta v = v(\zeta) - v(\theta,\zeta) = \frac{Z_\nu^\lambda e^{-\pi i\lambda/2}}{\Gamma(-\lambda)} \int\limits_\theta^\infty e^{-i\tau\zeta - q\tau^3/3}\tau^{-\lambda-1} \times$$

$$\times M\left(1-\frac{\lambda}{3}, \frac{4-2\lambda}{3}, \frac{\tau^3(q-1)}{3}\right) d\tau \qquad (4.1)$$

Пусть сперва $\mu\sim 1$, $q=0$. Заменяя в (4.1) функцию M ее асимптотикой при $\tau^3/3 \gg 1$, получим

$$|\delta v| \leqslant C Z_\nu^\lambda \theta^{-3} |3+i\theta\zeta|^{-1} \qquad (4.2)$$

где $C=O(1)$. Отсюда $\delta = |\delta v/v| < C\theta^{-3}$. При $\zeta \geqslant 2\mu+1$ из (4.1) следует более сильная оценка: $\delta < C\zeta^{-4/3}\theta^{-4}$. Из этих оценок видно, что для установления стационарного режима с достаточной точностью требуется время порядка $\theta\sim 2$, т. е.

$$t \sim 2[(kU')^2\nu]^{-1/3} \qquad (4.3)$$

С ростом t погрешность δ быстро убывает.

Оценим время t, необходимое для установления стационарного поля в типичных для шельфа условиях. Положим $k=0{,}02$ (т. е. длина внутренней волны $\lambda=314$ м), глубину шельфа примем $H=100$ м; $U(-H)=0$; $U(0)=1$ м/с, откуда $U_z'=10^{-2}$ с$^{-1}$, возьмем кинематическую вязкость $\nu=10$ м^2/с. Тогда из (4.3) получаем, что для выхода на стационарный режим требуется нереально большое время $t\sim 16$ ч чисто гармонических колебаний.

Сравнивая (4.2) с (2.9), видим, что диссипация, которая при $\zeta\geqslant 2\mu+1$ не сказывается на предельных значениях поля, существенно ускоряет сходимость к предельным значениям. Этот эффект оказывается более сильным при $q\neq 0$, т. е. при наличии теплопроводности, когда интеграл (4.1) экспоненциально убывает с ростом θ.

Например, при $q=1$ справедлива оценка

$$|\delta v| \leqslant \frac{\theta^{-1/2}\exp(-{}^1/_3\theta^3)}{|i\theta\zeta+\lambda+\theta|^3} \qquad (4.4)$$

Для достижения удовлетворительной относительной погрешности здесь достаточно время $\theta\sim 1$. Для взятых из [8] типичных для атмосферы условий ($k=4\cdot 10^{-4}$ м$^{-1}$, $U_z'=0{,}024$ с$^{-1}$, $\gamma=6{,}5$ м^2/с) времени $\theta\sim 1$ соответствует $t\sim 20$ мин.

Рассмотрим теперь случай $\mu\gg 1$. Положим $c=\tau^3(1-q)/2\mu$. Тогда функция M из (3.2) имеет асимптотику

$$M \approx Q(1+\sqrt{1-c^2})^{-i\mu/3}(1-c^2)^{-1/4}\exp{}^1/_3(i\mu\sqrt{1-c^2}-$$

$$-i\,\mathrm{arctg}(\sqrt{1-c^2})/c - c\mu), \quad c<1 \qquad (4.5)$$

$$M\approx Q(c+\sqrt{c^2-1})^{-1/3}(c^2-1)^{-1/4}\exp(-{}^1/_3\mu(\mathrm{arctg}\sqrt{c^2-1}+$$

$$+c-\sqrt{c^2-1})+{}^1/_4\pi i), \qquad c>1$$

$$Q=2^{i\mu/3}\exp({}^1/_6 i(\pi-2\mu))$$

Эта асимптотика неприменима в окрестности значения $c=1$, где M выражается через функцию Эйри.

Используя это выражение, получаем при $\theta^3(1-q)<2\mu$ оценку

$$|\delta v| \leqslant 2\mu^{1/3}\sqrt{Z_\nu}\,\theta^{-7/2}\exp(-{}^1/_6\theta^3(q+1)) \qquad (4.6)$$

При $\theta\sim\mu^{1/3}$ это выражение экспоненциально мало. При дальнейшем росте θ, т. е. при $c=\theta^3(1-q)/2\mu>1$

$$|\delta v|\leqslant 2\mu^{3/2}\sqrt{Z_\nu}\,\theta^{-7/2}c^{-5/3}\exp[-{}^1/_3(q\theta^3+\mu f(c))]$$

$$f(c)=\operatorname{arctg}\sqrt{c^2-1}+c-\sqrt{c^2-1} \tag{4.7}$$

Из этих оценок видно, что за время формирования критического слоя при $\mu\gg 1$ можно принять величину $\theta\sim\mu^{1/3}$. При ограниченных μ требуется, как было показано выше, время $\theta\sim 2$. Поэтому величину $\theta\sim 2(\mu^2+1)^{1/6}\sim$ $\sim 2(\mathrm{Ri}+1)^{1/6}$ можно принять за оценку времени формирования критического слоя, применимую при любых числах Ri. Этому значению θ соответствует

$$t\sim 2(kU')^{-2/3}\nu^{-1/3}(\mathrm{Ri}+1)^{1/6} \tag{4.8}$$

5. Задача о подветренных волнах. Рассмотрим гармонически зависящее от времени решение $w(t, x, z)$ уравнения (1.2) с граничным условием (1.7). Здесь критический слой формируется при $x\to\infty$. Единственность решения обеспечивается условием излучения [7], согласно которому полагают $\omega_0=\omega_r+i\omega_i$, а затем переходят к пределу при $\omega_i\to+0$. Построим решение этой задачи и найдем его асимптотику при $x\to\infty$ и $z\sim z_0$. Затем проведем учет вязкости и теплопроводности. Это позволит оценить дистанцию x, необходимую для формирования критического слоя.

Будем предполагать выполненным условие A: необходимо, чтобы значение $\omega=\omega_0$ не было стационарным ни для одной из дисперсионных кривых $\omega=\omega_n(k)$. Роль этого условия анализируется в разд. 6, в котором рассматривается задача на установление: колебания границы (1.7) включаются при $t=0$ и отыскивается предел поля при $t\to\infty$. Будет показано, что если условие A выполнено, то предел существует и совпадает с удовлетворяющим условию излучения решением задачи (1.2), (1.7). В противном случае поле при $t\to\infty$ растет, и будет найдена его растущая компонента.

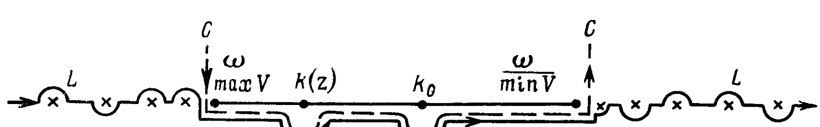
Для простоты изложения будем полагать, что $U(z)>0$ при всех z.

Прямая выкладка показывает, что удовлетворяющее условию излучения и граничным условиям (1.7) решение уравнения (1.2) имеет вид

$$w=-\frac{\exp(-i\omega_0 t)}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(k,\omega_0+i\varepsilon,z)}{v(k,\omega_0+i\varepsilon,-H)}e^{ikx}\frac{dk}{k-k_0} \tag{5.1}$$

где полюс $k=k_0$ обходится в нижней полуплоскости, а $v(k, \omega, z)$ — решение уравнения (1.4), обращающееся в нуль при $z=0$.

Вещественные нули $k_n(\omega_0)$ функции $v(k, \omega_0, -H)$ сдвигаются при замене ω_0 на $\omega_0+i\varepsilon$ в верхнюю или нижнюю полуплоскость k в зависимости от знака $\partial k/\partial\omega$, т. е. от знака групповой скорости $\partial\omega/\partial k$ соответствующей моды. Это дает правило обхода нулей знаменателя в (5.1) (контур L на фигуре).



Найдем асимптотику этого интеграла при $x\to-\infty$. Сдвинем контур интегрирования в нижнюю полуплоскость. При этом придется пересечь те из нулей $k_n(\omega_0)$ функции $v(k, \omega_0, -H)$, которым соответствует отрицательная групповая скорость. В результате получим

$$w\approx e^{-i\omega_0 t}\sum_n{}' c_n e^{ik_nx}v(k_n, \omega_0, z)$$

где $k_n=k_n(\omega_0)$ и $v(k_n, \omega_0, z)$ — собственные числа и собственные функции граничной задачи (1.4) с нулевыми граничными условиями, а суммирование проводится по тем n, для которых групповая скорость отрицательна (c_n — константы). Иными словами, при $x\to-\infty$ решение задачи (1.2), (1.7) — это сумма мод, уносящих энергию в отрицательном направлении.

Чтобы найти асимптотику $u(t, x, z)$ при $x\to\infty$, перейдем в (5.1) к интегрированию по контуру C, показанному пунктиром на фигуре

$$u(t,x,z)=\exp(-i\omega_0 t)\sum_n{}'' c_n e^{ik_n x} v(k_n, \omega_0, z)+$$

$$-\frac{1}{2\pi i}e^{-i\omega_0 t}\int_C \frac{v(k,\omega_0+i0,z)}{v(k,\omega_0+i0,-H)}e^{ikx}\frac{dk}{k-k_0} \tag{5.2}$$

где суммирование проводится по собственным функциям с положительной групповой скоростью.

Вычисление асимптотики интеграла в (5.2) при $x\to\infty$ вполне аналогично вычислению асимптотики интеграла в (2.3) при $t\to\infty$. Пусть $z=z_0$ — критический уровень, т. е. пусть $\omega_0=k_0U(z_0)$. При фиксированном $z\neq z_0$ и $x\to\infty$ решение граничной задачи (1.7) представляет собой сумму собственных колебаний частоты ω_0, имеющих положительную групповую скорость (т. е. уносящих энергию в положительном направлении), и вынужденного колебания

$$u=\sum_n{}'' e^{-i\omega_0 t+ik_n x}c_n v(k_n,\omega_0,z)+e^{-i\omega_0 t+ik_0 x}\frac{v(k_0,\omega_0+i0,z)}{v(k_0,\omega_0+i0,-H)} \tag{5.3}$$

При $z\approx z_0$ эта асимптотика непригодна. Равномерная асимптотика, применимая при $z\approx z_0$, вычисляется аналогично асимптотике, найденной в разд. 2. Ее главный член выражается через определенную по (2.5) неполную гамма-функцию $\Phi(x, k-k_1, \lambda)$

$$\lambda=\frac{1}{2}\pm i\mu;\qquad \mu=\sqrt{\mathrm{Ri}-\frac{1}{4}};\qquad k_0-k_1=k(z_0)-k(z_1)=$$

$$=\frac{\omega_0}{U(z_0)}-\frac{\omega_0}{U(z)}\approx\frac{kU'(z_0)(z-z_0)}{U(z_0)}$$

Чтобы учесть влияние вязкости и теплопроводности, приведем систему из [8, формулы (1)—(4)] к одному уравнению для вертикальной скорости w. Полагая $w=\exp(-i\omega_0 t+ik_0 x)(v)(x,t)$, отбрасывая в уравнении для $v(x,z)$ члены, малые при $x\to\infty$ и $z\sim z_0$, и введя безразмерные вертикальную длину ζ и горизонтальную дистанцию θ

$$z-z_0=Z_\nu\zeta;\quad Z_\nu=(\nu/kU')^{1/3};\quad \theta=kU'Z_\nu x/U$$

получим для $v(\theta,\zeta)$ уравнение (3.1). Его решение, переходящее при K, $\nu\to0$ в $\Phi(x, kU'(z-z_0)/U, \lambda)$, будет иметь вид (3.2).

В разд. 4 было показано, что для формирования критического слоя требуется $\theta\sim2(\mathrm{Ri}+1)^{1/6}$, т. е.

$$x\sim2U(kU')^{-2/3}\nu^{-1/3}(\mathrm{Ri}+1)^{1/6} \tag{5.4}$$

Оценим необходимую дистанцию для двух рассмотренных выше примеров. В условиях шельфа $U\sim0{,}5$ м/с; $U_z'\sim0{,}01$ с$^{-1}$, $k\sim0{,}02$ м$^{-1}$, $\nu=10^{-6}$ м^2/с. Из (5.8) следует, что здесь $x\sim30$ км. В атмосфере $k\sim4\cdot10^{-4}$ м$^{-1}$, $U_z'\sim0{,}024$ с$^{-1}$, $\nu\sim6{,}5$ м/с. Полагая $U\sim10$ м/с, получим $x\sim24$ км.

Эти оценки показывают, что в природных условиях формирование критического слоя под воздействием подветренных волн мало вероятно.

6. Задача об установлении подветренных волн. Рассмотрим решение уравнения (1.3), равное нулю при $t<0$ и удовлетворяющее при $t>0$ граничным условиям

$$w(t,x,0)=0;\quad w(t,x,-H)=0,\quad x<0,$$
$$w(t,x,-H)=\exp i(k_0x-\omega_0 t),\quad x>0 \tag{6.1}$$

Будем предполагать, что при некотором $z=z_0$ имеем $U(z_0)=c_\varphi=\omega_0/k_0$. Покажем, что если ω_0 в (6.1) не является стационарным значением ни одной из дисперсионных кривых $\omega_n(k)$, то решение задачи (1.3), (6.1) стремится при $t\to\infty$ к построенному в разд. 5 гармонически зависящему от времени и удовлетворяющему принципу излучения решению (5.1) граничной задачи (1.7). Если же это условие не выполнено, то решение задачи (6.1) стремится при $t\to\infty$ к бесконечности. Будет выделена растущая компонента этого решения.

Прямая выкладка показывает, что решение задачи (6.1) имеет вид

$$w(t,x,z)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}dk}{k-k_0-i0}\int\limits_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon}\frac{\exp(-i\omega t)\,v(\omega,k,z)\,d\omega}{(\omega-\omega_0)\,v(\omega,k,-H)} \tag{6.2}$$

где $v(\omega,k,z)$ – обращающееся в нуль при $z=0$ решение уравнения (1.4). Функция $v(\omega,k,z)/v(\omega,k,-H)$ – аналитическая функция ω, имеющая разрез на отрезке вещественной оси I_k: $k\min\limits_z U(z)<\omega<k\max\limits_z U(z)$ и простые вещественные полюсы $\omega=\omega_n(k)$. Поэтому интеграл по ω в (6.2) можно представить в виде суммы вычетов в нулях знаменателя и интеграла по I_k. При $t\to\infty$ этот интеграл стремится к нулю; отбрасывая его, получим

$$w(t,x,z)\approx\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(ikx)}{k-k_0-i0}\Bigg[\sum_n e^{-i\omega_n(k)t}\frac{v(\omega_n,k,z)}{c_n(\omega_n(k)-\omega_0)}+$$
$$+e^{-i\omega_0 t}\frac{v(\omega_0+i0,k,z)}{v(\omega_0+i0,k,-H)}\Bigg]dk \tag{6.3}$$

Выражение в квадратных скобках – регулярная функция k, так как полюсы отдельных слагаемых взаимно уничтожаются.

Предположим, что групповая скорость $\partial\omega_n/\partial k$ при всех $k=k_n(\omega_0)$, $n=1,2,\ldots$, не обращается в нуль. Тогда в интеграле (6.3) в окрестности каждого значения $k=k_n(\omega_0)$ контур интегрирования можно сместить в область $\operatorname{Im}\omega_n(k)<0$, после чего интеграл

$$\sum_n\int\frac{\exp(ikx-i\omega_n(k)t)\,v(\omega_n,k,z)\,dk}{(k-k_0-i0)\,c_n(\omega_n(k)-\omega_0)}$$

будет при $t\to\infty$ стремиться к нулю, а оставшееся слагаемое, как легко видеть, совпадает с интегралом (5.1).

Пусть имеется номер m, для которого групповая скорость $\partial\omega_m/\partial k=0$ при $k=k_m(\omega_0)$. Покажем, что тогда интеграл (6.3) стремится при $t\to\infty$ к бесконечности, и найдем растущую компоненту этого интеграла. Ограничимся для простоты случаем, когда $\partial\omega_m/\partial k=0$, а $\partial^2\omega_m/\partial k^2\neq0$, т. е. когда

$$\omega_m(k)-\omega_0=\alpha(k-k_m)^2+O(k-k_m)^3$$

где $\alpha\neq0$. Обозначим через $g_m(k)$ бесконечно дифференцируемую функцию (нейтрализатор), равную единице в достаточно малой окрестности точки $k=k_m$ и нулю в несколько большей окрестности этой точки. Положим

$$J_m=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}g_m(k)}{k-k_0-i0}\left[\frac{e^{-i\omega_m(k)t}U(\omega_m,k,z)}{c_m(\omega_m(k)-\omega_0)}+\frac{v(\omega_0+i0,k,z)\,e^{-i\omega_0 t}}{v(\omega_0+i0,k,-H)}\right]dk$$

Разность $J-J_m$, где J – интеграл (6.3), стремится при $t\to\infty$ к гармонически зависящему от t решению.

Интеграл J_m можно заменить модельным интегралом

$$J_m=\frac{\exp(-i\omega_0 t)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}F(k)\frac{[\exp[-i(\omega_m(k)-\omega_0)t]-1]}{\omega_m(k)-\omega_0}dk\approx$$

$$\approx J=\frac{\exp(-i\omega_0 t)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(k)\,\frac{[\exp(-i\alpha(k-k_m)^2 t)-1]dk}{(k-k_m)^2}$$

$$F_1(k)=e^{ikx}\frac{v(\omega_0, k, z)}{(k-k_0)\alpha c_m}$$

Можно доказать, что асимптотика J при $t\to\infty$ имеет вид

$$J\approx d_{-1}\sqrt{t}+d_0+\sum_{n=1}^{\infty}d_n t^{1/2-n}$$

$$d_{-1}=\frac{i}{\sqrt{\pi}}e^{-\pi i/4\,\mathrm{sign}\,\alpha}\sqrt{|\alpha|}F_1(k_m)e^{-i\omega_0 t}$$

Поэтому при наличии моды v_m, для которой $\partial\omega_m/\partial k=0$ при $k=k_m$ и $\omega_m(k)=\omega_0$, решение задачи (6.1) растет при $t\to\infty$ как $\sqrt{t}$. Если же при $k=k_m$ групповая скорость имеет нуль более высокого порядка: $\partial\omega_m/\partial k=O(k-k_m)^p$, то $w(t, x, z)$ растет при $t\to\infty$ как $t^{p/(p+1)}$.

Результаты, полученные в разд. 5, 6, допускают простую физическую интерпретацию. Энергия, вносимая в среду колебаниями (6.1) границы, приводит к возбуждению не только вынужденных, но и свободных колебаний (собственных мод) частоты ω_0. Если же все возбуждаемые моды имеют ненулевую групповую скорость, то одновременно с подкачкой энергии при малых x каждая мода уносит получаемую энергию; процесс устанавливается и предельное решение при $|x|\to\infty$ состоит из суммы уносящих энергию мод и, при $x\to\infty$, из вынужденного колебания. Если имеется возбуждаемая мода с нулевой групповой скоростью, то получаемая этой модой энергия может уходить на бесконечность лишь за счет относительно слабых дисперсионных эффектов (обусловленных нелинейной зависимостью ω от k) и поэтому ее амплитуда будет расти как $\sqrt{t}$.

7. Об отсутствии собственных мод с критическим уровнем. Докажем, что если выполнено условие устойчивости (1.4) Майлса, то собственные колебания не могут иметь критических уровней, т. е. что равное нулю при $z=0$ решение $v(\omega_0, k, z)$ уравнения (1.3), определенное как аналитическое продолжение из области $\mathrm{Im}\,\omega_0>0$, не может при $k\min\limits_z U<\omega_0<k\max\limits_z U$ обращаться в нуль при $z=-H$.

Доказательство будем проводить от противного: допустим, что собственная функция $v(\omega_0, k, z)$ имеет критический уровень $z=z_0$, и докажем, что тогда малой вариацией $N^2(z)$ собственное число ω_0 можно вывести в комплексную область, что запрещено условием Майлса.

Пусть сперва ω_0 – простое собственное значение: $v(\omega_0, k, -H)=0$, но $\partial v(\omega_0, k, -H)/\partial\omega\neq 0$. Дифференцируя (1.4) по параметру ω, получим уравнение для функции $\psi(z)=\partial v(\omega_0, k, z)/\partial\omega_0$; условие разрешимости этого уравнения запишем в форме ($L_0\left(\omega, k, z, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ – оператор (1.3))

$$\frac{\partial v(\omega_0, k, -H)}{\partial\omega}\,\frac{\partial v(\omega_0, k, -H)}{\partial z}(\omega-kU(-H))^2=\int_{-H}^{0}v\left(\frac{\partial L_0}{\partial\omega}v\right)dz \tag{7.1}$$

Если $\partial v(\omega_0, k, -H)/\partial\omega\neq 0$, то интеграл в правой части (7.1) также не равен нулю.

Проварьируем $N^2(z)$, полагая $N^2(z)=N_0^2(z)+\delta N_1^2$. Будем искать решение возмущенного уравнения в виде $v+\delta v_1+\ldots$, а собственное число ω – в форме $\omega=\omega_0+$ $+\delta\omega_1+\ldots$. Из условия разрешимости уравнения для v_1 получим

$$2\omega_1 \int\limits_{-H}^{0} v\left(\frac{\partial L_0}{\partial\omega} v\right)dz=k^2\int N_1^2v^2dz$$

Интеграл J_0, стоящий в левой части этого выражения, согласно (7.1), не равен нулю. Поведение v вблизи критического уровня $z=z_0$ изучено в [2] (см. также [1]), в частности v принимает при $z\approx z_0$ комплексные значения с не равным константе аргументом. Поэтому можно найти такое z_1, что $\mathrm{Im}\,(J_0^{-1}v(z_1))\neq 0$. Выбирая вариацию N_1^2 сосредоточенной вблизи z_1, получим, что $\mathrm{Im}\,\omega_1\neq 0$, т. е. выведем собственное число $\omega=\omega_0+\delta\omega_1+\ldots$ в комплексную область, что запрещено условием Майлса.

Случай собственного числа кратности $m>1$ сводится к рассмотренному, так как нетрудно указать малую вариацию $N^2(z)$ и $U(z)$, переводящую это собственное число в m простых собственных чисел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Миропольский Ю. З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 302 с.
2. *Miles J. W.* On the stability of heterogeneous shear flows // J. Fluid Mech. 1961. V. 10. № 4. P. 496–508.
3. *Booker J. R., Bretherton F. P.* The critical layer for internal gravity waves in a shear flow // J. Fluid Mech. 1967. V. 27. № 3. P. 513–539.
4. *Brown S. N., Stewartson K.* On the nonlinear reflection of a gravity wave at a critical level. Pt 2 // J. Fluid Mech. 1982. V. 115. P. 217–230.
5. *Hazel P.* The effect of viscosity and heat conduction on internal gravity waves at a critical level // J. Fluid Mech. 1967. V. 30. № 4. P. 775–784.
6. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
7. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
8. *Fritts D. C., Geller M. A.* Viscous stabilization of gravity wave critical level flows // J. Atmos. Sci. 1976. V. 33. № 12. P. 2276–2284.
9. *Bell T. H.* Effects of shear on the properties of internal gravity wave modes // Dtsch. hydrogr. Z. 1974. B. 27. № 2. S. 57–62.

Москва

Поступила в редакцию
7.VII.1988