МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1990

УДК 532.5

А. Ю. КЛИМЕНКО

СОВМЕСТНАЯ ДИФФУЗИЯ РАЗЛИЧНЫХ ПРИМЕСЕЙ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Получены осредненные уравнения, описывающие турбулентную диффузию одной химически активной примеси в координатах, связанных с мгновенными значениями концентрации другой пассивной примеси. Результаты допускают естественное обобщение и на случай произвольного количества различных химически активных примесей. Преимуществом такого подхода является разделение масштабов флуктуационного и среднего движений, что делает предлагаемые осредненные диффузионные соотношения применимыми уже на временах, принадлежащих инерционному интервалу.

Потребность в получении характеристик совместного диффузионного переноса различных примесей возникает во многих задачах физической кинетики в турбулентных потоках [1, 2]. В [1] рассматриваются некоторые частные решения и предложен оценочный метод анализа диффузии горючего в бедной части факела.

1. Постановка задачи. Мгновенные уравнения, описывающие различные кинетические процессы в турбулентном потоке, можно записать в следующей форме:

$$\rho\frac{\partial c}{\partial t}+\rho(\mathbf{v}\nabla)c-\operatorname{div}(D_c\rho\nabla c)=W\rho \tag{1.1}$$

$$\rho\frac{\partial z}{\partial t}+\rho(\mathbf{v}\nabla)z-\operatorname{div}(D_z\rho\nabla z)=0 \tag{1.2}$$

Уравнение (1.2) описывает турбулентный перенос пассивной примеси, не участвующей в химических реакциях. Концентрация z нормируется таким образом, что в области, где жидкость является турбулентной $0<z<1$, а в областях потенциального течения $z=0$ и $z=1$. Концентрация активной примеси c зависит от результатов реакции и удовлетворяет уравнению (1.1) с источниковым членом $W(z, c)$. При осреднении уравнения (1.1) (особенно в случае резкой зависимости W от z и c) возникает необходимость в отыскании совместных характеристик полей концентрации z и c. Предполагается, что активная примесь на динамические параметры турбулентности существенно не воздействуют. В систему кинетических уравнений (1.1), (1.2), вообще говоря, может входить n уравнений относительно концентраций различных примесей c_i с источниковыми членами $W_i(z, c_1, \ldots, c_n)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Ниже рассматриваются соотношения для одной активной примеси, но это не накладывает на систему кинетических уравнений никаких ограничений, так как все проводимые рассуждения могут быть применены для каждой концентрации примеси c_i.

В некоторых частных случаях между концентрациями z и c может быть получено простое стационарное соотношение. Например, если $D_z=D_c$ и $W=0$, то зависимость $c(z)=a_1z+a_2$ (a_1, a_2 — константы) обращает систему (1.1), (1.2) в тождество. Такие решения назовем равновесными. Другой тип равновесных решений получен в [1] для турбулентного горения не перемешанных заранее газов при источнике, имеющем ярко выраженный максимум в окрестности Δz стехиометрического значения $z=$

$=z_s$. Решение представимо следующими соотношениями:

$$c(z)=0,\quad 0<z<z_s-\Delta z$$

$$N\frac{d^2c(z)}{dz^2}=-W(z,c(z)),\qquad z_s-\Delta z<z<z_s+\Delta z \tag{1.3}$$

$$c(z)=\frac{c(1)}{1-z_s}(z-z_s),\qquad z_s+\Delta z<z<1$$

где N — мгновенное или осредненное значение скалярной диссипации $N=D(\nabla z)^2$. Зависимость (1.3) может использоваться лишь при выполнении условия квазистационарности, для чего необходимо, чтобы $\Delta z\ll z_\sigma$ (z_σ — характерный макромасштаб пульсаций концентрации z).

Наличие стационарной связи между мгновенными значениями c и z является скорее исключением, чем правилом. В теории конденсации, где z имеет смысл замороженных термодинамических параметров, а c — концентрации конденсата, соотношение типа (1.3) построить невозможно [2]. Такая же ситуация возникает и во многих задачах теории горения, например при диффузии горючего в бедной части факела, для которой в [1] предложен интегральный оценочный метод.

Подробной характеристикой поля концентрации z является распределение плотности вероятности концентрации примеси $P(z)$, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}(P(z)\rho)+\operatorname{div}(\langle \mathbf{v}\rangle_z P(z)\rho)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\langle N\rangle_z P(z)\rho)=0 \tag{1.4}$$

где $\rho=\rho(z)$ — плотность среды.

Уравнение (1.4) получено в [1], где также проанализированы коэффициенты $\langle \mathbf{V}\rangle_z$ и $\langle N\rangle_z$, а для $P(z)$ проведены численные расчеты и построены аналитические приближения. Важным экспериментально подтвержденным результатом является независимость условно осредненной скалярной диссипации $\langle N\rangle_z$ от значения z внутри турбулентного потока $0<z<1$, что связано со слабой статистической зависимостью между мелкомасштабными пульсациями (определяющими мгновенное значение N) и крупномасштабными (определяющими мгновенное значение z) [1]. Это свойство относится только к пассивной примеси, для концентрации которой граничные условия задаются способом, описанным выше, и отсутствует источниковый член.

2. Уравнение для условно осредненной концентрации $\langle c\rangle_z$. Получим прежде всего соотношение для совместной плотности вероятности пассивной и активной примесей — функции $P(z,\ c)$, зависящей также от параметров $\mathbf{x}$ и t. Коэффициенты диффузии D_z и D_c положим сначала одинаковыми и равными D, а затем обобщим результаты на случай различных коэффициентов диффузии.

Введем зависящую от реализаций полей $z(\mathbf{x},\ z)$ и $c(\mathbf{x},\ t)$ функцию $\psi=\delta(z(\mathbf{x},\ t)-z^\circ)\delta(c(\mathbf{x},\ t)-c^\circ)$ физических координат $\mathbf{x}$ и t и параметров c° и z°. Воспользовавшись правилами дифференцирования дельта-фракций Дирака [3], получим следующие тождества:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial c^\circ}\left(\frac{\partial c}{\partial t}\psi\right)-\frac{\partial}{\partial z^\circ}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\psi\right) \tag{2.1}$$

$$\nabla\psi=-\frac{\partial}{\partial c^\circ}(\psi\nabla c)-\frac{\partial}{\partial z^\circ}(\psi\nabla z) \tag{2.2}$$

$$\operatorname{div}(D\rho\nabla\psi)=\frac{\partial^2}{(\partial c^\circ)^2}((\nabla c)^2D\rho\psi)+2\frac{\partial^2}{\partial c^\circ\,\partial z^\circ}((\nabla c\cdot\nabla z)D\rho\psi)+$$
$$+\frac{\partial^2}{(\partial z^\circ)^2}((\nabla z)^2D\rho\psi)-\frac{\partial}{\partial c^\circ}(\psi\operatorname{div}(D\rho\nabla c))-\frac{\partial}{\partial z^\circ}(\psi\operatorname{div}(D\rho\nabla z)) \tag{2.3}$$

Далее подставим в равенство (2.1) соотношения (1.1), (1.2), (2.2), (2.3), и для придания конвективным членам дивергентной формы записи сложим полученное равенство с домноженным на функцию ψ неосредненным уравнением неразрывности. Полученное соотношеине осредним с учетом тождеств $\langle\psi\rangle=P(z^\circ, c^\circ)$, $\langle B\psi\rangle=\langle B\rangle_{z^\circ c^\circ}P(z^\circ, c^\circ)$, где $\langle B\rangle_{z^\circ c^\circ}$ означает осреднение величины B при условии $z=z^\circ$, $c=c^\circ$. Так как химически активная примесь на динамические характеристики турбулентности не воздействует, то плотность зависит в изобарическом приближении только от концентрации z: $\rho=\rho(z)$. Наконец, проведем оценку члена, стоящего в левой части равенства (2.3) (положив для простоты $\rho=\text{const}$ и $D=\text{const}\to\to 0$): $\langle D\,\text{div}(\rho\nabla\psi)\rangle=D\,\text{div}(\rho\nabla P(z^\circ, c^\circ))\to 0$.

Следствием указанных выше подстановок и допущений является незамкнутое уравнение для совместной плотности вероятности:

$$\frac{\partial}{\partial t}(P(z^\circ,c^\circ)\rho)+\text{div}(\langle \mathbf{v}\rangle_{z^\circ c^\circ}P(z^\circ,c^\circ)\rho)+$$

$$+\frac{\partial^2}{(\partial z^\circ)^2}(\langle D(\nabla z)^2\rangle_{z^\circ c^\circ}P(z^\circ,c^\circ)\rho)+2\frac{\partial^2}{\partial c^\circ\,\partial z^\circ}(\langle D(\nabla z\cdot\nabla c)\rangle_{z^\circ c^\circ} \tag{2.4}$$

$$P(z^\circ,c^\circ)\rho)+\frac{\partial^2}{(\partial c^\circ)^2}(\langle D(\nabla c)^2_{z^\circ c^\circ}P(z^\circ,c^\circ)\rho)=-\frac{\partial}{\partial c^\circ}(\langle W\rangle_{z^\circ c^\circ}P(z^\circ,c^\circ)\rho)$$

Возможность получения соотношения для $P(z, c)$ указана В. Р. Кузнецовым. В дальнейшем, как и в уравнении (1.4), индексы у переменных z° и c° опускаются.

Перейдем к выводу соотношения для условно осредненной концентрации $\langle c\rangle_z$. Введем обозначения: $c_z=\langle c\rangle_z$, $\mathbf{V}_z=\langle\mathbf{V}\rangle_z$, $W_z=\langle W\rangle_z$, $N_z=\langle N\rangle_z=$ $=\langle D(\nabla z)^2\rangle_z$. Домножим равенство (2.4) на c и проинтегрируем его по c от $-\infty$ до $+\infty$ (от 0 до $+\infty$, если концентрация c принимает только неотрицательные значения). Последние два члена левой части уравнения (2.4) и член в правой части интегрируются по частям:

$$\frac{\partial}{\partial t}(c_zP(z)\rho)+\text{div}(\langle \mathbf{v}c\rangle_zP(z)\rho)=W_zP(z)\rho+\frac{\partial}{\partial z}\xi(z) \tag{2.5}$$

$$\xi(z)=2\langle D(\nabla z\cdot\nabla c)\rangle_zP(z)\rho-\frac{\partial}{\partial z}(\langle Nc\rangle_zP(z)\rho) \tag{2.6}$$

Физический смысл соотношения (2.5) становится понятен, если его проинтегрировать по z от z_1 до z_2 $(0<z_1<z_2<1)$. Члены, стоящие в левой части (2.5), описывают конвективный перенос активной примеси, осредненный при условии, что мгновенное значение концентрации z принадлежит интервалу (z_1, z_2). В правой части (2.5) стоит условно осредненный источниковый член W и осредненный поток ξ через изоскалярную поверхность $z=$ $=\text{const}$.

Рассмотрим теперь вопрос о том, насколько пригодны уравнения (2.4) — (2.6) для описания совместной диффузии примесей, имеющих различные коэффициенты диффузии D_c и D_z. Если ввести вспомогательную примесь, концентрация которой z^* удовлетворяет тем же начальным и граничным условиям, что и концентрация z, но имеющую коэффициент диффузии D_c, то соотношения (2.4) — (2.6) применимы для определения совместных характеристик концентраций примесей c и z^*. В свою очередь турбулентные поля концентраций примесей z и z^* в соответствии с общепринятыми представлениями о турбулентности, качественно подтвержденными экспериментальными данными [4], отличаются лишь на масштабах порядка колмогоровского масштаба η_m, определенного по коэффициенту диффузии

$D_m = \max(D_c, D_z)$. Учитывая, что $\eta_m \to 0$ при $D_m \to 0$ и что на таких масштабах концентрация примеси c изменяется на величину $c_\eta \to 0$, можно сделать вывод о том, что $P(z, c) \to P(z^*, c)$; $\langle c \rangle_z \to \langle c \rangle_{z^*}$. Таким образом, соотношения, полученные при одинаковых коэффициентах диффузии, пригодны для описания совместной динамики примесей с различными коэффициентами диффузии на масштабах, превышающих масштаб η_m.

Для замыкания уравнения (2.5) необходимо аппроксимировать корреляции, входящие в равенство (2.6). К построению выражения для потока ξ перейдем после исследования поведения выбранной частицы в поле пассивной примеси.

3. Частица в поле пассивной примеси. Представим, что некоторая примесь состоит из множества мелких невзаимодействующих безынерционных частиц. Мгновенное значение концентрации пассивной примеси в окрестности выбранной частицы назовем координатой этой частицы в пространстве мгновенных значений концентрации пассивной примеси (или в z-пространстве). Пусть в начальный момент времени частица находится внутри турбулентного поля в окрестности точки $\mathbf{x}_0$ в физическом пространстве и имеет координату z_0 ($0 < z_0 < 1$) в z-пространстве. Отклонение от начального значения в z-пространстве обозначим $z_1(t)$ ($z_1(t_0) = 0$), а его производную $\dot{z}_1(t) = dz_1/dt$.

На временах, принадлежащих инерционному интервалу, случайный процесс $\dot{z}_1(t)$ можно считать стационарным, так как частица не успевает покинуть окрестность $\mathbf{x}_0$, где турбулентное поле однородно. Рассмотрим корреляцию $\langle \dot{z}_1(t_1)\dot{z}_1(t_2) \rangle_{z_0} = K(t_2 - t_1)$. Зависимость $K(t)$ пропорциональна второй производной от среднеквадратичного отклонения $\langle (z_1(t))^2 \rangle_{z_0}$ (см., например, [5, 6]). Нижний индекс z_0 указывает на то, что осреднение является условным только по тем реализациям турбулентного поля, в которых z принимает значение z_0 в окрестности $\mathbf{x}_0$ при $t = t_0$.

Отметим, что зависимость среднеквадратичного отклонения от времени должна связывать два масштаба – временной масштаб и масштаб изменения концентрации примеси z. На временах, принадлежащих инерционному интервалу турбулентности (см. [1, 6]), эта связь должна осуществляться через независящие от числа Re параметры инерционного интервала – диссипацию турбулентной энергии $\langle \varepsilon \rangle_{z_0}$ и скалярную диссипацию $\langle N \rangle_{z_0}$. Из соображений размерности следует, что такая связь единственна

$$\langle (z_1(t))^2 \rangle_{z_0} = A \langle N \rangle_{z_0} (t - t_0), \qquad A = \mathrm{const} \tag{3.1}$$

следовательно

$$K(t) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \langle (z_1(t))^2 \rangle_{z_0} = 0 \tag{3.2}$$

Равенство (3.2) указывает на то, что на временах, принадлежащих инерционному интервалу, движение частицы в z-пространстве можно рассматривать как процесс с некоррелированными приращениями. Максимально упрощая дальнейшие оценки, примем, что скорости движения частицы и среды в первом приближении совпадают:

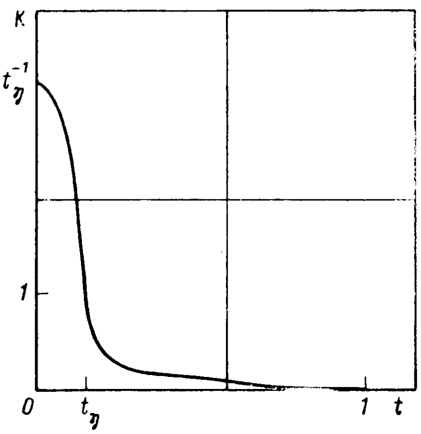
$$\dot{z}_1 = D(\nabla^2 z) \quad \text{при} \quad D = \mathrm{const}, \quad \rho = \mathrm{const}.$$

Порядок величины $K(0) \approx \langle P(\nabla^2 z)^2 \rangle_{z_0}$ определяется соответствующими колмогоровскими масштабами $K(0) \approx (z_\eta / t_\eta)^2 \approx \langle N \rangle / t_\eta \sim \sqrt{\mathrm{Re}} \gg 1$. Если предположить, что корреляция не убывает достаточно быстро, то окажется, что частица должна «вылететь» за пределы турбулентной жидкости ($0 < z < 1$). Интеграл от функции $K(t)$ по времени, задающий коэффициент диффузии в пространстве z, не может неограниченно возрастать с ростом числа Re, откуда следует, что характерное время падения корреляции составит t_η. Качественное поведение функции $K(t)$ изображено на фигуре, где величины, не зависящие от числа Re, считаются величинами порядка единицы.

При достаточно больших числах Re турбулентное поле имеет «губчатую» структуру, состоящую из областей с большой скалярной диссипацией (где $\nabla^2 z$ велико) и областей со слабой диссипацией, имеющих характерный размер порядка колмогоровского масштаба (где $\nabla^2 z$ мало) [6, 7]. Координата $z_1(t)$ изменяется скачками порядка соответствующего колмогоровского масштаба z_η. Далее предполагается некоторое усиление свойства (3.2) – эти скачки считаем не только некоррелированными, но и статистически независимыми. Тогда плотность вероятности суммы z_1 большого количества скачков z_η в соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятности распределена по закону Гаусса, а движение частицы в z-пространстве является аналогом броуновского движения.

4. Замыкание уравнений для условно осредненной концентрации c_z. Перейдем к построению соотношений для потока ξ, входящего в равенство

(2.5). Рассмотрим формально активную примесь как примесь, состоящую из мелких, безынерционных невзаимодействующих частиц. Это допущение облегчает проводимые рассуждения и не накладывает на возможность появления и исчезновения частиц (т. е. на участие в химических реакциях) никаких ограничений. Если движение каждой из этих частиц в z-пространстве аналогично броуновскому движению, то средний поток ξ должен определяться следующим диффузионным соотношением первого порядка:



$$\xi = A_1 \frac{\partial c_z}{\partial z} + A_2 c_z \tag{4.1}$$

Коэффициенты A_1 и A_2 заранее неизвестны и зависят от координат, времени, различных параметров турбулентности (и их производных), но не зависят от поля концентрации примеси c.

Определим коэффициенты A_1 и A_2. Подставим в равенства (2.5) и (4.1) равновесное решение $c(z)=a_2$ (при $W=0$), для которого $\partial c(z)/\partial t=0$, $\nabla c(z)=0$, $\langle \mathbf{v}c\rangle_z=\mathbf{v}_z c(z)$. С учетом уравнения (1.4) имеем $A_2=-\partial(N_2 P(z)\rho)/\partial z+\mu$, где μ — независящая от z константа интегрирования. Значения μ, отличные от нуля, противоречат физическому смыслу, потому что при изменении z и быстром падении плотности вероятности $P(z)$ средний поток $\xi(z)$ активной примеси через изоскалярную поверхность, на которой концентрация $z=\mathrm{const}$, остается постоянным. Проведя аналогичные рассуждения для равновесного решения $c(z)=a_1 z$, получим выражение для другого коэффициента, дающее

$$\xi = P(z)\rho N_z \frac{\partial c_z}{\partial z} - c_z \frac{\partial P(z)\rho N_z}{\partial z} \tag{4.2}$$

Определим для некоторого поля B его пульсационную составляющую соотношением $B'(\mathbf{x},t)=B(\mathbf{x},t)-\langle B\rangle_{z=z(\mathbf{x},t)}$, где $\langle B'\rangle_z=0$. Эта величина характеризует мгновенное отклонение величины B в некоторой точке пространства при фиксированной совместной реализации полей $B(\mathbf{x},t)$ и $z(\mathbf{x},t)$ от условно осредненного значения. Следствием равенства (1.4), (2.5), (4.2) являются две эквивалентные формы записи уравнения относительно условно осредненной концентрации:

$$\frac{\partial}{\partial t}(c_z P(z)\rho)+\mathrm{div}(\langle \mathbf{v}c\rangle_z P(z)\rho)=W_z P(z)\rho+$$
$$+P(z)\rho N_z \frac{\partial^2 c_z}{\partial z^2} - c_z \frac{\partial^2 P(z)\rho N_z}{\partial z^2} \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial c_z}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)c_z + \frac{\mathrm{div}(\langle \mathbf{v}'c'\rangle_z P(z)\rho)}{P(z)\rho} = W_z + N_z \frac{\partial^2 c_z}{\partial z^2} \tag{4.4}$$

Простейшей проверкой полученных равенств может служить то, что в результате их осреднения по координате z должны получаться известные полностью осредненные уравнения турбулентного переноса примеси. Так как уравнение (4.3) выводилось для описания процессов диффузии внутри турбулентной жидкости $0<z<1$, рассмотрим случай, в котором в потенциальном потоке активная примесь отсутствует: $c=0$ при $z=0$ и $z=1$. Тогда условное осреднение характеристик активной примеси внутри турбулентного поля совпадает с полным осреднением этих характеристик. В силу того что в завихренную турбулентную область жидкость может лишь втекать, поток примеси $\xi(z)$ через границы турбулентного потока $z=+0$ и $z=1-0$ равен нулю. Отсюда с учетом полученного в [1] соотношения $P(z)\to 0$ при $z\to 0$, $z\to 1$ и представления (4.2) имеем $c(z)=0$ при $z=+0$, $z=1-0$. Это равенство представляет собой граничное условие для решения уравнений (4.3) и (4.4). Оно означает, что концентрация c при переходе из потенциальной области в турбулентную не терпит разрывов. Интегрируя равенство (4.3) по переменной z, получим известные осредненные уравнения переноса химически активной примеси. Последние два члена в правой части интегрируются по частям.

При выводе равенств (4.3), (4.4) при помощи соотношения (4.4) использовался тот факт, что линейная равновесная зависимость $c(z)=a_1z+ +a_2$ должна обращать эти уравнения в тождества. Проверим, удовлетворяет ли уравнениям (4.3), (4.4) равновесная зависимость (1.3), для которой $\partial c(z)/\partial t=0$, $\nabla c(z)=0$, $\langle \mathbf{v}c(z)\rangle_z=\mathbf{v}_zc(z)$, $c'=0$, $W_z=W(z,\ c(z))$. Подставив эти соотношения в равенство (4.4), получим

$$N_z\frac{d^2c(z)}{dz^2}=-W(z,c(z)) \tag{4.5}$$

Решение (1.3) удовлетворяет уравнению (4.5) в том случае, когда в (1.3) используется условно осредненное значение скалярной диссипации $\langle N\rangle_{zs}$. Причина различий между подходами (1.3) и (4.5) состоит в следующем: необходимость учета пульсаций N возникает при рассмотрении зон реакции с характерным масштабом порядка масштаба Колмогорова, а на столь малых масштабах диффузионная аппроксимация (4.1) неприменима.

Другой способ вывода соотношения для потока ξ основан на использовании предположения о близости зависимости $c(z)$ к равновесной линейной зависимости, т. е. о том, что мелкомасштабные структуры полей концентрации примесей c и z различаются слабо. Локально (по отношению к мелким пульсациям) такую зависимость можно считать равновесной $c=a_1(z-$ $-z_0)+a_2$ $(a_2=c(z_0),\ a_1=\partial c(z)/\partial z$ при $z=z_0)$. Используем это соотношение и гипотезу статистической независимости крупномасштабных и мелкомасштабных пульсаций для расщепления корреляций, входящих в выражение (2.6)

$$\langle Nc\rangle_z=N_zc_z \tag{4.6}$$

$$\langle D(\nabla c\nabla z)\rangle_z=\left\langle D(\nabla z)^2\frac{\partial c(z)}{\partial z}\right\rangle_z=N_z\frac{\partial c_z}{\partial z} \tag{4.7}$$

Можно убедиться в том, что эти соотношения приводят к уже полученному равенству (4.2). Этот вывод может показаться неожиданным: в п. 3, на основании которого построено замыкание (4.2), рассматривались по сути сильно неравновесные распределения — частицы активной примеси сосредоточены в окрестности $z=z_0$. Условием применимости равенств (4.6) и (4.7) является, напротив, близость концентрации примеси c к равновесной. Объяснение универсальности соотношения (4.2) может состоять в том, что локальное равновесие (локальное подобие концентраций примесей c и z) возникает и для неравновесных в целом полей c. Это предположение согласуется с подходом [7], в котором считывается, что в области больших градиентов примеси возникают вследствие сходимости траекторий различных жидких частиц (несущих различные значения c и z) по некоторому направлению. Естественно, что как ∇z, так и ∇c при этом имеют одно и то же направление.

Аппроксимации различных членов, входящих в (4.3) и (4.4), — $\mathbf{v}_z$, N_z, $P(z)$ — предложены в [1]. Например, далее используется $N_z=N_t$ $(0<z<1)$, $N_z=0$ $(z=0,\ z=1)$. Полное замыкание соотношений (4.3) и (4.4) требует нахождения условно осредненного турбулентного переноса активной примеси $\langle \mathbf{v}'c'\rangle_z$ и осреднения источникового члена $W_z=\langle W\rangle_z$. Отметим, что зависимость $\langle c\rangle_z$ дает гораздо больше информации для осреднения источника, чем $\langle c\rangle$. Уравнения (4.3) и (4.4) содержат дополнительную независимую переменную z, что существенно осложняет их практическое применение. Ниже рассматриваются конкретные турбулентные течения, в которых перечисленные трудности могут быть преодолены.

5. Уравнение для условно осредненной концентрации c_z в однородном случае, при отсутствии источникового члена. Нетрудно убедиться, что в однородном случае следствием равенств (4.4), (1.4) при $W=0$, $\rho=\text{const}$ являются соотношения

$$\frac{\partial c_z}{\partial t} = N_t \frac{\partial^2 c_z}{\partial z^2}, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial P(z)}{\partial t} = -N_t \frac{\partial^2 P(z)}{\partial z^2} \tag{5.2}$$

Уравнение (5.2) получено в [1]. К равенству (5.1) относительно интеграла от c_z по физическому объему можно прийти и в случае однородного поля пассивной примеси и локализованного поля активной примеси. Для анализа соотношений (5.1) и (5.2) введем также следующие обозначения:

$$m = \int_0^{1-0} P(z) c_z \, dz, \quad \tau = -\int_t^{t_1} N_t(t)\, dt \tag{5.3}$$

То, что уравнения (5.1) и (5.2) имеют похожую структуру, не случайно. Действительно, зададим в качестве граничных условий отсутствие частиц активной примеси в потенциальном течении при $z=0$, $z=1$, следовательно, $c=0$ при $z=+0$, $z=1-0$. Домножив равенство (5.1) на $P(z)$, а равенство (5.2) на c_z и проинтегрировав их сумму по z, можно убедиться, что среднее количество частиц активной примеси, заключенное в турбулентной жидкости, остается неизменным: $\partial m/\partial t=0$. Однако концентрация примеси c с течением времени в целом падает. Это связано с увеличением объема, занимаемого турбулентной жидкостью, т. е. с наличием перемежаемости.

Перейдя в соотношениях (5.1) и (5.2) от переменной t к переменной τ, получим уравнение с постоянными коэффициентами. Во многих турбулентных течениях интеграл от N_t при $t\to\infty$ конечен, что дает возможность ставить начальные условия для обратнопараболического уравнения (5.2): $P(z)=\delta(z-z_\infty)$ при $t=\infty$ [1].

Положим для удобства $t_1=\infty$. Если $N_t<\infty$ в начальный момент времени t_0, то уравнение (5.1) имеет конечное время диффузии $\tau(\tau(t_0)<\tau<0)$. Поэтому решение уравнения (5.1) $c_z(t, z)$ стремится при $t\to\infty$ к некоторому, вообще говоря, неравновесному распределению. Однако уравнение (5.1) имеет реальный физический смысл лишь там, где $P(z)$ существенно больше нуля (несмотря на то, что уравнение (5.1) можно решать независимо от (5.2)). Вероятность отклонений от равновесия $c_z=a_1(z-z_\infty)+a_2$ (где $a_1=\partial c_z/dz$, $a_2=c_z$ при $t=\infty$, $z=z_\infty$) стремится к нулю при $t\to\infty$.

6. Совместная диффузия примесей в турбулентных струях и турбулентном следе. Характерной особенностью рассматриваемых течений является наличие направления x_2 (x_2 и x_3 в трехмерном случае), по которому характеристики турбулентности изменяются значительно быстрее, чем вдоль направления x_1. Плотность вероятности $P(z)$ также быстро изменяется с ростом координаты x_2. Предположим, что зависимость $P(z)$ является более резкой функцией поперечной координаты, чем условно осредненная концентрация c_z. Отметим, что это предположение не означает слабой зависимости всех характеристик поля c от x_2. Например, полностью осредненная концентрация $\langle c\rangle$ может существенно зависеть от x_2. Источниковый член в уравнениях физической кинетики является, как правило, функцией концентраций c и z и не зависит от физических координат: $W=W(z, c(z, x_1))=W(z, x_1)$.

Быстрое изменение осредненных характеристик турбулентного поля на периферийной части струи или следа связано прежде всего с изменением перемежаемости. Характеристики турбулентности, осредненные при условии, что точка наблюдения находится внутри турбулентного поля, напротив, изменяются слабо [1]. С этим подходом согласуется и сделанное выше предположение.

Введем в зависимости от размерности задачи для произвольной величины B следующее обозначение:

$$\{B\} = \int_{-\infty}^{+\infty} B\, dx_2, \quad \{B\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} B dx_2\, dx_3$$

Проинтегрируем уравнения (4.3) и (1.4) по координате x_2 (x_2 и x_3 в трехмерном случае), считая, что $0<z<1$. При интегрировании учтем, что $P(z)\to 0$ при $x_2\to\pm\infty$, $z\neq 0$, $z\neq 1$. Вследствие слабой зависимости c_z от x_2 для произвольной величины B положим $\{c_zBP(z)\}=c_z\{BP(z)\}$, $\{W_zBP(z)\}=W_z\{BP(z)\}$, $\{\rho BP(z)\}=\rho\{BP(z)\}$.

Здесь вынесенное за фигурные скобки c_z представляет собой эффективное (независящее от x_2) значение условно осредненной концентрации. Пренебрегаем также пульсациями продольной компоненты скорости: $\langle v_1\rangle_z=\langle v_1\rangle$. Течение считаем стационарным. После интегрирования получим

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(c_z\{\langle v_1\rangle P(z)\}\rho)=W_z\{P(z)\}\rho+\{N_tP(z)\}\rho\frac{\partial^2 c_z}{\partial z^2}-c_z\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\{N_tP(z)\}\rho) \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\{\langle v_1\rangle P(z)\}\rho)=-\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\{N_tP(z)\}\rho) \tag{6.2}$$

$$\{\langle v_1\rangle P(z)\}\frac{\partial c_z}{\partial x_1}-\{N_tP(z)\}\frac{\partial^2 c_z}{\partial z^2}=\{P(z)\}W_z \tag{6.3}$$

$$0<z<1$$

Уравнение (6.3) получено вычитанием из (6.1) равенства (6.2), домноженного на c_z.

Для источника W_z предлагается следующая формула: $W_z=W(z,\ c_z(z,\ x_1))$. Отметим, что это равенство учитывает пульсации пассивной примеси, так как для полностью осредненной величины $\langle W\rangle$ имеем

$$\langle W\rangle=\int\limits_0^1 W(z,c_z(z,x_1))P(z|x_1,x_2)\,dz \tag{6.4}$$

Соотношение (6.4) является формулой осреднения источникового члена при расчетах в физическом пространстве, в которую входит зависимость от x_2. Аналогичное соотношение можно применять и для вычисления $\langle c\rangle$.

Вследствие резкого изменения характеристик поля z с координатой x_2 поверхность z=const в среднем «подобна» поверхности x_2=const. Уравнение (6.3) по существу является переходом в осредненных уравнениях переноса к новым подвижным координатам x_1, z. Информация о крупных, неуниверсальных пульсациях становится ненужной, так как изоскалярные поверхности z=const движутся вместе с этими пульсациями. В соответствии с анализом п. 3 равенство (6.3) является диффузионным соотношением уже на временах, принадлежащих инерционному интервалу. Преимущество уравнений в z-пространстве состоит также в более корректном осреднении источникового члена (6.4).

Равенство (6.3) является уравнением относительно неизвестной зависимости $c_z(z,\ x_1)$; методика определения всех его коэффициентов, стоящих в фигурных скобках известна [1]. Трудности, возникающие при учете обратного влияния кинетических процессов на динамику турбулентности, можно преодолеть, применяя различные совместные способы расчета как в z-пространстве, так и в физическом пространстве.

Автор благодарит А. Б. Ватажина и В. Р. Кузнецова за полезные обсуждения работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кузнецов В. Р., Сабельников В. А.* Турбулентность и горение. М.: Наука, 1986. 287 с.
2. *Ватажин А. Б., Клименко А. Ю., Лебедев А. Б., Сорокин А. А.* Гомогенная конденсация в турбулентных затопленных изобарических струях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 2. С. 43–52.
3. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.
4. *Becker H. A., Hottel H. C., Williams G. C.* The nozzle-fluid concentration field of the round, turbulent, free jet // J. Fluid Mech. 1967. V. 30. № 2. P. 285–393.
5. *Свешников А. А.* Прикладные методы теории случайных функций. Л.: Судпромгиз, 1961. 252 с.
6. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 639 с. Ч. 2. 1967. 720 с.
7. *Batchelor G. K.* The effect of homogeneous turbulence on material lines and surfaces // Proc. Roy. Soc. L. 1952. V. A213. № 1114. P. 349–366.

Москва

Поступила в редакцию
23.I.1989