

УДК 532.546:536.421

© 1990 г.

Г. Г. ЦЫПКИН

## ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДАХ ВОДА — ЛЕД В НЕНАСЫЩЕННЫХ ГРУНТАХ

Опыт показывает, что физико-механические свойства мерзлых грунтов зависят от количества льда, заполняющего поровое пространство и цементирующего частицы грунта. Процесс льдообразования в ненасыщенных грунтах определяется динамикой движения компонент при фазовом переходе. Одна из основных задач механики мерзлых грунтов состоит в изучении механизма влагопереноса и его особенностей, связанных с фазовыми переходами  $H_2O$  в промерзающих и протаивающих грунтах [1].

Для математического моделирования таких процессов наиболее широкое применение получил подход, основанный на уравнении диффузии для функции влажности, по определению равной отношению массы воды к массе сухого образца [1–3]. Основные трудности этого подхода связаны не только с экспериментальным определением коэффициента диффузии, но и с выставлением граничных условий на поверхности фазового перехода [2].

Существует альтернативный подход к рассматриваемым задачам, использующий методы механики многофазных сред. Здесь вводится другая искомая функция — водонасыщенность, по определению равная объемной доли жидкости в единице порового объема. В качестве основных уравнений, описывающих движение компонент в грунте, используется система уравнений многофазной фильтрации [4, 5].

Наиболее общая и последовательная с точки зрения механики многофазных сред формулировка задачи о фазовых переходах в ненасыщенных грунтах дана в [6]. Для выставления условий на фронте фазового перехода впервые используются соотношения на скачке функции водольдонасыщенности. Однако приведенная в [6] система условий не полна, что не позволило автору построить решение задачи.

В [7] проводится сравнительный анализ уравнений, лежащих в основе обоих подходов. Показано, что уравнение диффузии влаги следует из системы уравнений двухфазной фильтрации, если пренебречь сжимаемостью всех компонент при учете капиллярного давления.

В настоящей работе развивается подход, предложенный в [6]. Сформулирована задача о промерзании ненасыщенного грунта при условии сжимаемости газа и равенства давлений компонент. В линейном приближении получено аналитическое решение. Представленные результаты свидетельствуют о сильной зависимости льдонасыщенности от значения коэффициента проницаемости грунта и приложенного градиента давления.

**1. Основные уравнения.** Под мерзлыми грунтами будем понимать пористые среды, насыщенные льдом и воздухом, а под талыми — насыщенными водой и воздухом. Рассмотрим процесс промерзания с образованием резкого фронта фазового перехода, разделяющего талый и мерзлый грунт. Будем считать, что скелет пористой среды, лед и вода несжимаемы, скелет пористой среды и лед неподвижны, а воздух является совершенным газом. Предположим также равенство давлений и температур компонент в областях их совместного существования. Тогда с учетом сделанных предположений система основных уравнений в области мерзлого грунта включает уравнения неразрывности для льда и воздуха соответственно, обобщенный закон Дарси, уравнение состояния и уравнение энергии

$$m\rho_l \frac{\partial}{\partial t}(1-S)=0, \quad m \frac{\partial}{\partial t} \rho_a(1-S) + \operatorname{div}(\rho_a \mathbf{v}_a)=0$$
$$\mathbf{v}_a = - \frac{kF_a(S)}{\mu_a} \operatorname{grad} P, \quad P = \rho RT \quad (1.1)$$

$$(\rho C)_f \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(P \mathbf{v}_a) + C_v \rho_a \mathbf{v}_a \operatorname{grad} T = \operatorname{div}(\lambda_f \operatorname{grad} T)$$

$$\lambda_f = m S \lambda_i + m(1-S) \lambda_a + (1-m) \lambda_s, \quad (\rho C)_f = m S \rho_i C_i + m(1-S) \rho_a C_a + (1-m) \rho_s C_s$$

В области талого грунта справедлива аналогичная система уравнений, учитывающая движение воды

$$m \frac{\partial}{\partial t} S + \operatorname{div} \mathbf{v}_w = 0, \quad m \frac{\partial}{\partial t} \rho_a (1-S) + \operatorname{div} \rho_a \mathbf{v}_a = 0$$

$$\mathbf{v}_j = - \frac{k f_j(S)}{\mu_j} \operatorname{grad} P, \quad j = a, w, \quad P = \rho_a R T \quad (1.2)$$

$$(\rho C)_m \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}[P(\mathbf{v}_w + \mathbf{v}_a)] + (\rho_w C_w \mathbf{v}_w + \rho_a C_v \mathbf{v}_a) \operatorname{grad} T = \operatorname{div}(\lambda_m \operatorname{grad} T)$$

$$\lambda_m = m S \lambda_w + m(1-S) \lambda_a + (1-m) \lambda_s, \quad (\rho C)_m = m S \rho_w C_w + m(1-S) \rho_a C_a + (1-m) \rho_s C_s$$

Здесь  $m$  — пористость,  $\rho$  — плотность,  $S$  — водольдонасыщенность,  $v$  — скорость,  $k$  — проницаемость,  $\mu$  — вязкость,  $f$  — фазовая проницаемость,  $P$  — давление,  $T$  — температура,  $R$  — газовая постоянная,  $C$  — теплоемкость,  $\lambda$  — теплопроводность,  $C_v$  — теплоемкость при постоянном объеме, индексы:  $w$  — вода,  $i$  — лед,  $a$  — воздух,  $s$  — скелет пористой среды,  $m$  — талый грунт,  $f$  — мерзлый грунт.

При рассмотрении задачи о фазовых переходах предполагается введение подвижной границы, на которой искомая функция водольдонасыщенности  $S$  претерпевает разрыв. Как и в [8], будем рассматривать скачки, на которых выполняются условия непрерывности давления и температуры. Для вывода условий на поверхности фазового перехода вода — лед используем универсальные соотношения на скачке [9]. Тогда законы сохранения масс газа и  $\text{H}_2\text{O}$  на разрыве имеют вид

$$[m(1-S)\rho_a(V_n - u_n)] = 0 \quad (1.3)$$

$$[m S \rho_{w,i}(V_n - u_n)] = 0 \quad (1.4)$$

С учетом непрерывности энтальпии газа закон сохранения энергии на разрыве приводится к виду

$$[m S \rho_{w,i} h_{w,i}(V_n - u_n) - Q_n] = 0 \quad (1.5)$$

где  $Q_n = -\lambda_{m,f}(\operatorname{grad} T)_n$ ,  $V_n$  и  $u_n$  — соответственно проекции скоростей поверхности разрыва и среды на положительное направление нормали к поверхности разрыва,  $h$  — энтальпия. Здесь индексы  $w$  (вода) и  $m$  (талый) берутся в талой зоне, а индексы  $i$  (лед) и  $f$  (мерзлый) — в мерзлой.

Для получения полной системы условий на скачке, позволяющих решить задачу о фазовом переходе, необходимо добавить условие равенства локальной температуры температуре фазового перехода:  $T = T_\phi$ . Вообще говоря, температура фазового перехода зависит от давления, т. е.  $T_\phi = T_\phi(P)$ . Будем рассматривать задачу в таком диапазоне параметров, когда изменение давления не превышает нескольких атмосфер. Это означает, что изменение температуры фазового перехода по отношению к температуре кристаллизации чистой воды при атмосферном давлении не превышает сотых долей градуса Кельвина. Следовательно, можно полагать температуру фазового перехода постоянной и равной 273,15 К.

Из соотношений (1.1)–(1.5) исключим скорости компонент и плотность воздуха. Тогда системы основных уравнений в обеих зонах приведутся к системам трех уравнений относительно функций  $T$ ,  $P$ ,  $S$ . Эти системы в линеаризованном виде будут приведены в следующем параграфе.

Положим для определенности, что область мерзлого грунта находится слева от поверхности фазового перехода, а область талого грунта — справа. Тогда система условий (1.3)–(1.5) на поверхности разрыва функции  $S$  выражает условия балансов массы газа, массы  $H_2O$ , энергии и имеет вид

$$V_n = \frac{k}{m\mu_a} \left\{ \frac{f_a(S_-)}{S_- - S_+} \text{grad } P_- - \frac{f_a(S_+)}{S_- - S_+} \text{grad } P_+ \right\}$$

$$\left( 1 - \frac{S_- \rho_i}{S_+ \rho_w} \right) V_n = - \frac{k}{m\mu_w} f_w(S_+) \text{grad } P_+ \quad (1.6)$$

$$mS_- \rho_i q V_n = \lambda_f \text{grad } T_- - \lambda_m \text{grad } T_+$$

где теплота фазового перехода  $q = h_w - h_i$ .

Имеются трудности при выставлении граничных условий для уравнения диффузии влаги [2]. Традиционный вывод этого уравнения предполагает введение гипотезы миграции жидкости. Движение газовой компоненты при этом не учитывается, так как ее весовая доля сравнительно мала.

Если в качестве искомым функций использовать объемные доли компонент, как это делается в механике многофазных сред, то придется к необходимости рассмотреть уравнения для газовой компоненты. Тогда условие на поток массы газа является дополнительным условием, позволяющим получить полную систему соотношений на подвижной границе. Описание с позиций механики многофазных сред более общее и в частном случае, в предположении несжимаемости компонент, сводится к системе уравнений, из которой следует уравнение диффузии влаги [7]. Однако уравнение диффузии влаги вырождается, если пренебречь капиллярным давлением, а система уравнений альтернативного подхода допускает нетривиальное решение, которое будет получено в настоящей работе.

**2. Линейное приближение.** Предположим, что талый грунт, имеющий в начальный момент времени температуру  $T_0 > T_\Phi$ , давление  $P_0$  и водонасыщенность  $S_0$ , взаимодействует на некоторой фиксированной поверхности с потоком воздуха, имеющим температуру  $T^\circ < T_\Phi$  и давление  $P^\circ$ . В результате образуется область мерзлого грунта — грунта, насыщенного льдом и воздухом. Пусть  $T_0$ ,  $P_0$ ,  $S_0$ ,  $T^\circ$  и  $P^\circ$  — постоянные величины.

Рассмотрим задачу в линейном приближении, когда изменения искомым функций малы по сравнению с их абсолютными значениями  $T'/T \ll 1$ ,  $P'/P \ll 1$ ,  $S'/S \ll 1$ . Представим искомые функции в областях лед — воздух и вода — воздух в виде невозмущенных величин и возмущений

$$T = T^\circ + T', \quad P = P^\circ + P', \quad S = S^\circ + S'; \quad T = T_0 + T', \quad P = P_0 + P', \quad S = S_0 + S'$$

Тогда система основных уравнений в линейном приближении в обеих областях имеет вид

$$\frac{\partial S'}{\partial t} = \kappa_w \Delta P' \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial P'}{\partial t} + \delta \frac{\partial T'}{\partial t} = \kappa \Delta P' \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \omega \frac{\partial P'}{\partial t} = a \Delta T' \quad (2.3)$$

$$\kappa = \kappa_f = \frac{kP^\circ}{m\mu_a} \frac{f_a(S^\circ)}{1 - S^\circ}, \quad \kappa_w = 0, \quad \delta = \delta_f = - \frac{P^\circ}{T^\circ}$$

$$\begin{aligned}\omega \equiv \omega_j &= -\frac{m(1-S^\circ)}{(\rho C)_j(S^\circ)}, & a \equiv a_j &= \frac{\lambda_j(S^\circ)}{(\rho C)_j(S^\circ)} \\ \kappa \equiv \kappa_m &= \frac{kP_0}{m(1-S_0)} \left[ \frac{f_w(S_0)}{\mu_w} + \frac{f_a(S_0)}{\mu_a} \right] \\ \kappa_w &= \frac{kf_w(S_0)}{m\mu_w}, & \delta \equiv \delta_m &= -\frac{P_0}{T_0} \\ \omega \equiv \omega_m &= -\frac{m(1-S_0)}{(\rho C)_m(S_0)}, & a \equiv a_m &= \frac{\lambda_m(S_0)}{(\rho C)_m(S_0)}\end{aligned}$$

Линеаризация условий (1.6) приводит к граничным условиям для возмущений на фронте фазового перехода

$$V_n = \frac{k}{m\mu_a} \left\{ \frac{f_a(S_0)}{S^\circ - S_0} \text{grad } P' - \frac{f_a(S_0)}{S^\circ - S_0} \text{grad } P_+' \right\} \quad (2.4)$$

$$S_-' = \frac{\rho_w}{\rho_i} \left\{ S_+' + \frac{f_w(S_0)}{m\mu_w V_n} \text{grad } P_+' \right\} \quad (2.5)$$

$$mS^\circ \rho_i q V_n = \lambda_j(S^\circ) \text{grad } T_-' - \lambda_m(S_0) \text{grad } T_+' \quad (2.6)$$

Заметим, что значение льдонасыщенности в невозмущенном состоянии связано со значением начальной водонасыщенности соотношением  $S^\circ = S_0 \rho_w / \rho_i$ .

Условия (2.4)–(2.6) составляют систему уравнений на подвижной границе для определения  $S_-'$ ,  $P_*$  и  $V_n$  при известном значении температуры фазового перехода  $T_* = T_\phi$  (индекс \* соответствует значению на подвижной границе). Величина  $S_+'$  находится из решения системы (2.4)–(2.6).

Рассмотрим одномерный процесс промерзания. Пусть неполностью водонасыщенный грунт занимает полупространство  $x \geq 0$ , взаимодействуя на неподвижной границе  $x=0$  с воздухом, имеющим отрицательную температуру. Тогда фронт фазового перехода  $x=X(t)$  ( $V_n \equiv \dot{X}(t)$ ) движется вправо. Область  $0 < x < X(t)$ , расположенная слева от фронта, представляет собой область мерзлого, а область  $x > X(t)$  – талого грунта.

Сформулированная задача имеет автомодельное решение вида

$$T' = T'(\xi), \quad P' = P'(\xi), \quad S' = S'(\xi), \quad X(t) = \beta \sqrt{a_m t}, \quad \xi = x / \sqrt{a t}$$

Для области лед – вода из уравнения (2.1) имеем  $S' = \text{const}$ . Следовательно, значение льдонасыщенности в области совпадает со значением на фронте слева  $S' = S_-'$ .

Распределения возмущений температуры и давления находятся из уравнений (2.2), (2.3) и имеют вид

$$T' = \frac{\omega_f}{\alpha_{f1} - \alpha_{f2}} [b_{f1} E_1(\xi) - b_{f2} E_2(\xi)] \quad (2.7)$$

$$P' = \frac{1}{\alpha_{f2} - \alpha_{f1}} [(1 - \alpha_{f1}) b_{f1} E_1(\xi) - (1 - \alpha_{f2}) b_{f2} E_2(\xi)] \quad (2.8)$$

$$b_{f1} = \frac{1 - \alpha_{f2}}{\omega_f} (T_* - T^\circ) + P_* - P^\circ, \quad E_1(\xi) = \frac{\text{erf}(\sqrt[1/2]{\alpha_{f1}} \xi)}{\text{erf}(\sqrt[1/2]{\alpha_{f1}} \beta)}$$

$$b_{f2} = \frac{1 - \alpha_{f1}}{\omega_f} (T_* - T^\circ) + P_* - P^\circ, \quad E_2(\xi) = \frac{\text{erf}(\sqrt[1/2]{\alpha_{f2}} \xi)}{\text{erf}(\sqrt[1/2]{\alpha_{f2}} \beta)}$$

$$\alpha_{f1,2} = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{a_f}{\kappa_f} \right) \pm \sqrt{\left( 1 - \frac{a_f}{\kappa_f} \right)^2 + 4 \frac{a_f}{\kappa_f} \delta_f \omega_f} \right]$$

В области талого грунта ( $x > X(t)$ ) решения имеют вид

$$S' = E \left[ \frac{P'(\xi)}{P_0} - \frac{T'(\xi)}{T_0} \right] \quad (2.9)$$

$$T' = \frac{\omega_m}{\alpha_{m1} - \alpha_{m2}} [b_{m1} \text{Ec}_1(\xi) - b_{m2} \text{Ec}_2(\xi)] \quad (2.10)$$

$$P' = \frac{1}{\alpha_{m2} - \alpha_{m1}} [(1 - \alpha_{m1}) b_{m1} \text{Ec}_1(\xi) - (1 - \alpha_{m2}) b_{m2} \text{Ec}_2(\xi)] \quad (2.11)$$

$$b_{m1} = \frac{1 - \alpha_{m2}}{\omega_m} (T_* - T_0) + (P_* - P_0), \quad \text{Ec}_1(\xi) = \frac{\text{erfc}(1/2 \sqrt{\alpha_{m1} \xi})}{\text{erfc}(1/2 \sqrt{\alpha_{m1} \beta})}$$

$$b_{m2} = \frac{1 - \alpha_{m1}}{\omega_m} (T_* - T_0) + (P_* - P_0), \quad \text{Ec}_2(\xi) = \frac{\text{erfc}(1/2 \sqrt{\alpha_{m2} \xi})}{\text{erfc}(1/2 \sqrt{\alpha_{m2} \beta})}$$

$$E = (1 - S_0) \left[ 1 + \frac{f_a(S_0) \mu_w}{f_w(S_0) \mu_a} \right]^{-1}$$

$$\alpha_{m1,2} = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{a_m}{\kappa_m} \right) \pm \sqrt{\left( 1 - \frac{a_m}{\kappa_m} \right)^2 + 4 \frac{a_m}{\kappa_m} \delta_m \omega_m} \right]$$

Решение (2.9) позволяет определить значение насыщенности справа на фронте фазового перехода при  $\xi = \beta$

$$S_+' = E \left( \frac{P_*}{P_0} - \frac{T_*}{T_0} \right)$$

Автомодельные решения (2.7), (2.8), (2.10), (2.11) и их производные содержат неизвестные искомые величины  $P_*$  и  $\beta$ . Для нахождения этих величин требуется решить систему трансцендентных уравнений (2.4)–(2.6) на подвижной границе.

Из уравнения (2.6) находим закон движения границы (величину  $\beta$ ). По известному  $\beta$  из соотношения (2.4) находим давление на фронте  $P_*$ , а из (2.5) определяется значение льдонасыщенности  $S_-'$ .

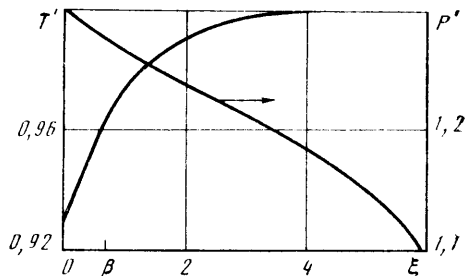
**3. Примеры расчетов.** Анализ системы уравнений (2.1)–(2.3) показывает, что задача имеет два характерных масштаба длины. Первый масштаб  $L_1$  можно определить как характерный размер, на котором затухают возмущения температуры, а второй –  $L_2$  – как характеризующий затухание возмущений давления. Изменение параметров задачи практически не меняет величину  $L_1$ . Масштаб  $L_2$  линейно зависит от коэффициента проницаемости  $k$  и в большинстве случаев  $L_2 \gg L_1$ . Заметим также, что масштаб длины, на котором затухают возмущения функции водонасыщенности, по порядку величины совпадает в масштабом  $L_2$ .

Рассмотрим примеры расчетов при следующих начальных и граничных условиях:  $S_0 = 0,7$  ( $S^0 = 0,769$ ),  $P_0 = 10^5$  Па,  $T_0 = 283$  К,  $P^0 = 1,3 \cdot 10^5$  Па,  $T^0 = 263$  К. При  $k = 10^{-15}$  м<sup>2</sup> получаем  $\beta = 0,7$ ,  $P_* = 1,276 \cdot 10^5$  Па,  $S_+' = 0,702$ ,  $S_-' = 0,75$ . На фиг. 1 приведены распределения температуры  $T' = T/T_0$  и давления  $P' = P/P_0$ .

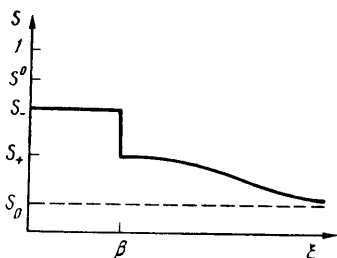
Расчеты показывают, что  $S_+$  и  $S_-$  мало отличаются от соответствующих величин, взятых в нулевом приближении. Значение льдонасыщенности уменьшилось по сравнению с нулевым приближением, но осталось выше начального значения водонасыщенности  $S_0$ . На фиг. 2 представлена качественная картина распределения насыщенности в обеих областях.

Увеличение проницаемости приводит к снижению льдонасыщенности  $S_-$ , которое может быть значительным. Так, при  $k=1,5 \cdot 10^{-13}$  м<sup>2</sup> имеем решение с  $\beta=0,7$ ,  $P_*=1,298 \cdot 10^5$  Па,  $S_+=0,7023$ ,  $S_-=0,51$ .

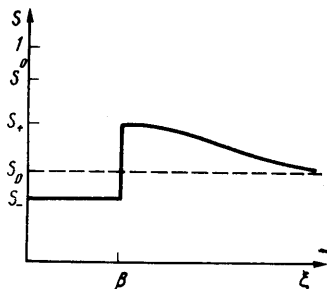
Уменьшение величины  $S_-$  объясняется тем, что вода оттесняется в грунт охлажденным воздухом и объем льда может быть меньше объема, изначально заполненного водой ( $S_- < S_0$ ). Малое изменение водонасыщенности приводит к заметному изменению количества льда вследствие существенного различия масштабов  $L_2 \gg \beta \approx L_1$ . Данная ситуация отражена на фиг. 3. Соответствующие этому случаю распределения давления и температуры качественно совпадают с изображенными на фиг. 1. Отличие состоит лишь в том, что изменилось значение давления на фронте и увеличился масштаб длины, на котором затухает возмущение давления.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Следует отметить, что изменение знака градиента давления меняет характер поведения насыщенностей на противоположный при изменении коэффициента  $k$ .

Вычисления проводились при следующих значениях параметров:  $\rho_w=10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_i=9,1 \cdot 10^2$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_s=2 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda_w=0,58$  Вт/м·К,  $\lambda_i=2,23$  Вт/м·К,  $\lambda_s=3,4 \cdot 10^{-2}$  Вт/м·К,  $\lambda_a=2,09$  Вт/м·К,  $C_w=4,19 \cdot 10^3$  Дж/кг·К,  $m=0,2$ ,  $C_i=2,09 \cdot 10^3$  Дж/кг·К,  $C_v=0,72 \cdot 10^3$  Дж/кг·К,  $C_s=0,92 \cdot 10^3$  Дж/кг·К,  $q=3,34 \cdot 10^5$  Дж/кг,  $\mu_w=1,8 \cdot 10^{-3}$  Па·с,  $\mu_a=1,8 \cdot 10^{-5}$  Па·с,  $R=287$  Дж/кг·К.

Рассмотренная физическая задача с градиентом давления возникает при изучении процесса бурения скважины с одновременным замораживанием, когда в качестве циркуляционной среды используется охлажденный сжатый воздух [10]. На основе представленной модели можно сделать вывод о том, что наиболее выгодным режимом с точки зрения укрепления пород является режим, когда давление циркулирующего воздуха близко к пластовому. В этом случае мерзлый грунт содержит максимальное количество льда.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цытович Н. А. Механика мерзлых грунтов. Общая и прикладная. М.: Высш. шк-ла, 1973. 446 с.
2. Жесткова Т. Н. Формирование криогенного строения грунтов. М.: Наука, 1982. 216 с.
3. Фельдман Г. М. Передвижение влаги в талых и промерзающих грунтах. Новосибирск: Наука, 1988. 258 с.
4. Низмагулин Р. И. Динамика многофазных сред. Ч. 2. М.: Наука, 1987. 359 с.
5. Николаевский В. Н., Васниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 339 с.
6. Menot J. M. Equations of frost propagation in unsaturated porous media // Eng. Geology. 1979. V. 13. № 1-4. P. 101-109.
7. Nakano Y., Tice A., Oliphant J. Transport of water in frozen soil. IV. Analysis of experimental results on the effects of ice content // Adv. Water Res. 1984. V. 7. P. 58-66.
8. Максимов А. М., Цыпкин Г. Г. Автомодельное решение задачи о протаивании мерзлого грунта // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 6, с. 136-142.
9. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
10. Кудряшов Б. Б., Яковлев А. М. Бурение скважин в мерзлых породах. М.: Недра, 1983. 286 с.