

УДК 532.526.2+536.242

© 1990 г.

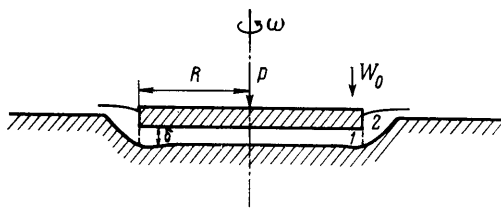
А. А. ШУГАЙ

ЗАДАЧА О ПРОПЛАВЛЕНИИ ТВЕРДОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ВРАЩАЮЩИМСЯ НАГРЕТЫМ ДИСКОМ И КОЛЬЦОМ

Трение твердых тел при высокой скорости и большой нагрузке на скользящем контакте может сопровождаться переходом тел в зоне фрикционного контакта в пластическое и жидкое состояние [1]. В работе изучается стадия развитого жидкого слоя без учета пластической деформации трущихся тел, при этом считается, что все выделяющееся тепло идет только на расплавление материала тела. Попытки теоретического рассмотрения этой стадии проводились ранее в приближении постоянной толщины жидкого слоя с использованием уравнения теплового баланса [1, 2]. В данной работе профили скорости и температуры аппроксимируются квадратичными зависимостями по поперечной координате с коэффициентами, зависящими от продольной координаты. Последние определяются из граничных условий и интегральных соотношений теории пограничного слоя.

Полученные зависимости применены к определению скорости проплавления вращающимся нагретым кольцом ледяного образца.

1. Постановка задачи. Диск $\{(r, \varphi, z), z \geq 0, r \leq R\}$ прижат к полупространству $z \leq 0$ силой P (фиг. 1). Диск вращается с угловой скоростью ω . Вследствие трения диска о полупространство и потока тепла от диска в



Фиг. 1

области фрикционного контакта образуется жидкостная прослойка толщиной $\delta = \delta(r)$. Из-за расхождения материала полупространства диск перемещается вдоль оси z со скоростью W_0 вниз. Рассматривается начальная стадия проплавления, когда расплав выдавливается из-под диска и влиянием области 2 (свободная струя) на область 1 можно пренебречь. Однако считается, что развитая жидкостная прослойка под диском сформировалась и движение жидкости в ней стационарно в системе координат, опускающейся вместе с диском. Определим движение жидкости в слое расплава и силовые характеристики взаимодействия диска и полупространства в рамках теории пограничного слоя

$$u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\rho c_v \left(u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right]$$

Здесь (r, φ, z) — система координат, опускающаяся вместе с диском, (u, v, w) — компоненты скорости в этой системе координат, ρ, μ, k — постоянные коэффициенты плотности, вязкости, теплопроводности. Граничные условия для системы (1.1)

$$\begin{aligned} z=0: \quad T=T_w \quad (\geq T_c), \quad w=0, \quad u=0, \quad v=r\omega \quad (1.2) \\ z=-\delta(r): \quad T=T_c, \quad \rho W_0 L_c = k \frac{\partial T}{\partial z}, \quad u=0, \quad v=0, \quad w=W_0 \end{aligned}$$

Здесь T_c — температура плавления, L_c — удельная теплота плавления, c и T_s — теплоемкость и температура полупространства. Отток тепла в полупространство в случае $T_s < T_c$ учтен введением вместо L_c величины $L_c = L_c + c(T_c - T_s)$, что соответствует решению внешней задачи Стефана в одномерной автомодельной постановке.

2. Построение решения. Ограничимся для отыскания решений $u(r, z)$, $v(r, z)$, $T(r, z)$ квадратичными профилями по z с коэффициентами, зависящими от r [3]. Последние определяются из граничных условий (1.2) и интегральных соотношений, полученных интегрированием системы (1.1) поперек слоя

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \int_{-\delta}^0 u^2 dz + \frac{1}{r} \int_{-\delta}^0 (u^2 - v^2) dz = -\frac{\delta}{\rho} \frac{dp}{dr} + v \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{-\delta}^0 \\ \frac{d}{dr} \int_{-\delta}^0 uv dz + \frac{2}{r} \int_{-\delta}^0 uv dz = v \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{-\delta}^0, \quad \int_{-\delta}^0 u dz = \frac{W_0 r}{2} \quad (2.1) \\ \frac{\rho c_v}{r} \frac{d}{dr} \int_{-\delta}^0 ruT dz = \rho c_v T_c W_0 + k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{-\delta}^0 + \mu \int_{-\delta}^0 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] dz \end{aligned}$$

Профили двух компонент скорости и температуры с учетом граничных условий имеют вид

$$\begin{aligned} u = U\eta(1+\eta), \quad v = r\omega + (V+r\omega)\eta + V\eta^2, \quad \eta = z/\delta \quad (2.2) \\ T = T_w + (2(T_w - T_c) - \rho\delta W_0 L_c/k)\eta + (T_w - T_c - \rho\delta W_0 L_c/k)\eta^2 \end{aligned}$$

Профиль температуры восстановился полностью. Причем если $\rho W_0 L_c \delta / (k(T_w - T_c)) < 2$, то профиль температур в слое монотонен (теплого потока вследствие теплопроводности достаточно для обеспечения заданной скорости проплавления), в противном случае существенную роль играет вязкая диссипация и температура достигает максимума внутри слоя. Случай $\rho W_0 L_c \delta / (k(T_w - T_c)) = 2$ соответствует равновесной температуре стенки. Таким образом, имеется качественное соответствие профиля температур характеру тепловых явлений в слое расплава.

Подставляя распределения $u(r, z)$, $v(r, z)$, $T(r, z)$ в интегральные соотношения (2.1) и учитывая граничные условия (1.2), в безразмерных переменных получим

$$\begin{aligned} \delta_1 = \frac{\delta}{h}, \quad r_1 = \frac{r}{h}, \quad h = \frac{v}{W_0}, \quad \omega_1 = \frac{\omega h}{W_0}, \quad V_1 = \frac{V}{W_0} \\ p_1 = \frac{p}{\rho W_0^2}, \quad \text{Pr} = \frac{c_v \mu}{k}, \quad \text{Ste} = \frac{c_v (T_w - T_c)}{L_c}, \quad \text{Ec} = \frac{W_0^2}{L_c} \\ \frac{d\delta_1}{dr_1} = \frac{1}{r_1} \left\{ 20 \frac{\text{Ste}}{\text{Pr}^2} \frac{1}{\delta_1} - \frac{20}{\text{Pr}} + 10 \frac{\text{Ec}}{\text{Pr}} \frac{1}{\delta_1} \left[3 \frac{r_1^2}{\delta_1^2} + \frac{V_1^2}{3} + r_1^2 \omega_1^2 \right] - 2\delta_1 - 3 \frac{\text{Ste}}{\text{Pr}} \right\} \\ r_1 \frac{dV_1}{dr_1} = -20 \frac{V_1}{\delta_1} - 3V_1 + 10\omega_1 r_1 \quad (2.3) \end{aligned}$$

$$\frac{dp_1}{dr_1} = \frac{1}{30\delta_1^3} \left\{ 180 \frac{\text{Ste}}{\text{Pr}^2} \frac{r_1}{\delta_1} + 90 \frac{\text{Ec}}{\text{Pr}} \frac{r_1}{\delta_1} \left[3 \frac{r_1^2}{\delta_1^2} + \frac{V_1^2}{3} + r_1^2 \omega_1^2 \right] - \right. \\ \left. - 9r_1 \left(3 \frac{\text{Ste}}{\text{Pr}} + \frac{20}{\text{Pr}} + 20 \right) - 45r_1 \delta_1 - 5\delta_1^3 V_1 \omega_1 + \frac{\delta_1^3 V_1^2}{r_1} + 10\delta_1^3 r_1 \omega_1^2 \right\}$$

Система двух первых уравнений (2.3) имеет при $r=0$ особую точку $V_1=0$, $\delta_1=\delta_0$ — положительный корень квадратного уравнения

$$2\delta_0^2 \text{Pr} + (20+3 \text{Ste}) \delta_0 - 20 \text{Ste}/\text{Pr} = 0$$

Единственная интегральная кривая — сепаратриса, выходящая из особой точки вдоль оси r . Однако при $r=0$ теплопередача осуществляется в основном за счет теплопроводности вдоль оси z . Поэтому толщина слоя $\delta_1(0)$ может быть определена из решения одномерной автоматической задачи Стефана для уравнения теплопроводности. Получаемое таким образом значение $\delta_1(0)=\delta_s=\ln(1+\text{Ste})/\text{Pr}$. При $\text{Ste}<1$ справедлива оценка $|\delta_0-\delta_s|/\delta_s < 0,3 \text{Ste}$. Близость δ_0 и δ_s при малых числах Стефана может рассматриваться как подтверждение применимости грубой квадратичной аппроксимации профиля температуры, так как при этом квадратичный профиль достаточно хорошо моделирует «точный» экспоненциальный профиль температуры указанной задачи Стефана.

В случае реальных условий диск тормозится вследствие трения, поэтому практический интерес представляет нестационарная задача, в которой $\omega=\omega(t)$. В работе [4] получена линейная по $\dot{\omega}/\omega$ поправка к полученным зависимостям.

3. Проплавление полупространства вращающимся кольцом. Практический интерес (сварка труб трением) представляет проведение изложенного выше решения применительно к случаю кольца $\{(r, \varphi, z), z \geq 0, R_0 \leq r \leq R_1, 0 < R_0 < R_1\}$. Соответствующая обезразмеренная система уравнений имеет вид

$$\frac{d\delta_1}{dr_1} = \frac{1}{r_1^2 - r_0^2} \left\{ 20 \frac{\text{Ste}}{\text{Pr}^2} \frac{r_1}{\delta_1} - 20 \frac{r_1}{\text{Pr}} + 10 \frac{\text{Ec}}{\text{Pr}} \frac{r_1}{\delta_1} \left(\frac{3(r_1^2 - r_0^2)^2}{r_1^2 \delta_1^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{V_1^2}{3} + r_1^2 \omega_1^2 \right) - 2r_1 \delta_1 - 3 \frac{\text{Ste}}{\text{Pr}} r_1 \right\} \\ \frac{dV_1}{dr_1} \left(1 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) r_1 + V_1 \left(3 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) + 5 \frac{r_0^2 \omega_1}{r_1} - 10 \omega_1 r_1 = -20 \frac{V_1}{\delta_1} \\ \frac{dp_1}{dr_1} = \frac{1}{30r_1 \delta_1^3} \left\{ \frac{d\delta_1}{dr_1} \frac{9(r_1^2 - r_0^2)^2}{r_1} - 9\delta_1 \left(3r_1^2 + 2r_0^2 - \frac{r_0^4}{r_1^2} \right) - \right. \\ \left. - 5\delta_1^3 r_1 \omega_1 V_1 + \delta_1^3 V_1^2 + 10\delta_1^3 r_1^2 \omega_1^2 - 180(r_1^2 - r_0^2) \right\} \quad (3.1)$$

При $r_1=r_0=R_0 W_0/\nu$ система имеет особенность, соответствующее значение $\delta_1=\delta_0$ — корень уравнения 4-й степени (для рассматриваемого ниже модельного примера, когда вращающееся кольцо проплавляет лед, в широкой области параметров задачи $|T_w - T_c| < 10^\circ$, $W_0=0,01-2$ см/с этот корень единствен). Соответствующая интегральная кривая — единственна и является сепаратрисой, выходящей из особой точки параллельно оси r , если

$$f(r_0, \delta_0) = (10 + \delta_0)^3 \left(\frac{20}{\text{Pr}} + 4\delta_0 + \frac{3 \text{Ste}}{\text{Pr}} \right) - 1250 \text{Ec} \delta_0 \frac{\omega_1^2 r_0^2}{3 \text{Pr}} > 0$$

В противном случае из особой точки выходит множество интегральных кривых. При $f > 0$ ситуация близка к диску и задача полностью опре-

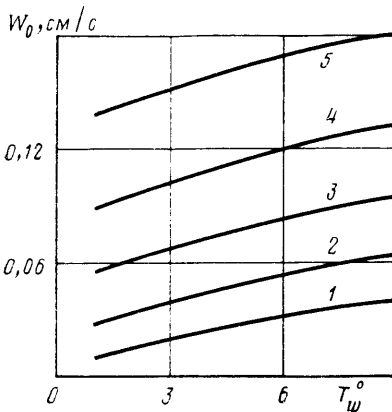
делена краевыми условиями

$$r_1=r_0: \quad \delta_1=\delta_0, \quad V_1=2,5\omega_1r_0\delta_0/(10+\delta_0). \\ r_1=r_e=R_1W_0/\nu: \quad p_1=0 \quad (3.2)$$

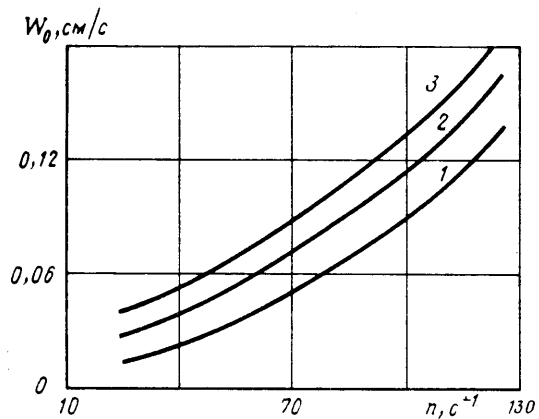
В случае $f < 0$ ситуация ближе к коньку, проплавляющему полупространство [4], и необходимо еще одно граничное условие, например $p_1(r_0)=0$ (для системы уравнений (3.1) получается уже краевая задача).

Вопрос постановки краевых условий при $r=R_0, R_1$ достаточно сложен. Можно воспользоваться подходом [4], склеивая решение задачи под диском (кольцом) с решением задач о свободных струях (внешней — в случае диска, внутренней и внешней — в случае кольца) по ряду интегральных характеристик: расходу, потоку тепла, потоку импульса. Если такие решения можно склеить, то выставленные краевые условия модифицируются незначительно. Однако возможна ситуация, рассмотренная в [4], когда для случая достаточно большого перепада температур $T_w - T_c$ (толщина слоя под диском или кольцом велика) такая склейка неосуществима. В узкой области вблизи $r=R_1$ происходит перестройка течения, давление резко падает и выставленное краевое условие $p(R_1)=0$ неприменимо.

4. Численный расчет. Построенное решение применено к определению скорости проплавления вращающимся нагретым кольцом $R_0=13,5$ см, $R_1=16,5$ см ледяного образца ($T_w=T_c=0^\circ$, $L_e=L_c=3,33 \cdot 10^9$ см²/с², $c_0=4,17 \cdot 10^7$ см²/(с²·град), $\nu=0,015$ см²/с, $k=6,48 \cdot 10^4$ (г·см)/(с²·град)). Интегрируется система пяти уравнений: три уравнения



Фиг. 2



Фиг. 3

(3.1) и два уравнения для определения прижимающей силы P и крутящего момента M со следующими начальными условиями

$$\frac{df_1}{dr_1} = r_1 p_1, \quad \frac{df_2}{dr_1} = (V_1 + r_1 \omega_1) \frac{r_1^2}{\delta_1} \\ r_1=r_0: \quad \delta_1=\delta_0, \quad p_1=0, \quad f_1=0, \quad f_2=0 \\ V_1=2,5\omega_1r_0\delta_0/(10+\delta_0) \quad r_1 \in [r_0, r_e].$$

После решения системы восстанавливаются размерные характеристики

$$P = (f_1 - p_1(r_e)(r_e^2 - r_0^2)/2) 2\pi\rho\nu^2, \quad M = f_2 2\pi\rho\nu^3/W_0$$

Выход из особой точки моделируется следующим образом: решение, соответствующее сепаратрисе, продолжается на интервал

$$r_1 \in [r_0, r_0 + \varepsilon(r_e - r_0)], \quad \varepsilon = 0,001$$

после чего склеивается с решением на интервале $[r_0 + \varepsilon(r_e - r_0), r_e]$, которое находится методом Гира с контролем точности. Используя метод перемены знака, по заданному значению $P=10^6$ Дин определялась соответствующая скорость проплавления W_0 .

Зависимости скорости проплавления от температуры диска T_w при фиксированной угловой скорости $\omega=2\pi n$ и от угловой скорости при фиксированной температуре приведены на фиг. 2 (кривые 1-5 соответствуют $n=25, 50, 75, 100, 125 \text{ с}^{-1}$), фиг. 3 (кривые 1-3 соответствуют $T_w=1, 5, 9^\circ$). Оказалось, что изменение прижимающей силы P на порядок весьма слабо сказывается на изменении скорости W_0 , последняя, таким образом, определяется в основном угловой скоростью вращения и температурой кольца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амосов А. П. Фрикционный разогрев и образование пластической и жидкой прослоек в зоне скользящего контакта твердых тел // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 2. С. 280-284.
2. Черный Г. Г. Движение плавящегося твердого тела между двумя упругими полупространствами / Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 4. С. 813-818.
3. Шугай А. А. Трение твердых тел с образованием слоя расплава // Отчет № 3668. М.: Изд-во МГУ. 1988.

Поступила в редакцию
2.III.1989