

УДК 532.529:534.2.22

© 1990 г.

Н. С. ХАБЕЕВ, В. Ш. ШАГАПОВ

**О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКА
В БИНАРНЫХ ПУЗЫРЬКОВЫХ СРЕДАХ**

Распространение малых возмущений в однокомпонентных системах жидкость — пузырьки пара изучалось в ряде работ, обсуждение которых содержится в обзоре [1].

В настоящей работе исследовано влияние состава и теплофизических свойств бинарных парожидкостных пузырьковых систем на особенности распространения малых возмущений, на устойчивость состояния таких сред, а также на интенсивность развития неустойчивости. Ранее в [2] был установлен эффект аномального влияния компонентного состава на распространение звука в таких средах.

1. Рассмотрим монодисперсную смесь двухкомпонентной жидкости со сферическими паровыми пузырьками.

Система макроскопических уравнений сохранения масс, числа пузырьков, импульса всей смеси, пульсационного движения для плоского одномерного движения в линейном приближении имеет вид [3]

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_{10} \frac{\partial v}{\partial x} = -I, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \rho_{20} \frac{\partial v}{\partial x} = I \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0$$

$$a_0 \frac{\partial w_1}{\partial t} + 4 \frac{\nu_1 w_1}{a_0} = \frac{p_2 - p_1 - 2\sigma/a}{\rho_{10}^{\circ}}$$

$$I = 4\pi a_0^2 n_0 j, \quad \rho = \rho_1 + \rho_2, \quad \rho_i = \rho_i^{\circ} \alpha_i, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{4}{3} \pi a^3 n$$

Индексы 1 и 2 относятся соответственно к параметрам жидкости и пара: $\rho_i, \rho_i^{\circ}, \alpha_i, v, p, n, a, w$ — соответственно значения средней по смеси и средней по фазе плотности, объемного содержания фаз, скорости, давления, числа пузырьков в единице объема смеси, радиуса пузырька и массовой скорости радиального движения фаз на поверхности пузырьков. I и j — интенсивности фазовых переходов, отнесенные к единице объема смеси и к единице площади поверхности раздела фаз; σ и ν_1 — коэффициенты поверхностного натяжения и вязкости жидкости. Параметры, соответствующие невозмущенному состоянию, снабжены дополнительно индексом 0 внизу.

В общем случае процессы межфазного теплопереноса в пузырьковой среде определяются распределением микропараметров (температур и концентраций) внутри и вокруг пузырьков. Если влияние обтекания пузырьков на эти процессы мало, что часто реализуется в пузырьковых средах, то правомочной становится сферически-симметричная схема описания микропроцессов [3].

Введем в каждой макроскопической точке среды x сферическую ячейку с пробным пузырьком в центре нее и приходящейся на него жидкостью. Размер ячейки определяется объемным газосодержанием и равен $a\alpha_2^{-1/3}$. Центры пробного пузырька и ячейки совпадают и движутся со скоростью

среды в этой точке $v(t, x)$. Микропараметры (отмеченные штрихом вверху) внутри и вокруг пробного пузырька зависят от времени, положения центра пробного пузырька x и расстояния r микрочастицы до центра.

Распределение микропараметров внутри и вокруг пробного пузырька описывается уравнениями соответствующих микропроцессов. При этом граничные условия на поверхности пробного пузырька и определяют интенсивность межфазного теплопереноса в среде. Исследование микрополей физических параметров вблизи пузырьков служит тем самым для замыкания системы уравнений для усредненных характеристик.

Система уравнений, описывающих распределение микропараметров внутри и вокруг гомобаричного пробного пузырька, может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \rho_{10}^{\circ} c_1 \frac{\partial T_1'}{\partial t} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_1 r^2 \frac{\partial T_1'}{\partial r} \right), & \frac{\partial g_1'}{\partial t} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(D_1 r^2 \frac{\partial g_1'}{\partial r} \right), & r > a_0 \\ \rho_{20}^{\circ} c_{2p} \frac{\partial T_2'}{\partial t} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_2 r^2 \frac{\partial T_2'}{\partial r} \right) + \frac{\partial p_2}{\partial t}, \\ \frac{\partial g_2'}{\partial t} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(D_2 r^2 \frac{\partial g_2'}{\partial r} \right), & r < a_0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь T_i' — температуры фаз; g_i' — массовые концентрации первого компонента бинарной системы в фазах; λ_i , D_i — коэффициенты теплопроводности и диффузии; c_1 , c_{2p} , c_{2v} — соответственно удельные теплоемкости жидкости и пара при постоянном давлении и объеме.

Уравнения состояния фаз примем в виде

$$p_1 = p_{10} + C_1^2 (\rho_1^{\circ} - \rho_{10}^{\circ}), \quad p_2' = \rho_2^{\circ} R T_2' \left(\frac{g_2'}{\mu_1} + \frac{1 - g_2'}{\mu_2} \right) \quad (1.3)$$

где C_1 — скорость звука в жидкости; R — универсальная газовая постоянная; μ_i — молекулярные веса компонентов. Предположим также, что для компонентов пара неидеального раствора выполняется закон Дальтона [4]

$$p_2 = \gamma_1 p_{s1}(T_a) N_1(g_{1a}) + \gamma_2 p_{s2}(T_a) (1 - N_1(g_{1a}))$$

$$N_i' = \frac{\mu_2 g_i'}{\mu_2 g_i' + \mu_1 (1 - g_i')}$$

Здесь p_{si} — давления насыщения чистых компонент; N_i' — молярная концентрация первого компонента в i -й фазе; γ_1 , γ_2 — коэффициенты активности. Нижний индекс a означает, что значения параметров соответствуют поверхности раздела фаз.

Для парциальных давлений чистых компонентов выполняются соотношения Клапейрона — Клаузиуса

$$\frac{dp_{si}}{dT_a} = \frac{\mu_i l_i p_{si}}{R T_a^2}, \quad i = 1, 2 \quad (1.4)$$

l_i — удельная теплота парообразования.

Граничные условия на поверхности раздела фаз в предположении, что теплота смешения компонент значительно меньше теплот испарения, могут быть записаны в виде

$$T_1' = T_2' = T_0, \quad j_1 l_1 + j_2 l_2 = \lambda_1 \frac{\partial T_1'}{\partial r} - \lambda_2 \frac{\partial T_2'}{\partial r} \quad (1.5)$$

$$g_{10} j_2 - (1 - g_{10}) j_1 = -\rho_{10}^{\circ} D_1 \frac{\partial g_1'}{\partial r} \quad (r = a_0)$$

$$g_{20}j_2 - (1-g_{20})j_1 = -\rho_{20} \circ D_2 \frac{\partial g_2'}{\partial r}$$

$$\rho_{10} \circ \left(\frac{\partial a}{\partial t} - w_1 \right) = \rho_{20} \circ \left(\frac{\partial a}{\partial t} - w_2 \right) = j, \quad j = j_1 + j_2$$

Здесь w_i — массовые скорости фаз на поверхности пузырька, j_i — скорость фазового перехода i -го компонента с единицы поверхности.

Кроме того,

$$\frac{\partial g_2'}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T_2'}{\partial r} = 0 \quad (r=0) \quad (1.6)$$

Для замыкания системы граничных соотношений необходимо задать еще по одному условию для T_1' , g_1' . В тех случаях, когда температурные и концентрационные перепады в жидкости вблизи поверхностей раздела фаз реализуются на расстояниях, значительно меньших, чем межпузырьковые расстояния, можно полагать

$$T_1' = T_0, \quad g_1' = g_{10} \quad (r=\infty) \quad (1.7)$$

Если эти расстояния сравнимы, то более правомерны условия адиабатичности и отсутствия массообмена между сферическими ячейками

$$\frac{\partial T_1'}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial g_1'}{\partial r} = 0 \quad (r = a_0 \alpha_{20}^{-1/2}) \quad (1.8)$$

Решение приведенной системы ищем в виде

$$p, v, w, n, a \sim \exp [i(Kx - \omega t)]$$

$$T' = T(r) \exp [i(Kx - \omega t)], \quad g' = g(r) \exp [i(Kx - \omega t)]$$

Из условия существования решения такого вида получим следующее дисперсионное соотношение

$$\frac{K^2}{\rho_0 \omega^2} = \frac{\alpha_{10}}{\rho_{10} \circ C_1^2} + \frac{3\alpha_{20}}{\psi} \quad (1.9)$$

$$\psi = \frac{3\gamma p_{20}}{\Pi} - \rho_{10} \circ \omega^2 a_0^2 - 4i\rho_{10} \circ v_1 \omega - \frac{2\sigma}{a_0}$$

$$\Pi = 1 + (\gamma - 1)(1 - \chi_1) \Pi_2(y_2) + \frac{\gamma}{A} [\chi_{12} S \Pi_1(z_1) A_g +$$

$$+ (\chi_1 \eta \Pi_1(y_1) + (\chi_1 - 1) \Pi_2(y_2)) A_T]$$

$$A_T = \chi_1 S \Pi_1(z_1) + \frac{g_{20}(1 - g_{20})}{g_{10}(1 - g_{10})} \chi_2 \Pi_2(z_2) - (1 - \gamma^{-1})(g_{20} - g_{10}) \chi_1 \chi_2 \Pi_2(y_2)$$

$$A_g = (g_{20} - g_{10}) \chi_1 [\chi_2 \eta \Pi_1(y_1) + (\chi_2 - 1) \Pi_2(y_2)] + g_{20}(1 - g_{20}) \chi_2 \Delta \Pi_2(z_2)$$

$$A = \frac{(g_{20} - g_{10})(N_{20} - N_{10})}{g_{10}(1 - g_{10})} \chi_1 \chi_2 [\eta \Pi_1(y_1) + \Pi_2(y_2)] +$$

$$+ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[\frac{\chi_1}{\chi_2} S \Pi_1(z_1) + \frac{g_{20}(1 - g_{20})}{g_{10}(1 - g_{10})} \frac{\chi_2}{\chi_1} \Pi_2(z_2) \right]$$

$$\Pi_1(x) = \frac{3}{x^2} \left[1 + x \frac{Mx \operatorname{th} x (M - 1) - 1}{Mx - \operatorname{th} x (M - 1)} \right],$$

$$\Pi_2(x) = \frac{3}{x^2} (x \operatorname{cth} x - 1), \quad \gamma = \frac{c_{2p}}{c_{2v}}, \quad M = \alpha_{20}^{-1/2}, \quad S = \frac{\rho_{10} \circ}{\rho_{20} \circ}, \quad \chi_i = \frac{c_{2p} T_0}{L_i}$$

$$L_i = l_1 g_{i0} + l_2 (1 - g_{i0}), \quad y_i = \left(-\frac{i \omega a_0^2}{\kappa_i} \right)^{1/2}$$

$$z_i = \left(-\frac{i \omega a_0^2}{D_i} \right)^{1/2} \quad (i=1, 2), \quad \kappa_1 = \frac{\lambda_1}{\rho_{10}^0 c_1}, \quad \kappa_2 = \frac{\lambda_2}{\rho_{20}^0 c_{2p}}$$

$$\eta = S \frac{c_1}{c_{2p}}, \quad \chi_{12} = \frac{l_2 - l_1}{L_1}, \quad \Delta = \frac{l_2 \mu_2 - l_1 \mu_1}{RT_0}$$

Выражение для Π записано в пренебрежении единицей по сравнению с S . Представленный вид для функции $\Pi_1(x)$ соответствует граничным условиям (1.8), а при (1.7) имеем

$$\Pi_1(x) = \frac{3}{x^2} (1+x) \quad (1.10)$$

Отметим, что учет распределения микропараметров совместно с решением макроскопических уравнений сильно усложняет решение задач волновой динамики пузырьковых жидкостей. Даже рассмотренный упрощенный учет распределения микропараметров внутри и вокруг пузырьков для одномерных нестационарных течений пузырьковых смесей (когда допускается сферическая симметрия микропроцесса и не учитывается влияние продольного обтекания включений) приводит к необходимости решения системы уравнений с частными производными от трех независимых переменных.

Используемый здесь подход для описания межфазного теплообмена в пузырьковой смеси был впервые предложен и применен в [5] при изучении ударных волн в жидкости с пузырьками газа.

На основе соотношения (1.9) можно провести анализ устойчивости равновесного состояния. При этом волновое число K является заданным положительным параметром. Тогда уравнение (1.9) при

$$\frac{\gamma \alpha_{20}}{\beta \alpha_{10}} < \Sigma, \quad \Sigma = \frac{2\sigma}{3\gamma a_0 p_{20}} \quad (1.11)$$

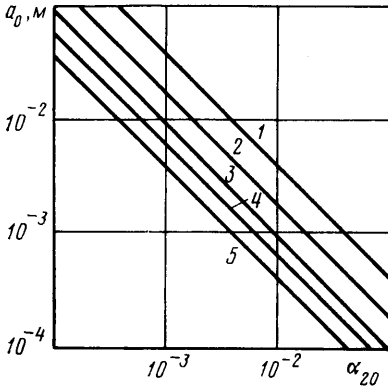
$$\beta = (\gamma - 1) \eta \chi_2^2$$

имеет решение вида $\omega = i\omega'$ ($\omega' > 0$). А это означает, что состояние равновесия смеси неустойчиво. При получении (1.11) не учитывается сжимаемость жидкости, но учтено, что обычно $\beta \alpha_{10} \gg \alpha_{20}$.

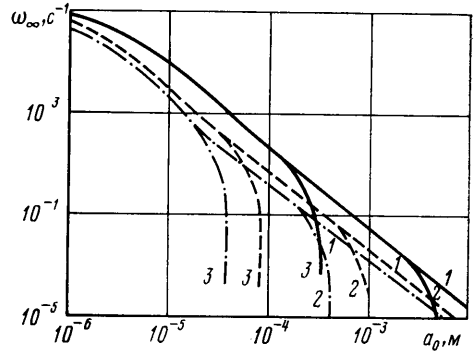
На фиг. 1 области, лежащие ниже представленных линий, соответствуют неустойчивым состояниям рассмотренной выше бинарной системы, состоящей из воды и этилового спирта, при $p_{10} = 0,1$ МПа. Кривые 1–5 соответствуют значениям $g_{10} = 1; 0,8; 0,5; 0,3$ и 0. Видно, что при переходе от воды к чистому этанолу область значений параметров a_0, α_{20} пузырьковой смеси, где она устойчива, значительно расширяется. В частности, при фиксированном объемном содержании пузырьков диапазон для радиусов возрастает примерно на один порядок. Отмеченное обстоятельство главным образом связано со значительным изменением коэффициента поверхностного натяжения [6, 7]. При анализе развития неустойчивости наиболее важно определение наибольшего значения инкремента ω_∞' , являющегося в данном случае корнем уравнения

$$\psi = 0 \quad (1.12)$$

На фиг. 2 представлены зависимости ω_∞' от радиуса пузырька. Кривые 1 соответствуют граничному условию (7), 2 и 3 — условию (1.8) при $\alpha_{20} = 10^{-2}, 10^{-1}$. Отметим, что при использовании (1.7) решения уравнения (1.12) не зависят от объемного содержания пузырьков. Видно, что с уве-



Фиг. 1



Фиг. 2

личением массового содержания этанола значение инкремента уменьшается. И, следовательно, темп развития неустойчивости с переходом от пароводяной смеси к этаноловой значительно снижается. Из фиг. 2 также следует, что если значения параметров a_0 и α_{20} лежат достаточно глубоко в области неустойчивости, то при определении ω_∞' можно пользоваться формулами, полученными при использовании условий изотермичности (1.7).

2. *Парогазожидкостные смеси.* Вышеизложенное имеет место в том случае, когда температура системы меньше, чем критические температуры для компонентов. Пусть один компонент является летучим, т. е. температура смеси выше, чем критическая температура для этого компонента. Задача о распространении малых возмущений в таких парогазожидкостных средах без учета капиллярных явлений рассмотрена в [8]. Функцию Π , соответствующую этому случаю, можно получить из (1.9), полагая $g_{10}=1$. После некоторых преобразований выражение для Π может быть представлено в виде

$$\Pi = 1 + \left[\frac{(\gamma - 1) H_g \Pi_2(y_2)}{g_0} + \frac{\gamma H_v \Pi_2(z_2)}{1 - g_0} \right] \left[\frac{H_g}{g_0} + \frac{\gamma \Pi_2(z_2)}{(1 - g_0) H_v \beta \Pi_1(y_1)} \right]^{-1} \quad (2.1)$$

$$g_0 = g_{20}, \quad H_g = \frac{B_g}{B_0}, \quad H_v = \frac{B_v}{B_0}$$

$$B_g = \frac{R}{\mu_2}, \quad B_v = \frac{R}{\mu_1}, \quad B_0 = B_v g_0 + B_g (1 - g_0)$$

Аналогично предыдущему смесь неустойчива, если

$$\frac{1}{\Phi} + \frac{g_0 \gamma \alpha_{20}}{\beta \alpha_{10}} < \Sigma, \quad \Phi = 1 + \frac{g_0 B_v}{(1 - g_0) B_g} \quad (2.2)$$

Если принять граничное условие (1.7), то вместо (2.2) имеем

$$\Phi \Sigma > 1 \quad (2.3)$$

Учитывая, что $p_{20} = p_{10} + 2\sigma/a_0$, условие неустойчивости (2.3) может быть переписано в виде

$$g_0 < g^*, \quad g^* = \frac{\Phi}{1 + \Phi}, \quad \Phi = \left(2 + 3p_{10} \frac{a_0}{2\sigma} \right) \frac{B_g}{B_v}$$

Если это условие пересчитать к парциальному давлению пара в пузырьках p_{s0} , то получим

$$p_{s0} < p_{10} + \frac{4}{3} \frac{\sigma}{a} \quad (2.4)$$

Приведенная формула для g совпадает с выражением для критической концентрации из [9], разделяющей значения паросодержания на две области, где вынужденные низкочастотные колебания парогазовых пузырьков соответственно подобны колебаниям газовых и паровых пузырьков.

Рассмотрим связь массы газовых зародышей m_g (т. е. массы «инертного» газа в пузырьках) с условиями устойчивости. Поскольку равновесное парциальное давление газа p_{g0} , пара p_{s0} и p_{l0} связаны следующим образом:

$$p_{g0} = p_{20} - p_{s0} = p_{l0} - p_{s0} + \frac{2\sigma}{a_0}$$

то для m_g можем записать

$$m_g = \frac{4}{3} \pi a_0^3 \left(p_{l0} - p_{s0} + \frac{2\sigma}{a_0} \right) (B_g T_0)^{-1}$$

Данное соотношение представим в виде

$$f(a_0) = a_0^3 - 2a_\sigma a_0^2 + m_* = 0 \quad (2.5)$$

$$a_\sigma = \frac{\sigma}{p_{s0} - p_{l0}}, \quad m_* = \frac{3}{4} \frac{m_g B_g T_0}{\pi (p_{s0} - p_{l0})}$$

Для недогретой жидкости $p_{l0} > p_{s0}$. В этом случае

$$a_0 > 0, \quad a_\sigma < 0, \quad f(0) = m_* < 0, \quad f'(0) = 3a_0^2 - 4a_\sigma a_0 \geq 0$$

и уравнение (2.5) относительно a_0 имеет одно решение, поэтому в этом случае существует единственный равновесный радиус, соответствующий заданному значению массы зародыша. В случае перегретой жидкости ($p_{s0} > p_{l0}$) имеем

$$f(0) = m_* > 0, \quad f(a_0) \rightarrow \infty \quad (a_0 \rightarrow \infty), \quad f'(a_0) = 0 \quad \left(a_0 = a_* = \frac{4}{3} a_\sigma \right)$$

Следовательно, чтобы уравнение (2.5) имело решение, необходимо

$$f(a_*) = m_* - \frac{32}{27} a_\sigma^3 \leq 0$$

Отсюда для массы зародышей получим условие

$$m_g \leq \frac{128}{81} \frac{\pi \sigma^3}{B_g T_0 (p_{s0} - p_{l0})} \quad (2.6)$$

При строгом неравенстве (2.6) уравнение (2.5) имеет два корня (решения) a_0, a_0' , удовлетворяющих условиям

$$\frac{4}{3} a_\sigma < a_0 < 2a_\sigma, \quad 0 < a_0' < \frac{4}{3} a_\sigma$$

Причем, как видно из этих соотношений, только для меньшего значения удовлетворяется условие устойчивости (2.4). Значения a_0 и a_0' связаны соотношениями

$$a_0' = a_1 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2a_0}{a_1}} \right), \quad a_1 = a_\sigma - \frac{a_0}{2}$$

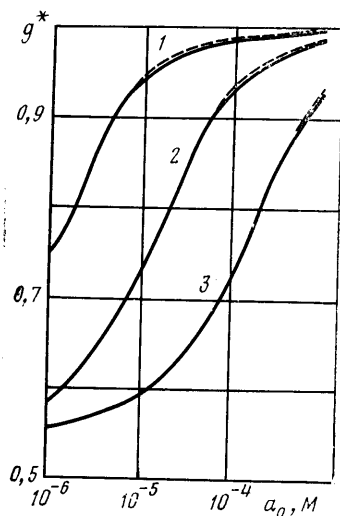
Неравенство (2.6) можно переписать в виде

$$\Delta p \leq \frac{8}{9} \sqrt{\frac{2\pi\sigma^3}{m_g B_g T_0}}, \quad \Delta P = p_{s0} - p_{10}$$

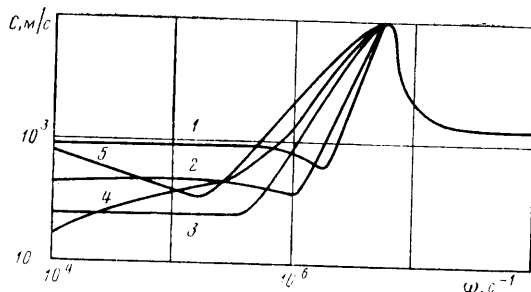
или с учетом уравнения Клапейрона – Клаузиуса

$$\Delta T \leq \frac{8}{9} \frac{T_0}{p_{s0}} \frac{B_v T_0}{l} \sqrt{\frac{2\pi\sigma^3}{m_g B_g T_0}}, \quad \Delta T = T_0 - T_s(p_{10})$$

Отсюда видно, что чем меньше масса газовых зародышей m_g , тем большее значение перегрева ΔT (а также Δp) может реализоваться в парогазожидкостных пузырьковых средах.



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 3 области, лежащие выше штриховых линий, соответствуют состояниям двухфазной среды с паровоздушными пузырьками, для параметров которой при $\alpha_{20} = 10^{-1}$ выполняется условие (2.2), а выше сплошных линий – условие (2.3). Кривые 1–3 соответствуют значениям давления в жидкости $p_{10} = 10^5, 10^4, 10^3$ Па. Как видно из фиг. 3, при учете газосодержания пузырьков граничные условия (1.7), (1.8) дают близкие результаты.

На фиг. 4 представлены зависимости фазовой скорости от частоты возмущений для воды с паровоздушными пузырьками при $p_{10} = 0,1$ МПа, $\alpha_{20} = 10^{-3}$, $a_0 = 10^{-5}$ м, иллюстрирующие влияние перехода от газожидкостных сред к неустойчивым парожидкостным смесям на характер дисперсионных кривых. Кривые 1–3 соответствуют устойчивым смесям с $g_0 = 10^{-2}; 0,5; 0,9$; 4 – для критической концентрации $g_0 = g_* = 0,95$; 5 – для смеси с чисто паровыми пузырьками.

На основе дисперсионного соотношения, имеющего в общем случае довольно сложный вид, для фазовой скорости и коэффициента затухания могут быть получены простые асимптотические формулы, справедливые для достаточно широкого диапазона изменения различных параметров двухфазной среды и возмущений. Для устойчивых смесей имеем следующее выражение для равновесной фазовой скорости:

$$C_e = C_0 \left(\Phi^{-1} + \frac{g_0 \gamma \alpha_{20}}{\beta \alpha_{10} - \Sigma} \right)^{1/2}, \quad C_0 = \sqrt{\frac{p_{10}}{\rho_1 \alpha_{10} \alpha_{20}}}, \quad (2.7)$$

Если параметры смеси удовлетворяют условию (2.2), то равновесная скорость равна бесконечности, а коэффициент затухания при этом стремится к нулю (фиг. 4, кривые 5), и это обстоятельство также является признаком неустойчивости смеси.

Равновесная скорость достигается для достаточно низких частот, когда

$$|z_2|, |y_2|, |y_1| (M-1) \ll 1 \quad (2.8)$$

Последнее из этих условий более сильное. Оно означает, что температурные неравновесности в жидкости реализуются на расстояниях, сравнимых с пузырьковыми расстояниями. Отметим, что диапазон частот (2.8), с точки зрения практического интереса, довольно низкий. При $\alpha_{20}=10^{-3}$, $a_0=10^{-4}$ м, например, имеем $\omega \ll \approx 10^{-1}$ с $^{-1}$.

Рассмотрим асимптотику дисперсионного соотношения при условиях

$$|z_2|, |y_2|, |y_1| \gg 1 \quad (2.9)$$

которые означают, что температурные и диффузионные неравновесности между фазами реализуются в тонких слоях вблизи поверхности раздела фаз. При этом величины $|z_i|, |y_i|$ можно интерпретировать как отношение радиуса пузырьков к толщине этих температурных и диффузионных пограничных слоев. В (2.9) первое и второе условия более сильные и, поскольку обычно $Le_2 = \kappa_2/D_2 \sim 1$, из них следует, что

$$\sqrt{\omega} \gg \sqrt{\omega_{2T}} = \sqrt{\kappa_2/a_0^2} \quad (2.10)$$

При выполнении (2.10) можно записать следующие асимптотические соотношения

$$\Pi_2(x) = \frac{3}{x}, \quad \frac{\Pi_2(y_2)}{\Pi_2(z_2)} = \sqrt{Le_2},$$

$$\frac{\Pi_1(y_1)}{\Pi_2(z_2)} = \sqrt{Le_1}, \quad Le_1 = \frac{\kappa_1}{D_2}$$

и тогда выражение для Π можно представить в виде

$$\Pi = 1 + 3\beta_g y_2^{-1} \quad (2.11)$$

$$\beta_g = \left[\gamma - 1 + \frac{\gamma g_0}{(1-g_0)\gamma\sqrt{Le_2}} \frac{B_v}{B_g} \right] \left(1 - \frac{\gamma g_0 \Phi}{\beta\sqrt{Le_1}} \right)^{-1}$$

Рассмотрим частоты, которые кроме (2.10) удовлетворяют условию

$$\frac{|y_2|}{3\beta_g} \gg 1$$

Отсюда имеем

$$\sqrt{\omega} \gg \sqrt{\omega_*} = 3\beta_g \sqrt{\omega_{2T}} \quad (2.12)$$

Для газовых и паровых пузырьков соответственно получим

$$\sqrt{\omega_*} = 3(\gamma-1)\sqrt{\omega_{2T}} \quad (g_0=0), \quad \sqrt{\omega_*} = 3\beta\sqrt{\omega_{1T}}, \quad \omega_{1T} = \frac{\kappa_1}{a_0^2} \quad (g_0=1)$$

Следовательно, коэффициент $\beta_g/(\gamma-1)$ при переходе от газовых пузырьков к паровым непрерывно меняется от единицы до $\beta\sqrt{\kappa_1/\kappa_2}/(\gamma-1)$. Для большинства веществ обычно $\beta\sqrt{\kappa_1/\kappa_2} \gg 1$, поэтому условие (2.12) более сильное, чем (2.10). Тогда для частот, удовлетворяющих (2.12), и в то же время значительно меньших, чем резонансная частота [3], т. е.

$$\omega \ll \omega_m, \quad \omega_m = \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{3\gamma p_0}{\rho_{10} \alpha_{10} \alpha_{20}}}$$

для фазовой скорости и коэффициента затухания, имеем выражения

$$C_p = \left(\frac{\alpha_{10}^2}{C_1^2} + \frac{1}{C_{01}^2} \right)^{-1/2}, \quad \delta = \frac{3}{2} \frac{\beta_g C_p}{C_{01}^2} \sqrt{\frac{\omega \omega_{2T}}{2}}, \quad C_{01} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_{10} \alpha_{10} \alpha_{20}}} \quad (2.13)$$

При этом не учитывается влияние вязких и капиллярных эффектов. Отсюда, если пренебречь также сжимаемостью жидкости ($C^2 \ll C_1^2$), получим

$$C_p = C_{01}, \quad \delta = \frac{3}{2} \frac{\beta_g}{C_{01}} \sqrt{\frac{\omega \omega_{2T}}{2}} \quad (2.14)$$

Таким образом, в диапазоне частот $\omega_* \ll \omega \ll \omega_m$ теплообмен и фазовые переходы в плане определения скорости распространения малых возмущений «замораживаются», т. е. они мало сказываются на ее значении. Если для достижения скоростей, определяемых по (2.13) и (2.14), в случае газовых пузырьков необходимо только, чтобы частота возмущений была настолько большой, чтобы радиус пузырьков был значительно больше, чем толщина температурного пограничного слоя в газовой сфере, то для парогазовых и паровых пузырьков этого не достаточно. Здесь отношение этих величин должно быть гораздо больше, чем параметр β_g , который в свою очередь может принимать значения, намного превышающие единицу. Из-за сильного изменения β_g при переходе от газовых пузырьков к паровым коэффициент затухания также меняется в значительных пределах. При получении (2.13) мы полагали, что характерные частоты ω_* и ω_m удовлетворяют условию $\omega_*/\omega_m \ll 1$. Отсюда получим ограничение для радиуса пузырьков

$$a_0 \gg a_* = 9\beta_g^2 \kappa_2 \sqrt{\rho_{10}^0 / 3\gamma p_0} \quad (2.15)$$

Для паровоздушной водяной смеси, например, при $p_{10} = 0,1$ МПа величина a_* меняется от 10^{-6} м (для смеси с воздушными пузырьками) до 10^{-3} м (для смеси с паровыми пузырьками). Вследствие оценки (27) для расчетных кривых 2–5 на фиг. 4 значения скоростей, определяемые по (2.13) и (2.14), не достигаются.

Для частот, превышающих верхнюю грань полосы непропускания [10]

$$\omega_c = \omega_m \sqrt{1 + \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{2*}}}, \quad \alpha_{2*} = \frac{\gamma p_0}{\rho_{10}^0 C_1^2}$$

можно записать следующие асимптотические выражения:

$$C_p = \frac{C_1}{\alpha_{10}}, \quad \delta = \frac{9}{2} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \frac{\beta_g C_1}{a_0^2} \frac{\omega_m^2}{(\omega_m^2 - \omega^2)^2} \sqrt{\frac{\omega \omega_{2T}}{2}} \quad (2.16)$$

Как видно из формулы (2.16), а также из фиг. 4, в области $\omega > \omega_c$ с увеличением частоты фазовая скорость стремится к скорости звука в чистой жидкости, а коэффициент затухания стремится к нулю. Это, как отмечено в [1], связано с использованием схемы несжимаемой жидкости для описания ее радиального движения вокруг пузырьков. Анализ показывает, что вся высокочастотная ветвь дисперсионной кривой $\omega > \omega_c$ находится практически на пределе выполнения основной гипотезы многофазных сред, заключающейся в том, что длины волн должны быть значительно больше размеров пузырьков, а также средних расстояний между ними, поэтому принятую модель нельзя использовать для описания эволюции высокочастотного упругого предвестника, распространяющегося со скоростью звука в чистой жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Губайдуллин А. А., Ивандеев А. И., Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С. Волны в жидкостях с пузырьками // Итоги науки и техники. Мех. жидкости и газа. ВИНТИ. 1982. Т. 17. С. 160–249.
2. Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С., Шагапов В. Ш. Эффект аномального влияния компонентного состава в акустике кипящих растворов // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304. № 6. С. 1323–1328.
3. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
4. Кириллин В. А., Шейндлин А. Е., Шпильрайн Э. Э. Термодинамика растворов. М.: Энергия, 1980. 287 с.
5. Айдагулов Р. Р., Хабеев Н. С., Шагапов В. Ш. Структура ударной волны в жидкости пузырьками газа с учетом нестационарного межфазного теплообмена // ПМТФ. 1977. № 3. С. 67–74.
6. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.
7. Справочник химика. Т. 3. М.; Л.: Химия, Ленингр. отд-ние. 1965. 1005 с.
8. Шагапов В. Ш. Учет нестационарного теплообмена в задаче о распространении малых возмущений в жидкости с пузырьками // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 4. С. 157–162.
9. Нагиев Ф. Б., Хабеев Н. С. Эффекты теплообмена и фазовых переходов при колебаниях парогазовых пузырьков // Акуст. журн. 1979. Т. 25, № 2. С. 271–279.
10. Ван Вейнгарден Л. Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа // Реология суспензий. М.: Мир, 1975. С. 68–103.

Москва

Поступила в редакцию
20.III.1989