

УДК 532.526.013.4

© 1990 г.

В. Р. ГУЩИН, А. В. ФЕДОРОВ

ВОЗБУЖДЕНИЕ И РАЗВИТИЕ НЕУСТОЙЧИВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В теории устойчивости сверхзвуковых пограничных слоев подавляющее большинство результатов получено путем численных расчетов характеристик элементарных волновых решений вида $g(y)\exp(i\alpha x - i\omega t)$ [1-4]. В [1] найдено, что с ростом числа Маха количество невязких неустойчивых мод быстро увеличивается, поведение спектра $\omega(\alpha)$ приобретает сложный характер. Автор работы [4] обратил внимание на эту особенность и показал, что усложнение спектра обусловлено точками ветвления дисперсионного соотношения $\omega(\alpha)$, расположенными близко к вещественной оси комплексных α . С помощью численных расчетов характеристик отдельных мод и техники метода перевала в [4] обнаружены режимы абсолютной неустойчивости сверхзвукового пограничного слоя.

Анализ типа неустойчивости и асимптотического поведения возмущений при времени $t \rightarrow \infty$ требуют детального исследования начально-краевой задачи, как это сделано для дозвуковых пограничных слоев в [5, 6] методом сращиваемых разложений. Аналогичное исследование [7] в рамках трехслойной асимптотической модели для сверхзвукового пограничного слоя не привело к обнаружению неустойчивых волн. Это обусловлено тем, что трехслойная структура, соответствующая длинноволновой части спектра, нетипична для неустойчивости сверхзвуковых пристенных течений. При достаточно больших числах Маха собственные колебания таких течений заполняют коротковолновую часть спектра и хорошо описываются методом ВКБ [1, 8, 9].

В настоящей работе рассматривается начально-краевая задача о развитии двумерных невязких возмущений, возбуждаемых внешним нестационарным локальным воздействием, включенным в момент времени $t=0$. С помощью метода ВКБ и численных расчетов исследуется спектр задачи, найдены асимптотики волновых пакетов при $t \rightarrow \infty$. Показано, что, противоположно выводу [4], невязкая неустойчивость сверхзвукового пограничного слоя является конвективной. Анализируются причины расхождения результатов.

1. Рассматривается пограничный слой совершенного газа на расстоянии L от передней кромки плоской пластины. Предполагается, что L много больше толщины пограничного слоя, среднее течение считается плоскопараллельным. Ось x направлена вниз по потоку, ось y — по нормали к стенке. Координаты x, y обезразмерены по масштабу $\delta = \sqrt{\nu_e L / U_e}$, время t отнесено к δ / U_e . Здесь U_e, ν_e — скорость и коэффициент кинематической вязкости на внешней границе пограничного слоя. Невозмущенное ламинарное течение описывается профилями x -компоненты скорости $U(y)$ и температуры $T(y)$, обезразмеренными по U_e, T_e . Давление P отнесено к $\rho_e U_e^2$ (ρ — плотность).

В начальный момент времени $t=0$ включается внешнее воздействие, вызывающее возмущение y -компоненты скорости

$$y=0, v_2(x, t) = v_0 f_1(t) \delta(x), t > 0; v_2 = 0, t \leq 0 \quad (1.1)$$

$$|f_1(t)| \leq C_f \exp(-\mu t), \mu > 0 \quad (1.2)$$

Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция, C_f — константа. Предполагается, что интенсивность воздействия достаточно мала и справедлива линейная теория. Рассмотрение проводится для двумерных невязких возмущений.

Введем вектор-функцию $\mathbf{G}(x, y, t) = (u_1, v_1, p_1, \theta_1)$, компоненты которой соответствуют возмущению x -, y -компоненты скорости, давления и тем-

пературы. Функция \mathbf{G} является решением задачи

$$L_1 \mathbf{G} = 0 \quad (1.3)$$

$$y=0, G_2(x, t) = v_2(x, t); y \rightarrow \infty, |\mathbf{G}| < \infty \quad (1.4)$$

Здесь L_1 — оператор линеаризованных уравнений Эйлера, зависящий от характеристик среднего течения. Первое условие в (1.4) заменяет условие непротекания, второе требует ограниченности возмущения на бесконечном удалении от стенки. Решение задачи (1.3), (1.4) ищется в классе абсолютно интегрируемых по x функций, т. е. предполагается, что для фиксированных y, t возмущение достаточно быстро затухает при $x \rightarrow \pm \infty$.

Выполним преобразование Фурье по x и преобразование Лапласа по времени

$$(u, v, p, \theta) = \int_0^{\infty} e^{i\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} (u_1, v_1, p_1, \theta_1) e^{-i\alpha x} dx$$

Для образа $p(y; \alpha, \omega)$ получаем задачу с неоднородным условием при $y=0$

$$p'' - \left(\frac{2U'}{U-c} - \frac{T'}{T} \right) p' + \alpha^2 q p = 0 \quad (1.5)$$

$$p'(0) = \frac{i\omega v_0}{T(0)} f(\omega) \equiv p_0(\omega) \quad (1.6)$$

$$|p(y)| < \infty, y \rightarrow \infty; q = M^2(U-c)^2/T-1 \quad (1.7)$$

Здесь $c = \omega/\alpha$ — фазовая скорость, M — число Маха в набегающем потоке, штрих обозначает дифференцирование по y . Решение задачи (1.5) — (1.7) представим в виде $p = p_2(y; \alpha, \omega) p_0(\omega) / p_2'(0; \alpha, \omega)$, где p_2 — решение уравнения (1.5) с граничными условиями: $p_2(0) = 1$, $|p_2(y)| < \infty$, $y \rightarrow \infty$. Из-за особенности в критической точке y_c : $U(y_c) = c$, решение многозначно. Как показано в [10], следует выбирать регулярную ветвь p_2 , которая получается при обходе особой точки y_c снизу в комплексной плоскости y . Выполняя формально обратные преобразования, получим

$$p_1(x, y, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_\omega} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_2(y; \alpha, \omega) p_0(\omega)}{p_2'(0; \alpha, \omega)} e^{i(\alpha x - \omega t)} d\alpha \quad (1.8)$$

Контур γ_ω проходит выше всех особенностей подынтегральной функции в комплексной плоскости ω . Уравнение $D(\omega, \alpha) \equiv p_2'(0; \alpha, \omega) = 0$ является дисперсионным соотношением однородной задачи, составленной из уравнения (1.5) и граничных условий

$$p'(0) = 0; |p(y)| < \infty, y \rightarrow \infty \quad (1.9)$$

Так как p_2 — целая по построению, предэкспоненциальная функция в (1.8) является мероморфной.

2. Для анализа устойчивости течения необходимо рассмотреть свойства дисперсионного уравнения $D(\omega, \alpha) = 0$ при вещественных волновых числах α . Спектр $\omega(\alpha)$ исследовался численно в [1, 4], его качественные особенности рассматривались в [2, 3]. Он содержит волны гидродинамического типа, к которым относится первая неустойчивая мода, и набор собственных колебаний акустической природы, в который входят вторая, третья, ... моды по классификации [1]. В [8] методом ВКБ выполнен асимптотический анализ коротковолновых мод. Показано, что они нейтральны в главном приближении по малому параметру $|\alpha|^{-1}$

и имеют дисперсионное соотношение

$$\int_0^{y_a} \sqrt{\frac{(\alpha U - \omega)^2 M^2}{T} - \alpha^2} dy = \frac{\pi}{4} + \pi(n-2) \quad (2.1)$$

Здесь $n=2, 3, \dots$ — номер моды по классификации [1]; y_a — точка поворота, определяемая из условия $U(y_a) = c - a(y_a)$, $a = \sqrt{T}/M$ — местная скорость звука, отнесенная к U_e .

Типична ситуация, когда дисперсионные кривые $\omega_n(\alpha)$ из (2.1) пересекают кривую $\text{Re } \omega_1(\alpha)$, соответствующую первой моде. В окрестности точек пересечения $\alpha_{1,n}$, $\omega_{1,n}$, которые принято называть точками синхронизма [11], возникает сильная связь между первой и n -й модами. Асимптотика (2.1) нарушается, дисперсионные кривые расщепляются. На фиг. 1 приведен пример численного расчета для пограничного слоя возле теплоизолированной пластины при числе $M=7$, показателе адиабаты $\gamma=1,4$, числе Прандтля $0,72$, температуре на внешней границе слоя $T_e=50$ К (данный режим рассматривался в [1]). Номера кривых соответствуют номерам мод. Возле точек синхронизма $\alpha_{1,2} \approx 0,1$ и $\alpha_{1,3} \approx 0,255$ наблюдается расщепление дисперсионных кривых.

Для качественного описания расщепления воспользуемся модельным уравнением в окрестности точек синхронизма [11]: $[\omega - \omega_1(\alpha)][\omega - \omega_n(\alpha)] = A$. Здесь A — константа связи между модами; $\omega_1(\alpha)$, $\omega_n(\alpha)$ — собственные значения без учета связи. Разложим, ω_1 , ω_n в ряд возле точки синхронизма $\alpha_{1,n}$ и перенесем начало координат в эту точку, тогда

$$(\omega - v_1 \alpha)(\omega - v_2 \alpha) = A; \quad v_1 = \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha}, \quad v_2 = \frac{\partial \omega_n}{\partial \alpha} \quad (2.2)$$

Здесь v_1, v_2 — групповые скорости в точке $\alpha_{1,n}$ без учета связи между модами, $v_1 > v_2 > 0$. Предположим, что $A < 0$. Разрешая (2.2) относительно ω , имеем две ветви

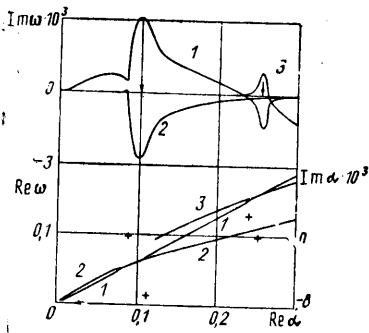
$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)\alpha \mp \sqrt{\frac{1}{4}(v_1 - v_2)^2 \alpha^2 + A}$$

Характер расщепления дисперсионных кривых зависит от обхода точек ветвления $\alpha_{1,2}^\circ = \mp 2\sqrt{|A|}/(v_1 - v_2)$ в комплексной плоскости α . В отличие от модельного случая точки ветвления смещены с вещественной оси, их расположение показано на фиг. 1, б крестиками. Так как расчет выполнен для вещественных α , первая пара точек $\alpha_1^\circ, \alpha_2^\circ$, соответствующая синхронизму мод 1, 2, обходитя сверху, вторая пара $\alpha_3^\circ, \alpha_4^\circ$ — с разных сторон. Топология расщепления по модельному уравнению (2.2) показана на фиг. 2 (вещественная часть ω дана сплошными линиями, мнимая — пунктирными). Она согласуется с численным расчетом.

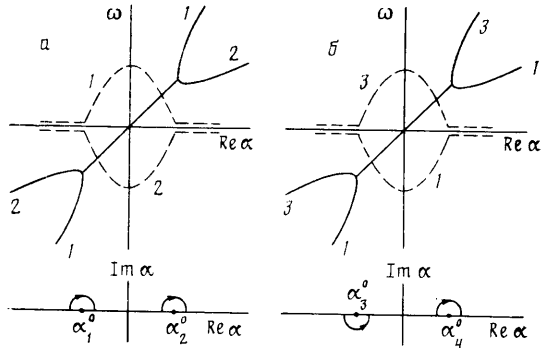
Так как точки ветвления $\alpha_3^\circ, \alpha_4^\circ$ обходились с разных сторон, произошел перескок первой моды на асимптотику третьей моды. При монотонном изменении параметров задачи (например, числа Маха) некоторые точки ветвления могут пересекать вещественную ось, что приводит к качественной перестройке в поведении дисперсионных кривых. Такие примеры встречаются в [1].

Таким образом, неустойчивость второй, третьей, ... мод обусловлена их синхронизмом с первой модой. Качественное поведение спектра возле точек синхронизма описывается модельным уравнением (2.2). Отметим, что из численных расчетов [1], выполненных с учетом вязкости, следует, что вязкость оказывает стабилизирующее воздействие на высшие моды, но не меняет топологию расщепления дисперсионных кривых в окрестности точек синхронизма.

3. Так как точки ветвления α° неустойчивых мод $\omega_n(\alpha)$ близки к вещественной оси α , анализ типа неустойчивости и поиск асимптотики волнового пакета при $t \rightarrow \infty$ усложняются. В таких случаях удобно ис-



Фиг. 1



Фиг. 2

пользовать метод Бриггса [12], развитый в физике плазмы. Для этого необходимо исследовать спектр $\alpha(\omega)$.

Пусть ω принимает фиксированное положительное значение. Имеются две ветви непрерывного спектра, расположенные на вещественной оси α

$$\alpha_{1,2} = \frac{M^2\omega}{M^2-1} \pm \frac{\sqrt{M^2\omega^2+k^2}}{M^2-1}, \quad k \in (0, \infty) \quad (3.1)$$

Между ветвями сплошного спектра располагается дискретный набор мод $\alpha_n(\omega)$, в который входят первая мода и моды акустического типа, приближенно описываемые соотношением (2.1). Возле точек синхронизма $\omega_{1,n}$ дисперсионные кривые $\alpha_n(\omega)$ расщепляются аналогично случаю, рассмотренному выше. Топология расщепления описывается модельным уравнением (2.2). Одно из собственных значений смещается в нижнюю полуплоскость комплексных α , вызывая неустойчивость течения. Инкременты нарастания неустойчивой моды $\sigma = -\text{Im } \alpha(\omega)$ имеют локальные максимумы на частотах, близких к частотам синхронизма $\omega_{1,n}$.

Исследуем спектральные свойства для комплексных α при $|\alpha| \rightarrow \infty$ и фиксированном $\omega > 0$. Воспользуемся методом ВКБ [13]. Так как фазовая скорость $c = \omega/\alpha \rightarrow 0$, критическая точка y_c и точка поворота y_a стремятся к вещественной оси комплексных y . Выполним преобразование $p = (U-c)u(y)/\sqrt{T}$, в главном приближении по малому параметру $\epsilon = |\alpha|^{-1}$ имеем

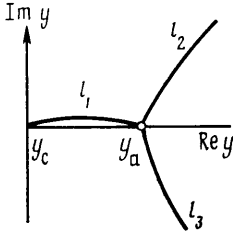
$$u'' + \alpha^2 q u = 0; \quad u'(0) = 0; \quad |u(y)| < \infty, \quad y \rightarrow \infty \quad (3.2)$$

Следуя [13], построим решение «в большом», т. е. за пределами $\epsilon^{3/2}$ -окрестности точки поворота. Обозначим $\lambda = \epsilon^{-1}$, $q_0 = -\exp(2i\varphi)q$, $\varphi = \arg \alpha$, тогда (3.2) переписывается в каноническом виде

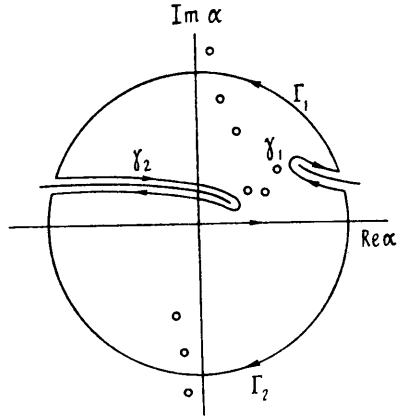
$$u'' - \lambda^2 q_0 u = 0, \quad S = \int_{y_a}^y \sqrt{q_0} dy$$

Здесь $S(y_a, y)$ — функция, определяющая линии Стокса l_1, l_2, l_3 из условия $\text{Re } S(y_a, y) = 0$. Линии Стокса схематически показаны на фиг. 3. Введем канонические области $D_1: l_1 \in D_1; l_2, l_3 \in \partial D_1; D_2: l_2 \in D_2; l_1, l_3 \in \partial D_2$. В D_1 выберем ветвь функции S так, чтобы $\text{Im } S > 0$ при $y \in l_1$. Тогда справа (слева) от l_1 $\text{Re } S > 0$ (< 0). В главном приближении по ϵ решение в D_1 имеет вид

$$u(y) = q_0^{-1/4} [A_1 \exp(\lambda S) + A_2 \exp(-\lambda S)] \quad (3.3)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

В области D_2 выберем ветвь $\text{Im } S > 0$, $y \in l_2$, тогда $\text{Re } S > 0$ (< 0) справа (слева) от l_2

$$u(y) = q_0^{-1/4} [B_1 \exp(\lambda S) + B_2 \exp(-\lambda S)] \quad (3.4)$$

Константы A_1 , A_2 и B_1 , B_2 связаны матрицей перехода

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = e^{-i\frac{\pi}{6}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

В окрестности критической точки y_c в главном приближении

$$p'' - \frac{2}{y-y_c} p' - \alpha^2 p = 0$$

Здесь и далее индекс c обозначает значение функции в точке y_c . Во внутренней переменной $\eta = \alpha(y - y_c)$ имеем решение

$$p(\eta) = C_1(\eta - 1)e^\eta + C_2(\eta + 1)e^{-\eta} \quad (3.5)$$

Сравив (3.3) с (3.5) и удовлетворяя граничным условиям, получим дисперсионное соотношение

$$\lambda S(0, y_a) = \eta_0 + i\pi(1/4 + n) + O(n^{-1}) \quad (3.6)$$

Здесь n — большое положительное число, $\eta_0 = -\omega/U'(0)$ — координата стенки во внутренней переменной критического слоя. Из (3.6) следует, что имеется два семейства собственных значений

$$\alpha_n^{(1),(2)} = [i\pi(1/4 \pm n) + \eta_0] / \int_0^{y_a} \sqrt{1 - \frac{M^2 U^2}{T}} dy$$

Соответствующие им собственные функции $p(y)$ осциллируют в дозвуковой части пограничного слоя $0 < y < y_a$ и резко затухают при $y > y_a$.

Сместим ω с вещественной оси на контур γ_ω по пути $\text{Re } \omega = \text{const}$. Из (3.1) следует, что ветви сплошного спектра сместятся в верхнюю полуплоскость комплексных α . Анализ дисперсионных соотношений (2.1) и (3.6) для мод с большими номерами, а также численные расчеты для младших мод показали, что $\alpha_n(\omega)$ перемещаются в верхнюю полуплоскость, семейства $\alpha_n^{(1)}(\omega)$ и $\alpha_n^{(2)}(\omega)$ остаются в верхней и нижней полуплоскостях соответственно. Схема расположения спектра для ω , фиксированного на контуре γ_ω и имеющего $\text{Re } \omega > 0$, показана на фиг. 4.

Выполним в (1.8) интегрирование по α . При $x > 0$ замкнем контур интегрирования дугой Γ_1 бесконечно большого радиуса R в верхней полуплоскости с обходом ветвей непрерывного спектра по петлям γ_1, γ_2 (фиг. 4). При $x < 0$ контур замыкается дугой Γ_2 . Рассматривая асимптотики (3.3)–(3.5), легко показать, что на Γ_1, Γ_2 предэкспоненциальная функция в (1.8) стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$, если Γ_1, Γ_2 не проходят через точки $\alpha_n^{(1)}, \alpha_n^{(2)}$. Используя лемму Жордана и теорию вычетов, получаем

$$p_1(x, y, t) = \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma_\omega} \sum_n \frac{p_2(y; \alpha_n^{(1)}, \omega) p_0(\omega)}{D_\alpha(\alpha_n^{(1)}, \omega)} \exp(i\alpha_n^{(1)} x - i\omega t) d\omega + \\ + \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma_\omega} \sum_n \frac{p_2(y; \alpha_n, \omega) p_0(\omega)}{D_\alpha(\alpha_n, \omega)} \exp(i\alpha_n x - i\omega t) d\omega + I_1 + I_2, \quad x > 0 \quad (3.7)$$

$$p_1(x, y, t) = - \frac{i}{2\pi} \int_{\gamma_\omega} \sum_n \frac{p_2(y; \alpha_n^{(2)}, \omega) p_0(\omega)}{D_\alpha(\alpha_n^{(2)}, \omega)} \exp(i\alpha_n^{(2)} x - i\omega t) d\omega, \quad x < 0 \quad (3.8)$$

Здесь I_1, I_2 — интегралы по петлям γ_1, γ_2 ; $D_\alpha = \partial D / \partial \alpha$. Учтено, что с изменением ω вдоль контура γ_ω траектории полюсов $\alpha(\omega)$ не пересекают вещественную ось, так как на γ_ω подынтегральная функция аналитична.

Из (3.7) следует, что волны с собственными значениями $\alpha_n, \alpha_n^{(1)}$ распространяются вниз по потоку. Акустическое поле, излучаемое во внешний поток, описывается интегралами I_1, I_2 и отлично от нуля вниз по потоку от источника. Волны, соответствующие набору $\alpha_n^{(2)}$, распространяются вверх по потоку по дозвуковой части пограничного слоя и экспоненциально затухают при $x \rightarrow -\infty$. Неустойчивые моды входят только во второй интеграл (3.7). Именно они определяют асимптотическое поведение возмущений на больших временах.

4. Найдем асимптотику возмущения давления $p_1(x, y, t)$ при $t \rightarrow \infty$ и фиксированном x . В силу условия (1.2) образ p_0 от формы внешнего воздействия не имеет особенностей в области $\text{Im } \omega \geq 0$. Единственными особенностями подынтегральной функции в (3.7), (3.8) при $\text{Im } \omega > 0$ могут быть точки ветвления ω° многозначной функции $\alpha(\omega)$, определяемые условием $D_\alpha = 0$. Важным свойством спектра является то, что в полосе $0 \leq \text{Im } \omega \leq \text{Im } \omega(\gamma_\omega)$ отсутствуют точки ветвления между встречными $\alpha_n^{(2)}$ и попутными $\alpha_n, \alpha_n^{(1)}$ волнами. Для коротковолновых мод это следует из рассмотрения дисперсионных соотношений (2.1), (3.6); для мод с малыми номерами — из численных расчетов. В указанной полосе возможны ветвления спектральных кривых, принадлежащих одному классу волн (попутным или встречным). Но в этом случае особенности в точке ветвления имеют разный знак и компенсируют друг друга [11, 14], особенность устраняется. Совмещая контур γ_ω с вещественной осью и используя лемму Римана [15], имеем $p_1(x, y, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и фиксированном x . Следовательно, неустойчивость является конвективной.

Как показано в [16], конвективная неустойчивость становится абсолютной с максимальным инкрементом роста, если перейти в систему координат, движущуюся со скоростью V_n , такой, что $d \text{Im } \omega_n(\alpha) / d\alpha = 0$. $V_n = -d \text{Re } \omega_n(\alpha) / d\alpha$, где α принимает вещественные значения. При этом необходимо, чтобы в точке α_{ns} , являющейся седловой точкой функции $\omega_n(\alpha) - V_n \alpha$, происходило слияние двух ветвей функции $\alpha(\omega)$, соответствующих различным классам волн в подвижной системе координат. Такие режимы реализуются возле точек синхронизма $\omega_{1,n}, \alpha_{1,n}$. Асимптотика возмущения при $t \rightarrow \infty$ на луче $x = V_n t$ имеет вид

$$p_1 \sim \sum_n \frac{p_2(y; \alpha_{ns}, \omega_{ns}) p_0(\omega_{ns})}{(-2D_\omega D_{\alpha\alpha})_{ns}^{1/2}} \sqrt{\frac{i}{\pi t}} \exp(i\alpha_{ns} x - i\omega_{ns} t) \quad (3.9)$$

Индекс ns обозначает, что соответствующая функция вычисляется в точке α_{ns} . На фиг. 1 эти точки отмечены стрелками. Воспользуемся свойством симметрии, которое является следствием того, что в исходной системе уравнений (1.3)–(1.4) все члены вещественны, $p_2(y; \alpha, \omega) = p_2^*(y; -\alpha^*, -\omega^*)$, $D(\alpha, \omega) = -D^*(-\alpha^*, -\omega^*)$, $p_0(\omega) = p_0^*(-\omega^*)$, звездочкой отмечены комплексно-сопряженные величины. Тогда (3.9) можно записать в виде

$$p_1 \sim \sum_n' A_{ns} \frac{\exp(\sigma_{ns} t)}{\sqrt{t}} \cos[\alpha_{ns}(x + V_n t) - \text{Re } \omega_{ns} t + \varphi_{ns}] \quad (3.10)$$

$$A_{ns} = |\psi_{ns}|, \quad \varphi_{ns} = \arg \psi_{ns}, \quad \sigma_{ns} = \text{Im } \omega_{ns}$$

$$\psi_{ns} = \frac{p_2(y; \alpha_{ns}, \omega_{ns})}{(-2D_\omega D_{\alpha\alpha})_{ns}^{1/2}} p_0(\omega_{ns}) \sqrt{\frac{2i}{\pi}}$$

Штрих над знаком суммы обозначает, что суммирование ведется по номерам n , соответствующим $\alpha_{ns} > 0$. Асимптотика (3.10) описывает эволюцию «горбов» волновых пакетов. В таблице даны значения α_{ns} , ω_{ns} , A_{ns} , V_n , соответствующие параметрам на фиг. 1. В расчете полагалось

n	$\alpha_{ns} \cdot 10$	$\omega_{ns} \cdot 10^2$	$A_{ns} \cdot 10^6$	V_n	$\omega_0 \cdot 10$	$\alpha_n \cdot 10^2$	$B_n \cdot 10^4$
1	0,6586	6,0794 + i0,0724	0,8665	0,9701	0,5995	6,4989 - i0,0747	0,654
2	1,0106	9,4599 + i0,3089	6,876	0,8344	0,9395	10,0258 - i0,3809	5,480
3	2,5393	24,3778 + i0,0818	5,871	0,8088	2,4386	25,4101 - i0,1184	7,795

$v_0 f(\omega) = 1$. Амплитуда A_{ns} характеризует восприимчивость пограничного слоя к внешнему воздействию. Пусть отсос/вдув газа через стенку выполняется по закону

$$y = 0, \quad v_2(x, t) = v_0, \quad 0 < t < \Delta t, \quad |x| < \Delta x / 2; \quad v_2 = 0, \quad t \leq 0, \quad x \geq \Delta x$$

Выберем оптимальные масштабы для возбуждения наиболее неустойчивого пакета с центральным волновым числом α_{1s} : $\Delta x = \pi / |\alpha_{1s}|$, $\Delta t = \pi / |\omega_{1s}|$. Тогда образ от формы воздействия $|p_0| = 4v_0 / (T(0)\alpha_{1s})$. Из таблицы следует, что для возбуждения пульсаций давления, отнесенных к статическому давлению внешнего потока P_e , с амплитудой $\sim 10^{-3}$ необходима интенсивность отсоса/вдува $v_0 \sim 10^{-2}$.

5. Так как неустойчивость является конвективной, можно поставить задачу о пространственном усилении возмущения, возбуждаемого внешним воздействием с гармоническим законом по времени. Пусть в (1.1) $f_1(t) = \sin \omega_0 t$, где ω_0 — частота из диапазона неустойчивости одной из мод α_n . Тогда

$$p_0 = - \frac{iv_0}{T(0)} \frac{\omega \omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Из предыдущего рассмотрения следует, что подынтегральные функции в (3.7) не имеют особенностей в полуплоскости $\text{Im } \omega \geq 0$, кроме полюсов $\pm \omega_0$. Сместим контур γ_ω в нижнюю полуплоскость комплексных ω с обходом полюсов сверху. Асимптотика возмущения при $t \rightarrow \infty$ определяется вычетами в точках $\pm \omega_0$

$$p_1 \sim \sum_n' B_n(y; \alpha_n, \omega_0) e^{\sigma_n(\omega_0)x} \sin(\text{Re } \alpha_n x - \omega_0 t + \chi_n)$$

$$B_n = |\psi_n|, \quad \sigma_n = -\text{Im } \alpha_n(\omega_0), \quad \chi_n = \arg \psi_n$$

$$\psi_n = \frac{v_0 \omega_0}{T(0)} \frac{p_2(y; \alpha_n, \omega_0)}{D_\alpha(\alpha_n, \omega_0)}$$

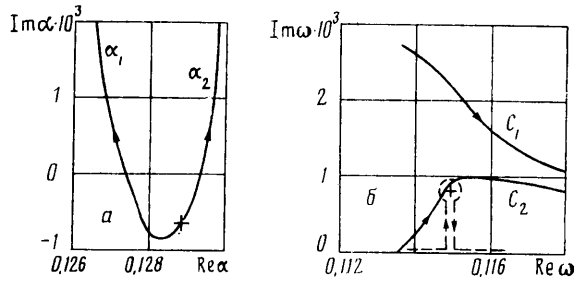
Суммирование ведется по модам α_n , которые имеют положительный инкремент σ_n . В каждой точке x наблюдаются гармонические колебания на частоте ω_0 с постоянной амплитудой $B_n \exp(\sigma_n x)$, т. е. происходит выход на установившийся режим при $t \rightarrow \infty$. В таблице приведены значения α_n , B_n для частот ω_0 , соответствующих первым трем максимумам инкрементов усиления. Пусть воздействие имеет форму ступеньки по x

$$y=0, \quad v_2(x, t) = v_0 \sin \omega_0 t, \quad t > 0, \quad |x| < \Delta x / 2, \quad \Delta x = \pi / |\alpha(\omega_0)|;$$

$$v_2 = 0, \quad t \leq 0$$

Чтобы возбудить волну неустойчивости с амплитудой пульсаций давления, отнесенных к статическому давлению внешнего потока, порядка 10^{-3} , необходима интенсивность воздействия $v_0 \sim 10^{-3}$ или удельный массовый расход $v_{0\rho}(0) \sim 10^{-4}$. Отметим, что данные значения согласуются по порядку величины с интенсивностями отсоса/вдува для возбуждения волны Толлмина — Шлихтинга в дозвуковом пограничном слое [17].

6. В рассмотренной задаче наибольшую сложность представляет анализ типа неустойчивости. Выше использован метод Бриггса [12]. Иногда применяют другой способ, основанный на методе перевала [4, 5]. Как показано в [14], метод перевала дает правильный результат, если учитываются все моды $\omega_n(\alpha)$, проходящие через перевальную точку. Возможны случаи, когда вклад в асимптотику при $t \rightarrow \infty$ от одной моды компенсируется вкладом от другой. Это происходит, например, тогда, когда в седловой точке α_s некоторой ветви $\omega_n(\alpha)$ сливаются две ветви $\alpha_1(\omega)$, $\alpha_2(\omega)$, принадлежащие одному классу волн (попутным или встречным). Проиллюстрируем сказанное примером. На фиг. 5, а приведены траектории собственных зна-



Фиг. 5

чений $\alpha_1(\omega)$, $\alpha_2(\omega)$, выходящие из точки слияния $\alpha_s = 0,128868 - i 0,000601$. Параметр ω меняется от $\omega^{(0)} = 0,114903 + i 0,000825$ до $\omega^{(1)} = 0,114903 + i 0,04$ вдоль контура $\text{Re } \omega = \text{const}$. Расчет выполнен для числа $M=10$, показателя адиабаты $\gamma=1,22$, числа $\text{Pr}=1$, температуры стенки $T_w=1$. Так как в точке α_s сливаются две попутные волны, то, по критерию Бриггса, неустойчивость конвективная. В [4] используется метод перевала и сделан противоположный вывод: при данных условиях реализуется абсолютная неустойчивость. Следуя работе [14], покажем, что данный вывод ошибочен.

Выполним в (1.8) интегрирование по ω . Тогда при $t > 0$

$$p_1 = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^2 \frac{p_2(\alpha, \omega_n) p_0(\omega_n)}{D_\omega(\alpha, \omega_n)} \exp[i\alpha x - i\omega_n(\alpha) t] d\alpha \quad (6.1)$$

Здесь оставлены только интересующие нас моды, которым приспаны номера $n=1, 2$. Выделим ветви многозначных функций $\omega(\alpha)$ и $\alpha(\omega)$. В α -плоскости проведем разрез из точки ветвления $\alpha^0 = 0,1282 - i 0,00057$, в которой $D_\omega = 0$. В ω -плоскости проведем разрез из точки ω^0 , в которой $D_\alpha = 0$. Оба разреза направим вниз. Выполним в (6.1) переход к интегрированию по ω , тогда при $t > 0$

$$p_1 = \frac{i}{2\pi} \sum_{n=1}^2 \int_{c_n} \frac{p_2(y; \alpha_n, \omega) p_0(\omega)}{D_\alpha(\alpha_n, \omega)} \exp(i\alpha_n x - i\omega t) d\omega$$

Здесь $\alpha_n(\omega)$ отображают некоторый участок контура C_n в участок вещественной оси в α -плоскости. Контур C_n показаны на фиг. 5, б. Сместим C_n вниз, охватывая петлями особую точку ω° , как показано пунктиром. Оценивая интегралы вдоль петель при больших t , получим

$$p_1 \sim \sum_{n=1}^2 \frac{p_2(y; \alpha_n, \omega^\circ) p_0(\omega^\circ)}{\pm (D_{\alpha\alpha} D_{\omega})_{\omega^\circ, \alpha_n}} t^{-1/2} \exp(i\alpha_n x - i\omega^\circ t) \quad (6.2)$$

Знаки в знаменателе определяются из разложения D_α в окрестности точки ω°

$$D_\alpha(\alpha_n, \omega) = \pm \sqrt{-2D_\omega D_{\alpha\alpha}}_{\omega^\circ, \alpha_n} (\omega - \omega^\circ)$$

Разные знаки перед радикалом относятся к разным ветвям α_1 и α_2 . В сумме по n в (6.2) один член компенсирует другой, и вклад в асимптотику оказывается нулевым. Следовательно, неустойчивость в данной точке не является абсолютной, что согласуется с критерием Бриггса. Ошибка в работе [4] обусловлена тем, что не был учтен компенсирующий вклад от моды $\omega_2(\alpha)$. Отметим, что метод Бриггса более прост в приложениях и имеет ясный физический смысл: абсолютная неустойчивость возможна только тогда, когда на неустойчивом режиме совпадают параметры волн, распространяющихся навстречу друг другу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mack L. M. Boundary-layer stability theory. Pt 2 // Jet Propulsion Laboratory Document. № 900-277 (rev. A). Pasadena: JPL, 1969. 200 p.
2. Гапонов С. А., Маслов А. А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука, 1980. 144 с.
3. Жигулев В. Н., Тумин А. М. Возникновение турбулентности. Новосибирск: Наука, 1987. 282 с.
4. Петров Г. В. Двумерная абсолютная неустойчивость сверхзвукового пограничного слоя // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 1. С. 176-179.
5. Терентьев Е. Д. Линейная задача о вибраторе, совершающем гармонические колебания на закритических частотах в дозвуковом пограничном слое // ПММ. 1984. Т. 48. № 2. С. 264-272.
6. Рыжов О. С., Савенков И. В. Пространственные возмущения, вносимые гармоническим осциллятором в пограничный слой на пластинке // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28. Вып. 4. С. 591-602.
7. Терентьев Е. Д. Расчет давления в линейной задаче о вибраторе в сверхзвуковом пограничном слое // ПММ. 1979. Т. 43. № 6. С. 1014-1028.
8. Гуцин В. Р., Федоров А. В. Асимптотический анализ невязких возмущений в сверхзвуковом пограничном слое // ПМТФ. 1989. № 1. С. 69-75.
9. Кольчало П. И. Неустойчивость плоскопараллельных сверхзвуковых потоков газа в линейном приближении // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 2. С. 10-16.
10. Линь Цзяцзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.
11. Федорченко А. М., Коцаренко Н. Я. Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах. М.: Наука, 1981. 176 с.
12. Briggs R. J. Electron-stream interaction with plasmas // Massach. Inst. Techn. Press. Cambridge, Mass., 1964.
13. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
14. Бойко И. И., Балева О. Г. О критериях абсолютной и конвективной неустойчивости. Препринт № 73-55Р. Киев: Ин-т теорет. физики АН УССР, 1973. 35 с.
15. Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. Т. 2. М.: Мир, 1970. 352 с.
16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 10. М.: Наука, 1979. 527 с.
17. Федоров А. В. Возбуждение волны Толлмина - Шлихтинга в пограничном слое периодическим внешним воздействием, локализованным на обтекаемой поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 6. С. 36-41.

Москва

Поступила в редакцию
30.III.1989