МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1990

УДК 532.546.2:550.32



А. В. КАРАКИН, В. Э. ШКЛОВЕР

# ОБ ОСРЕДНЕНИИ ЗЕРНИСТОЙ СРЕДЫ С УПАКОВКОЙ ИЗ ШАРОВ

Рассматривается задача об осреднении трехкомпонентных сред, состоящих из жестких зерен, вязкодеформируемого или упругодеформируемого вещества, заполняющего зазоры между зернами, и невязкой жидкости (или газа) в порах. В случае, когда деформируемое вещество целиком заполняет зазоры, рассматриваемая среда – двухкомпонентная. Объем прослоек сравним с объемом зерен (зерна имеют шарообразную форму, причем расстояние между ближайшими точками соседних шаров мало по сравнению с диаметром).

В работах [1, 2] дан вывод осредненных уравнений зернистой среды на примере кубической периодической решетки с плоскими квадратными или круглыми гранями контакта и приведена вариационная формулировка задачи в общем случае. В отличие от феноменологического подхода, на котором прежде в значительной мере были основаны уравнения консолидации пористых упругих, вязких и вязкоупругих сред [3, 4], а также модели частично подплавленной коры [5–7] и астеносферы [8], в [1, 2] и в настоящей работе рассматривается макроскопическое состояние среды, последовательно находятся ее осредненные характеристики и выводятся макроуравнения.

Ранее при исследовании микроструктуры сред и связи между последней и макропараметрами имелись в виду в основном сыпучие среды с кулоновским законом трения [3, 9]. Помимо зернистых сред рассматривались также пористые незернистые среды [10–12]. В рассматриваемой задаче существенно, что среда является трехкомпонентной, т. е. помимо твердого (в данном случае жесткого) скелета, состоящего из зерен, имеется межзеренное пространство, заполненное упругим, вязким или вязкоупругим веществом (последнее может также окружать зерна в виде достаточно тонкого смазочного слоя), поровой жидкостью или газом. При этом необходимо иметь в виду, что структура среды, вообще говоря, не регулярна. Типичной является хаотическая ситуация. Регулярная модель используется для того, чтобы иметь возможность точно проинтегрировать уравнения и рассчитать параметры модели, после чего эти результаты переносятся на хаотическую среду.

Для мантийной астеносферной среды пористая структура возникает при ее частичном плавлении, а капилляры образуются на стыках нескольких граней смежных зерен [13]. Наиболее простой моделью здесь будет кубическая форма зерен с плоскими квадратными [1, 2] или круглыми [2] гранями контакта и тонкими прослойками между ними. Преимущество данной модели состоит прежде всего в том, что во всей области межзеренного пространства или в ее значительной части применимо приближение «смазки», которое дает возможность относительно легко проинтегрировать уравнения движения, причем краевые условия здесь ставятся в предположении, что поры, насыщенные флюидами, расположены вдоль ребер зерен. Указанная модель описывает качественные особенности среды с такой микроструктурой, где зерна имеют форму не обязательно кубическую, а, скажем, криволинейного шестигранника, причем, как уже было сказано, прослойки между соседними гранями тонкие, а поры расположены вдоль криволинейных ребер.

Однако в ряде случаев, таких, как нефтяные и газовые коллекторы гранулярного типа, мерзлые грунты, плазма крови с шарообразными кровяными тельцами, композиционные материалы с периодической структурой, ситуация иная – зерна могут обладать произвольной формой, а объем прослоек будет сравним с объемом зерен.

К рассматриваемым системам наиболее близки суспензии. При теоретическом исследовании [14] последние считаются, как правило, разбавленными, при малом значении $\varepsilon$ – отношения размера частиц к расстоянию между соседними частицами, или более концентрированными с $\varepsilon = {}^1/_2 - {}^1/_3$, но все же упакованными не самым плотным образом. Рассмотрение случая упаковки, близкой к самой плотной, хотя и является достаточно важным, встречает серьезные математические и вычислительные трудности. Единственное точное решение частного случая задачи о многих, а именно двух, частицах в вязкой жидкости содержится в [15]; в [16] рассматривается ситуация, когда «смазочный» слой терпит алгоритмически вычисляемый разрыв. При рассмотрении подобных систем для пар соседних частиц целесообразно использовать метод сращиваемых асимптотических разложений [17].

Качественные особенности такой микроструктуры можно рассмотреть на примере простейшей модели. Для получения наиболее общих закономерностей решетку среды будем, как и прежде, считать кубической, а зерна – шарами. При этом в качестве малого параметра принимается отношение толщины зазора (минимального расстояния между точками двух соседних шаров) к диаметру шаров. Кроме того, вводится другой малый параметр – отношение характерного расстояния между точками двух соседних шаров, в пределах которого применимо приближение смазки, к тому же диаметру.

**1. Постановка задачи.** Будем считать, следуя [1, 2], что среда состоит из кубических микроячеек, содержащих жесткие зерна. Предполагается, что последние имеют шарообразную форму радиуса $R$ и минимальное расстояние между точками двух соседних шаров $2H_0$. Зерна окружены тонким «смазочным» слоем, а зазоры между ними заполнены поровой жидкостью или газом (можно рассматривать также двухкомпонентную среду, когда межзеренное пространство заполнено исключительно деформируемым веществом).

Обозначим через $B$, $C$, $D$ соответственно области жестких включений, вязкодеформируемых или упругодеформируемых прослоек и порового пространства. Пусть $A_n$ будет ячейкой решетки, где $\mathbf{n}$ – трехмерный целочисленный вектор, нумерующий ячейку; $B_n$, $C_n$, $D_n$ – части $B$, $C$, $D$, приходящиеся на ячейку $A_n$; области прослоек ($C$) и пор ($D$) являются связными. Микроструктура среды периодична с кубической симметрией и ее вязкие или упругие свойства характеризуются в общем случае некоторым тензором вязкости $\eta_{klij}$ или упругости $\mu_{klij}$.

Считается, что деформации малы и поэтому сохраняют указанную симметрию, т. е. не приводят к относительным поворотам ячеек (шаров): $\omega_j(\mathbf{n})=0$ ($j=1,2,3$), где $\omega_j$ – компоненты вектора угловой скорости жестких шаров. В области $C$ имеют место либо уравнения вязкой несжимаемой жидкости (в стоксовом приближении)

$$\sigma^{c}_{ij,j}=0, \qquad \sigma_{ij}{}^{c}=\tau_{ij}{}^{c}-P^{c}\delta_{ij}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v}^{c}=0$$
$$\tau_{ij}{}^{c}=\eta^{c}(v_{i,j}+v_{j,i}); \qquad i,j=1,2,3 \tag{1.1}$$

либо уравнения линейной теории упругости

$$\sigma^{c}_{ij,j}=0, \qquad \sigma_{ij}{}^{c}=\lambda^{c}e_{kk}{}^{c}\delta_{ij}+2\mu e_{ij}{}^{c}$$
$$e_{ij}{}^{c}=\frac{1}{2}(u^{c}_{i,j}+u^{c}_{j,i}); \qquad i,j=1,2,3 \tag{1.2}$$

Здесь верхними индексами $b$, $c$, $d$ отмечены величины, определенные соответственно в областях $B$, $C$, $D$; $\sigma_{ij}$, $\tau_{ij}$ – тензоры полных и девиаторных напряжений, $u_i$, $v_i$ ($i=1, 2, 3$) – компоненты векторов смещения и скорости, $\lambda$, $\mu$ и $\eta$ – модули Ляме и вязкости, $P$ – давление. В области пор $D$ уравнения имеют вид (1.1), причем, вообще говоря, $\eta^c\neq\eta^d$.

Будем считать, что $\eta^d\ll\eta^c$ (т. е. что флюиды являются идеальной жидкостью или их вязкость очень мала). Для постановки краевых условий необходимо использовать условие непрерывности скоростей и смещений на границе зерен $\partial B$

$$[u_i]_-{}^+=0, \quad [v_i]_-{}^+=0 \tag{1.3}$$

а на границе областей $C$ и $D$ – условия непрерывности усилий, скоростей и смещений

$$[\sigma_{i\nu}]_-{}^+=0, \quad [u_i]_-{}^+=0, \quad [v_i]_-{}^+=0, \quad \sigma_{i\nu}=\sigma_{ij}\nu_j \tag{1.4}$$

где $\nu_i$ – единичный вектор нормали к $\Gamma_{cd}$.

**2. Вывод основных уравнений.** Случаи, когда межзеренные прослойки вязкие или упругие, будем вначале рассматривать параллельно; необходимые различия будут отмечаться по ходу изложения (как известно, одно и то же вещество на временах $t \ll \theta$ проявляет упругие свойства, на временах $t \gg \theta$ — вязкие, и при $t \sim \theta$ — вязкоупругие; здесь $\theta = \eta/\mu$ — время релаксации).

Перейдем к безразмерным переменным $u_i$, $v_i$, $\sigma_{ij}$: $u_i = u_i^c/R$, $v_i = \theta^c v_i^c/R$, $\sigma_{ij} = \sigma^c/\mu^c$, и введем локальные (свои в каждом зазоре) ячеечные координаты $x$, $y$, $z$, такие, что плоскость $(x, y)$ находится посередине зазора. Границы зерен (поверхности шаров) описываются уравнениями

$$z = \pm h(r), \quad h(r) = \varepsilon_0 + (1 - \sqrt{1 - r^2}), \quad \varepsilon_0 = \frac{H_0}{R}, \quad h = \frac{H}{R} \tag{2.1}$$

где $2h(r)$ — переменная безразмерная толщина зазора.

Выпишем граничные условия, считая, что имеет место композиция сдвига и растяжения (сжатия).

Для вязких прослоек

$$\begin{gathered} v_{x|z=\pm h(r)} = \pm v_{0x}, \quad v_{y|z=\pm h(r)} = \pm v_{0y}, \quad v_{z|z=\pm h(r)} = \pm v_{0z} \\ [\sigma_{i\nu}]_-^+|_{\Gamma_{cd}} = 0, \quad [v_i]_-^+|_{\Gamma_{cd}} = 0 \end{gathered} \tag{2.2}$$

Для упругих прослоек

$$\begin{gathered} u_{x|z=\pm h(r)} = \pm u_{0x}, \quad u_{y|z=\pm h(r)} = \pm u_{0y}, \quad u_{z|z=\pm h(r)} = \pm u_{0z} \\ [\sigma_{i\nu}]_-^+|_{\Gamma_{cd}} = 0, \quad [u_i]_-^+|_{\Gamma_{cd}} = 0 \end{gathered} \tag{2.3}$$

где $u_{0i}$, $v_{0i}$ $(i = 1, 2, 3)$ — значения смещений $u_i$ и скоростей $v_i$ соответственно на границах зерен.

Ограничим теперь рассматриваемую область $C$. Возьмем малое $H^*$, такое, что

$$2H_0 \leqslant H^* \ll R \tag{2.4}$$

Подберем $r^*$ из условия $h^* = h(r^*) = \varepsilon^*$, где $\varepsilon^* = H^*/R$.

При этом кроме условия (2.4) потребуем, чтобы область $C(r^*) = \{r \leqslant r^*, -h(r) \leqslant z \leqslant h(r)\}$ целиком содержалась в области $C$.

Из малости $\varepsilon^*$ по (2.1) получим $r^* = \sqrt{2(\varepsilon^* - \varepsilon_0)}$.

При малых $r$ $dh/dr \approx r$, поэтому при $r \leqslant r^*$ порядок наклона границы $dh/dr \sim h^*/r^* \sim r^* \ll 1$.

Поэтому в области $C(r^*)$ имеет место известное приближение «смазки». Для вязких прослоек (аналогично [1]) соответствующие уравнения имеют вид

$$\begin{gathered} v_{x,\,zz} = P_{,\,x}, \quad v_{y,\,zz} = P_{,\,y}, \quad P_{,\,z} = 0 \\ v_{x,\,x} + v_{y,\,y} + v_{z,\,z} = 0 \end{gathered} \tag{2.5}$$

Для упругих прослоек (аналогично [2]) после асимптотического разложения по малому параметру $\alpha = h^*/r^*$ получаем

$$\begin{gathered} u_{x,\,zz} = P_{,\,x}, \quad u_{y,\,zz} = P_{,\,y}, \quad P_{,\,z} = 0 \\ u_{x,x} + u_{y,y} + u_{z,z} = -\frac{\chi - 1}{2} P \\ P = -\frac{2}{\chi - 1} \operatorname{div} u, \quad \chi = \frac{\lambda^c + 3\mu^c}{\lambda^c + \mu^c} \end{gathered} \tag{2.6}$$

Здесь $P$ имеет иной смысл, чем в (2.5), однако, как видно из дальнейшего, его роли для вязкого и упругого случаев будут аналогичны.

Интегрируя (2.5) с учетом (2.2), после элементарных выкладок получим

$$\frac{\partial}{\partial x}(h^3P_{,x})+\frac{\partial}{\partial y}(h^3P_{,y})=3v_{0z} \tag{2.7}$$

Аналогично для системы (2.6) и условий (2.3)

$$\frac{\partial}{\partial x}(h^3P_{,x})+\frac{\partial}{\partial y}(h^3P_{,y})=\frac{3}{2}(\chi-1)hP+3u_{0z} \tag{2.8}$$

Так как поровая жидкость (или газ) по своим свойствам считается близкой к идеальной, в области $D$

$$\sigma_{ij}{}^d=-P^d(\delta_{ij}+o(1))$$

где $P^d$ – безразмерное давление флюидов или газов в порах $P_{pr}$ (оно может быть и нулевым). Если дифференциальным выражением в левой части (2.8) нельзя пренебречь по сравнению с первым слагаемым в правой части, то, как нетрудно видеть, должно выполняться условие $(\chi-1)/2\ll 1$ или, что то же самое, $\mu^c\ll\lambda^c$, откуда следует, что девиаторные напряжения в упругом слое будут малы по сравнению с диагональной компонентой шарового тензора; в вязком же смазочном слое это имеет место всегда. Отсюда с учетом (2.2), (2.3), следуют условия на границе $\Gamma_{cd}$

$$P|_{\Gamma_{cd}}=P^d(P|_{r\gg r^*}=P^d) \tag{2.9}$$

В случае двухкомпонентной среды под $P^d$ будем понимать давление на достаточно больших (порядка $R$) расстояниях от области смазки – той области, где прослойка между зернами достаточно тонкая (далее будет видно, что при больших расстояниях оно стремится к постоянному значению). Так как краевое условие для $P$ обладает цилиндрической симметрией, то такой же симметрией будет обладать и решение уравнения (2.7) или (2.8). Последние можно записать в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial r}(rh^3P_{,r})=3v_{0z}r\\ \frac{\partial}{\partial r}(rh^3P_{,r})=\frac{3(\chi-1)}{2}rhP+3u_{0z}r\end{gathered} \tag{2.10}$$

**3. Вычисление осредненных характеристик макросреды и некоторые выводы.** Рассмотрим вначале среду с вязкими прослойками. Предположим, что имеет место сдвиговое течение:

$$w_1{}^\circ=n_3(\mathbf{x})\,b\frac{\partial v_1{}^\circ}{\partial x_3},\quad w_2{}^\circ=v_2{}^\circ=0,\quad w_3{}^\circ=v_3{}^\circ=0,\quad \frac{\partial v_1{}^\circ}{\partial x_3}=\text{const},\quad b=2(R+H_0) \tag{3.1}$$

где $w_i{}^\circ$ – поле скоростей жестких зерен, которое в центрах шаров совпадает с полем осредненных скоростей макросреды $v_i{}^\circ$, $b$ – длина ребра кубической микроячейки, $n_i(\mathbf{x})$ $(i=1, 2, 3)$ – кусочно-постоянная вектор-функция, равная индексу $n_i$ соответствующей ячейки. В безразмерных переменных и локальной системе координат (для определенности положим $x_1\to x$, $x_2\to y$, $x_3\to z$)

$$\frac{\partial v_1{}^\circ}{\partial x_3}=\frac{\mu^c}{\eta^c}v_{0x},\qquad v_{0y}=0,\qquad v_{0z}=0 \tag{3.2}$$

Так как при $v_{0z}=0$ уравнение (2.10) однородно, то с учетом (2.9) и ограниченности $P$ при $r\to 0$ получим $P=P^d$.

Из (1.1), (2.2), (2.5) с учетом того, что $\partial v_z/\partial x\sim\alpha^2\partial v_x/\partial z$, получим $\tau_{xz}=v_{0x}/h$, где при малых $r$ $h(r)=\varepsilon_0+r^2/2$.

Найдем среднее значение $\langle\tau_{xz}\rangle$ по грани кубической ячейки. Для этого соответствующую грань разобьем на область (I), где применимо приближение смазки: $r\in[0, r^*]$ и оставшуюся (II), т. е. $r\geqslant r^*$, где оно уже, вообще говоря, неприменимо. В безразмерных координатах $x, y\in[-1; 1]$ и $\langle\tau_{xz}\rangle$ есть 1/4 от усилия на соответствующую грань.

Имеем

$$\langle\tau_{xz}\rangle=\frac{v_{0x}}{4}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{r^*}\frac{r}{\varepsilon_0+r^2/2}\,dr\,d\theta+\frac{1}{4}\iint\limits_{r\geqslant r^*}\tau_{xz}\,dx\,dy=\frac{\pi v_{0x}}{2}\ln\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_0}+J_2$$

Из соображений размерности вытекает, что характерное сдвиговое напряжение в области $r\geqslant r^*$ (II) имеет порядок (в размерных переменных) $\tau_{xz}=\gamma\eta^c v_{0x}{}^c/H$, где $\gamma$ — безразмерное число порядка не больше единицы. Отсюда

$$J_2=\gamma\frac{\pi v_{0x}}{2}\ln\varepsilon^*$$

Следовательно, среднее усилие

$$\langle\tau_{xz}\rangle=-\frac{\pi v_{0x}}{2}\ln\varepsilon_0+\frac{\pi v_{0x}}{2}(1+\gamma)\ln\varepsilon^* \tag{3.3}$$

По условию $\varepsilon^*$ фиксировано. Для получения асимптотики при $\varepsilon_0\to0$ можно считать, что

$$\varepsilon_0\ll\varepsilon^*\ll1 \tag{3.4}$$

Однако для упрощения (3.3) условия (3.4), вообще говоря, недостаточно, необходимо, чтобы $\varepsilon_0$ стремилось к нулю так быстро, чтобы выполнялось условие $-\ln\varepsilon_0\gg-\ln\varepsilon^*$.

Будем говорить, что $\varepsilon_0$ мало, если $\varepsilon_0\ll1$, и $\varepsilon_0$ очень мало, если $-\ln\varepsilon_0\gg1$. Тогда для очень малых $\varepsilon_0$ (3.3) примет вид

$$\langle\tau_{xz}\rangle=-\frac{\pi v_{0x}}{2}\ln\varepsilon_0$$

Предположим теперь, что течение имеет вид всестороннего или девиаторного растяжения (сжатия)

$$w_\beta{}^\circ=n_\beta(\mathbf{x})\,b\frac{\partial v_\beta{}^\circ}{\partial x_\beta},\qquad\frac{\partial v_\beta{}^\circ}{\partial x_\beta}=\text{const};\qquad\beta=1,2,3 \tag{3.5}$$

Здесь и далее по $\beta$ суммирование не производится. В локальной системе координат

$$v_{0x}=0,\qquad v_{0y}=0,\qquad\frac{\partial v_\beta}{\partial x_3}=\frac{\mu^c}{\eta^c}v_{0z} \tag{3.6}$$

Интегрируя (2.10) с учетом (2.9), получим

$$P=P^d-\frac{3v_{0z}}{4(\varepsilon_0+r^2/2)^2}$$

Найдем среднее значение $P$ по грани

$$\langle P\rangle=P^d-\frac{1}{4}\frac{3v_{0z}}{4}\int\limits_0^{r^*}\frac{2\pi r\,dr}{(\varepsilon_0+r^2/2)^2}+$$

$$+\frac{1}{4}\iint\limits_{r\geqslant r^*}P^1\,dx\,dy=P^d-\frac{3\pi v_{0z}}{8\varepsilon}+J_2,\qquad P=P^d+P^1$$

Из соображений размерности $J_2=\delta v_{0z}/\varepsilon^*$, где $\delta$ имеет порядок $\leqslant 1$. Отсюда

$$\langle P\rangle = P^d - \frac{3\pi v_{0z}}{8\varepsilon_0} + \left(\frac{3\pi}{8} + \delta\right)\frac{v_{0z}}{\varepsilon^*} \tag{3.7}$$

Как уже говорилось, $\varepsilon_0 \ll \varepsilon^* \ll 1$, причем в отличие от сдвигового течения этого условия достаточно для упрощения (3.7)

$$\langle P\rangle = P^d - \frac{3\pi v_{0z}}{8\varepsilon_0}$$

Следовательно, полные напряжения в сплошной среде выражаются при всестороннем или девиаторном растяжении (сжатии) в размерных переменных в виде (с учетом (3.5), (3.6))

$$\sigma_{\beta\beta}{}^{\circ} = \frac{3\pi\eta^c}{8\varepsilon_0}\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\beta} - P_{pr} \tag{3.8}$$

а при чистом сдвиге (с учетом (3.1), (3.2)) – формулой

$$\sigma_{13}{}^{\circ} = -\frac{\pi\eta^c \ln\varepsilon_0}{2}\frac{\partial v_1{}^{\circ}}{\partial x_3} \tag{3.9}$$

Аналогично [1] получим, что полное и эффективное напряжения связаны соотношением Терцаги

$$\sigma_{ij}{}^{0} = \sigma_{ij}{}^{ef} - P_{pr}\delta_{ij}$$

Под тензором эффективных напряжений понимается некоторая часть тензора полных напряжений, пропорциональная тензору средних скоростей деформации среды. Для кубической решетки тензор вязкости $\eta_{klij}$ имеет только три независимые компоненты

$$\sigma_{ij}{}^{ef} = \eta_1(\overset{\circ}{v}_{i,j} + \overset{\circ}{v}_{j,i}); \quad i\neq j, \quad i,j=1,2,3$$

$$\sigma_{\beta\beta}{}^{ef} = 2\eta_2\nu + 2\eta_3\left(v_{\beta,\beta} - \frac{1}{3}\nu\right), \quad \nu = \operatorname{div} v^{\circ}$$

Из (3.8), (3.9) следуют искомые выражения для коэффициентов эффективной объемной и сдвиговой вязкости среды

$$\eta_1 = -\frac{\pi}{2}\ln\varepsilon_0\eta^c, \quad \eta_2 = \frac{\pi}{16\varepsilon_0}\eta^c, \quad \eta_3 = \frac{3\pi}{16\varepsilon_0}\eta^c \tag{3.10}$$

Напомним, что в случае, когда зерна имеют правильную кубическую форму, а объем прослоек мал по сравнению с объемом зерен, соответствующие значения коэффициентов тензора вязкости имеют вид [1]

$$\eta_1 = \frac{\eta^c}{\varepsilon_0}, \quad \eta_2 = \frac{0{,}07\eta^c}{\varepsilon_0{}^3}, \quad \eta_3 = \frac{0{,}21\eta^c}{\varepsilon_0{}^3} \tag{3.11}$$

В случае среды с упругими прослойками макросреда аналогично только что рассмотренному случаю анизотропна и имеет три независимых модуля: $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$. Закон Гука для среды с кубической симметрией имеет вид [2]

$$\sigma_{ij}{}^{ef} = \lambda_1 e_{ij}{}^{\circ}; \quad i\neq j, \ i,j=1,2,3$$

$$\sigma_{\beta\beta}{}^{ef} = \lambda_2 e_{kk} + \lambda_3\left(e_{\beta\beta} - \frac{1}{3}e_{kk}\right)$$

а полные и эффективные напряжения связаны соотношением Терцаги (в трехкомпонентной среде)

$$\sigma_{ij}{}^{\circ} = \sigma_{ij}{}^{ef} - nP_{pr}\delta_{ij}$$

В случаях плоских граней контакта [2] константы $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $n$ выражаются через некоторую функцию $f(k)$

$$n=n^b f(k)+1-n^b$$

$$\lambda_1=\mu^c/\varepsilon_0, \quad \lambda_2=(1-f(k))\mu^c(\chi+1)/\varepsilon_0(\chi-1)$$

$$\lambda_3=3\lambda_2, \quad f(k)\xrightarrow[k\to 0]{} 1, \quad f(k)\xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \quad k^2=\frac{12(\chi-1)}{\varepsilon_0^2(\chi+1)}$$

Здесь $n^b$ — отношение площади грани контакта к полной площади соответствующей грани, а $f(k)$ в случае круглых граней контакта имеет вид

$$f(k)=2\frac{I_1(kr_0)}{kr_0 I_0(kr_0)}$$

где $r_0$ — радиус грани.

В случае зерен шарообразной формы указанные константы будут иметь вид

$$n\approx 1, \quad \lambda_1=-\frac{\pi}{2}\ln\varepsilon_0\mu^c, \quad \lambda_2=\frac{\pi\mu^c}{8\varepsilon_0}\frac{7-\chi}{6}\varphi(k), \quad \lambda_3=\frac{3\pi\mu^c}{8\varepsilon_0}\frac{7-\chi}{6}\varphi(k)$$

$$k^2=\frac{6(\chi-1)}{\varepsilon_0}, \quad \varphi(k)=\int_0^\infty \xi f_k(\xi)\,d\xi$$

Здесь $f_k(\xi)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi(1+\xi^2)^3 f_{k,\xi})=k^2\xi\frac{1+\xi^2}{2}f_k-16\xi, \quad \xi=\frac{r}{\sqrt{2\varepsilon_0}}$$

$$|f_k(\xi)|_{\xi\to 0}<\infty, \quad f_k(\xi)\xrightarrow[\xi\to\infty]{} 0, \quad \varphi(k)\xrightarrow[k\to 0]{} 1, \quad \varphi(k)\xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Для большинства горных пород модули $\lambda^c$ и $\mu^c$ не очень сильно различаются, что соответствует асимптотике $k\gg 1$. При этом деформации прослоек становятся не зависящими от порового давления. В этом случае имеем

$$n\approx 1, \quad \lambda_1=-\frac{\pi}{2}\ln\varepsilon_0\mu^c, \quad \lambda_2=-\frac{\pi(7-\chi)}{36(\chi-1)}\ln\varepsilon_0\mu^c, \quad \lambda_3=-\frac{\pi(7-\chi)}{12(\chi-1)}\ln\varepsilon_0\mu^c$$

Асимптотика при $k\ll 1$, т. е. $\mu^c/\lambda^c\ll\varepsilon_0/12$, соответствует слабосжимаемой, в частности вязкодеформируемой, среде, и этот случай аналогичен вязкому с точностью до переобозначений

$$n=1, \quad \lambda_1=-\frac{\pi}{2}\ln\varepsilon_0\mu^c, \quad \lambda_2=\frac{\pi}{8\varepsilon_0}\mu^c, \quad \lambda_3=\frac{3\pi}{8\varepsilon_0}\mu^c$$

Осредненная вязкость (упругость) оказывается на порядок (и даже два порядка) величины $\varepsilon_0$ меньше, чем в случае кубических зерен. Отсюда можно сделать вывод, что увеличение пористости (относительного свободного объема межзеренных прослоек) ведет к резкому уменьшению вязкости (упругости) среды. Как видно из приведенных рассуждений, коэффициенты вязкости, особенно сдвиговой, выходят на асимптотику (3.10) достаточно медленно, во всяком случае гораздо медленнее, чем (3.11), что представляется естественным, так как размеры смазочного слоя малы. Тем не менее и при не очень малых $\varepsilon_0$ формулы (3.10) дают порядок указанных коэффициентов. Таким образом, геометрия микроструктуры среды существенно влияет на ее макроскопические характеристики. Это, в частности, подтверждается тем фактом, что вязкость рассматриваемых нами геоматериалов может сильно меняться — в пределах нескольких порядков.

Модели, рассмотренные в [1, 2] и в настоящей работе, можно считать разными предельными случаями для существующей микроструктуры и, следовательно, выражения (3.10) и (3.11) – соответственно нижними и верхними оценками для коэффициентов тензора вязкости.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Каракин А. В., Лобковский Л. И.* К выводу уравнений трехкомпонентной вязкодеформируемой среды (кора и астеносфера) // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1985. № 12. С. 3–13.
2. *Каракин А. В.* К выводу осредненных уравнений движения трехкомпонентной зернистой среды // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. № 1. С. 57–66.
3. *Терцаги К.* Теория механики грунтов. М.: Госстройиздат, 1961. 507 с.
4. *Biot M. A.* General theory of three-dimensional consolidation // J. Appl. Phys. 1941. V. 12. P. 155–164.
5. *Каракин А. В., Лобковский Л. И.* Двухфазная дайковая модель процесса раздвижения океанского дна и образования коры в рифтовых зонах // Докл. АН СССР. 1979. Т. 244. № 3. С. 549–553.
6. *Каракин А. В., Лобковский Л. И.* Модель образования коры в рифтовых зонах // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1981. № 2. С. 3–20.
7. *Каракин А. В., Лобковский Л. И.* Модель рифтогенеза срединно-океанических хребтов // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1981. № 3. С. 3–19.
8. *Каракин А. В., Лобковский Л. И.* Гидродинамика и структура двухфазной астеносферы // Докл. АН СССР. 1982. Т. 268. № 2. С. 324–329.
9. *Nur A., Byerlee J. D.* An exact effective stress law for elastic deformation of rock with fluids // J. Geophys. Res. 1971. V. 76. № 26. P. 6414–6419.
10. *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
11. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука, 1984. 352 с.
12. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
13. *Waff H. S., Bullau J. R.* Equilibrium fluid distribution in an ultramafic partial melt under hydrostatic stress conditions // J. Geophys. Res. 1979. V. B84. № 11. P. 6109–6114.
14. *Happel J., Brenner H.* Low Reynolds number hydrodynamics with special applications to particulate media. Hague etc. Nijhoff 1983. P. 553.
15. *Stimson M., Jeffery G. B.* The Motion of two spheres in a viscous fluid // Proc. Roy. Soc. London, 1926, V. 3. № A 757. P. 110–124.
16. *Elrod H. G.* Numerical solution for power law fluids-application to slider bearings // Dev. Numer. and Exp. Meth. Appl. Tribol. Proc. 10th Leeds – Lyon Symp. Tribol., Lyon, 6–9th Sept., 1983. London e. a., 1984. P. 25–30. Discuss. P. 46–50.
17. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.; Мир, 1967. 310 с.


Москва


Поступила в редакцию
2.III.1989