

УДК 533.693.011.32

© 1990 г.

А. М. ЕЛИЗАРОВ, Д. А. ФОКИН

ПОСТРОЕНИЕ КРЫЛОВЫХ ПРОФИЛЕЙ, ОБТЕКАЕМЫХ БЕЗОТРЫВНО В ЗАДАННОМ ДИАПАЗОНЕ ИЗМЕНЕНИЯ УГЛОВ АТАКИ

Одна из важных проблем аэродинамики заключается в разработке способов проектирования крыловых профилей, обладающих улучшенными характеристиками, в частности обтекаемых безотрывно при изменении угла атаки в заданном диапазоне. При таких исследованиях эффективен подход, основанный на решении обратной краевой задачи аэрогидродинамики [1–4]. В этом случае нужные свойства профиля удастся обеспечить за счет специального выбора распределения скорости на его поверхности, исходного в обратной задаче.

В рамках теории плоского безвихревого течения идеальной несжимаемой жидкости такой подход впервые применен в [2] при построении симметричных профилей по распределению скорости $v(\gamma)$ как функции полярного угла γ единичной окружности во вспомогательной плоскости. При $0 \leq \gamma \leq \pi$ задавалось распределение $v_1(\gamma)$, характеризующее обтекание профиля при отклонении его на угол $\alpha = \alpha_1 > 0$ от направления обтекания с нулевой подъемной силой. Затем распределение $v_1(\gamma)$ пересчитывалось на случай $\alpha = \alpha_0 = 0$ и продолжалось симметрично на участок $\pi \leq \gamma \leq 2\pi$. Далее решалась обратная краевая задача по $v(\gamma)$ для симметричного профиля с нулевым углом атаки.

Идея обобщить описанный метод проектирования «при отклонении» на случай несимметричных профилей содержится в [5], однако наиболее полно она была реализована в [6]. В этой работе дана общая постановка обратной краевой задачи по $v(\gamma)$ при отклонении: интервал $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ разделен точками $0 = \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n = 2\pi$ на отрезки $\gamma_k \leq \gamma \leq \gamma_{k+1}$, на каждом из которых заданы распределение скорости $v_k(\gamma)$ и соответствующее значение угла α_k , $k = 1, \dots, n$. Функции $v_k(\gamma)$ не могут быть произвольными, поэтому в [6] использовались распределения, содержащие свободные параметры. Значения параметров выбирались из условий сопряжения $v_k(\gamma)$ в точках γ_k , $k = 1, \dots, n$. При практическом проектировании профилей этот метод был применен в [7–9].

Задание скорости в виде функции от угловой координаты упрощает решение задачи, однако более естественно, как и в основной обратной краевой задаче аэрогидродинамики [1, 3], задавать распределение скорости как функцию дуговой координаты s . Один из вариантов постановки задачи при $n=2$, обобщающей [6] на этот случай, содержится в [10]. Там же предложен алгоритм численного решения для малых величин α_1 и α_2 .

В настоящей работе дана общая постановка обратной краевой задачи аэрогидродинамики по $v(s)$ для двух углов атаки, содержащая постановку [10] как частный случай. Построено интегральное представление решения, выписаны условия совместности начальных данных и условия разрешимости. Для удовлетворения последних применен метод квазирешений обратных краевых задач [11, 12]. Получен критерий отсутствия отрыва пограничного слоя на профиле при изменении угла атаки в заданном диапазоне, выраженный через распределения скорости при предельных положениях. Предложен способ задания гидродинамически целесообразных распределений скорости, учитывающий полученные условия безотрывности. Рассмотрены вопросы максимизации подъемной силы. Приведены результаты численных расчетов.

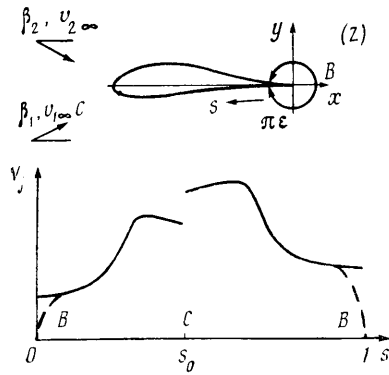
1. Постановка задачи и схема решения. В физической плоскости z (фиг. 1) искомый непроницаемый крыловой профиль обтекается плоским потенциальным установившимся потоком идеальной несжимаемой жидкости. Контур профиля имеет периметр L и является гладким, за исключением, быть может, задней кромки B , совпадающей с началом координат, где внутренний к области течения угол равен $\epsilon\pi$, $1 \leq \epsilon \leq 2$. Система координат выбрана так, что хорда профиля направлена вдоль

оси x . Безразмерная дуговая координата s , отнесенная к L , отсчитывается от $s=0$ в точке B до $s=1$ в ней же так, что при возрастании s область течения остается слева. На контуре профиля выбрана точка C с координатой s_0 , разбивающая его на два участка.

Пусть $v_{1\infty}$ и $v_{2\infty}$ — скорости невозмущенного течения при обтекании профиля под углами атаки β_1 и β_2 (всюду далее скорости отнесены к заданной величине $v_{1\infty}$, $V_j(s) = |v_j(s)|/v_{1\infty}$). Известными считаются $\delta = \beta_1 - \beta_2 > 0$ и $k = v_{1\infty}/v_{2\infty}$. Вдоль поверхности профиля соответственно на интервалах $0 \leq s \leq s_0$ и $s_0 \leq s \leq 1$ заданы распределения скорости потока $v_j(s)$, где $j=1,2$, для режимов обтекания с параметрами β_j и $v_{j\infty}$

$$\begin{aligned} v_1(s) &= (1-s)^{2/\varepsilon-1} v_1^*(s), \quad s_0 \leq s \leq 1 \\ v_2(s) &= -s^{2/\varepsilon-1} v_2^*(s), \quad 0 \leq s \leq s_0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Кусочно-гладкие функции $v_j^*(s)$, $j=1,2$, либо строго положительны, либо одна из них обращается в нуль в точке s_0 . В последнем случае s_0 задает абсциссу s_j одной из точек разветвления потока на контуре при соответствующем режиме обтекания. Если $v_j(s) > 0$, то положение точек A_j заранее не задается.



Фиг. 1

Поведение $v_j(s)$ в окрестностях точек $s=0$ и $s=1$, указанное в (1.1), определяется заданной величиной ε угла в задней кромке. Знаки $v_j(s)$ связаны с направлением обхода контура и поэтому $v_2(s) < 0$ при $0 < s < s_2$, $v_1(s) > 0$ при $s_1 < s < 1$; $v_2(0) = -v_1(1) < 0$ при $\varepsilon=2$ (бесконечно тонкая кромка), $v_2(0) = v_1(1) = 0$ при $1 \leq \varepsilon < 2$ (штриховые линии в окрестностях точек $s=0$ и $s=1$ на фиг. 1).

Требуется определить форму профиля, углы атаки β_j и коэффициенты подъемной силы C_{vj} для обоих режимов обтекания.

Приведем схему решения задачи. Пусть функция $z=z(\zeta)$ конформно отображает область $E^- = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$ на внешность профиля, $z(\infty) = \infty$, $z(1) = 0$. Для ее нахождения достаточно определить соответствие $s=s(\gamma)$ точек контура профиля и окружности $\zeta = \exp(i\gamma)$, $0 \leq \gamma \leq 2\pi$, причем функция $s(\gamma)$ должна быть гладкой, строго убывающей и в силу наложенных выше ограничений иметь представление

$$\ln |s'(\gamma)| = p(\gamma) + h(\gamma), \quad h(\gamma) = (\varepsilon-1) \ln [2 \sin(\frac{1}{2}\gamma)] \quad (1.2)$$

Здесь $p(\gamma)$ — гельдеровская функция, а $h(\gamma)$ служит для выделения логарифмических особенностей функции $\ln |s'(\gamma)|$ в точках $\gamma=0$, $\gamma=2\pi$. Пусть $w_j(z)$, $j=1,2$, — комплексные потенциалы течений при обтекании профиля под углами атаки β_j со скоростями набегающего потока $v_{j\infty}$. Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \ln \frac{dz}{d\zeta} &= \ln \left(\frac{dz}{dw_1} \frac{dw_1}{d\zeta} \right) = \ln \left(\frac{dz}{dw_2} \frac{dw_2}{d\zeta} \right) \\ w_j(\zeta) &= w_j[z(\zeta)], \quad j=1,2 \end{aligned}$$

Разделяя действительную и мнимую части при $\zeta = \infty$ и $\zeta = \exp(i\gamma)$, получим

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2 = \delta \quad (1.3)$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{v_{1\infty}}{v_{2\infty}} = k \quad (1.4)$$

$$\frac{v_1[s(\gamma)]}{v_2[s(\gamma)]} = \frac{k \cos(^{1/2}\gamma - \alpha_1)}{\cos(^{1/2}\gamma - \alpha_2)}, \quad 0 \leq \gamma \leq 2\pi \quad (1.5)$$

$$u_j \exp(-i\alpha_j) \equiv \frac{dw_j}{d\xi} \Big|_{\xi=\infty}$$

Обозначим

$$\varphi_1(s) = \int_s^1 v_1(s) ds, \quad s_0 \leq s \leq 1; \quad \Delta\varphi_1 = \varphi_1(s_0)$$

$$\varphi_2(s) = - \int_0^s v_2(s) ds, \quad 0 \leq s \leq s_0; \quad \Delta\varphi_2 = \varphi_2(s_0)$$

Пусть $\zeta_j = \exp[i(\pi + 2\alpha_j)]$, $j=1,2$, $\zeta_0 = \exp[i(\pi + 2\alpha_0)]$ — прообразы точек A_j и C на окружности, Γ_j — величины циркуляции скорости. Потенциалы скорости при обтекании круга с точками разветвления потока ζ_j и точкой схода $\zeta=1$ имеют вид

$$\varphi_j^*(\gamma) = 2u_j [2 \sin(^{1/2}\gamma - \alpha_j) \sin(^{1/2}\gamma) + \gamma \sin \alpha_j], \quad j=1,2$$

причем, согласно условию Жуковского — Чалыгина, $\Gamma_j/\sin \alpha_j = 4\pi u_j$. При $\alpha_j \rightarrow 0$ имеем $\Gamma_j \rightarrow 0$ и выписанное равенство понимается как предельное. Для определения функции $s(\gamma)$ на каждом из двух участков контура профиля служат уравнения

$$\varphi_1(s) = \varphi_1^*(\gamma), \quad s_0 \leq s \leq 1, \quad 0 \leq \gamma \leq \pi + 2\alpha_0 \quad (1.6)$$

$$\varphi_2(s) = \varphi_2^*(\gamma) - \Gamma_2, \quad 0 \leq s \leq s_0, \quad \pi + 2\alpha_0 \leq \gamma \leq 2\pi$$

которые выражают условия совпадения потенциалов скорости на окружности и на контуре профиля. Если уравнения (1.6) разрешимы, то, найдя функцию $s(\gamma)$ вида (1.2), аналогично [12] можно записать интегральное представление функции $z=z(\xi)$

$$z = \exp(iC_0) \int_1^\xi \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^{\varepsilon-1} \exp X(\xi) d\xi$$

где $X(\xi)$ восстанавливается интегралом Шварца с плотностью $p(\gamma)$ из (1.2), а константу C_0 выбираем так, чтобы ось x совпала с хордой профиля. Полагая $\xi = \exp(i\gamma)$, получим параметрические уравнения искомого контура. Зная $z(\xi)$, можно найти хорду профиля s и определить коэффициенты подъемной силы $C_{yj} = 2\Gamma_j/(cv_{j\infty})$ в предельных положениях. Итак, исходная задача сведена к определению функции $s(\gamma)$ из уравнений (1.6).

2. Условия совместности начальных данных и условия разрешимости. Так как функции $\varphi_j(s)$ и $\varphi_j^*(\gamma)$ одновременно имеют не более двух участков монотонности, причем $\varphi_1(1) = \varphi_1^*(0) = 0$, $\varphi_2(0) = \varphi_2^*(2\pi) - \Gamma_2 = 0$, и отыскивается строго убывающая функция $s(\gamma)$, то необходимым условием разрешимости (1.6) является выполнение равенств

$$\varphi_1(s_0) = \varphi_1^*(\pi + 2\alpha_0), \quad \varphi_2(s_0) = \varphi_2^*(\pi + 2\alpha_0) - \Gamma_2$$

выражающих условия совпадения значений левой и правой части в (1.6) на концах участков монотонности. Это приводит к уравнениям

$$2u_1 [2 \cos \alpha_0 \cos(\alpha_1 - \alpha_0) + (\pi + 2\alpha_0) \sin \alpha_1] = \Delta\varphi_1 \quad (2.1)$$

$$2u_2 [2 \cos \alpha_0 \cos(\alpha_2 - \alpha_0) + (2\alpha_0 - \pi) \sin \alpha_2] = \Delta\varphi_2$$

связывающим заданные величины $\Delta\varphi_j$ с неизвестными параметрами u_j , α_j , α_0 . Отметим, что если $v_j(s_0)=0$ при некотором j , то $\alpha_0=\alpha_j$. Учитывая равенство значений левой и правой частей в (1.5) соответственно при $\gamma=0$ и 2π , получим формулу для нахождения α_1

$$\alpha_1 = \arctg(a_* \operatorname{cosec} \delta - \operatorname{ctg} \delta), \quad a_* = \frac{kv_2^*(0)}{v_1^*(1)} \quad (2.2)$$

что вместе с (1.3) позволяет найти $\alpha_2 = \alpha_1 - \delta$. Из (1.5) при $\gamma = \pi + 2\alpha_0$ выводим формулу для нахождения α_0

$$\alpha_0 = \alpha_1 + \operatorname{arccctg}(a_* \operatorname{cosec} \delta - \operatorname{ctg} \delta), \quad a_* = \frac{kv_2(s_0)}{v_1(s_0)} \quad (2.3)$$

Таким образом, параметры α_0 , α_1 и α_2 определяются из (1.3), (2.2), (2.3). Для нахождения величин u_1 и u_2 служат уравнения (2.1), равенство (1.4) является условием совместности начальных данных и дает необходимое условие разрешимости, если функции $v_j^*(s)$ в (1.1) строго положительны. Если же $v_j^*(s_0)=0$ при $j=1$ или 2 , то $s_0=s_j$. Используя (1.5), получим соответственно

$$s_0=s_1, \quad v_2(s_0) = 2 \sin \delta \lim_{\gamma \rightarrow \pi + 2\alpha_1 - 0} \frac{v_1'[s(\gamma)]s'(\gamma)}{k \sin(\frac{1}{2}\gamma - \alpha_1)} = 8u_2 \cos \alpha_1 \sin^2 \delta \frac{v_1'(s_0)}{kv_2(s_0)} \quad (2.4)$$

$$s_0=s_2, \quad v_1(s_0) = 8ku_1 \cos \alpha_2 \sin^2 \delta \frac{v_2'(s_0)}{v_1(s_0)} \quad (2.5)$$

Следовательно, для разрешимости задачи в этом случае дополнительно к (1.4) необходимо выполнение одного из равенств (2.4), (2.5).

Итак, получены условия, гарантирующие разрешимость уравнений (1.6). Однако они не обеспечивают однозначность функции $z(\zeta)$ (и, следовательно, замкнутость искомого контура), а также совпадение величины $v_{1\infty}$, определяемой в ходе решения, с заданной в постановке задачи. Для обеспечения этих свойств необходимо выполнение условий разрешимости [1, 3]

$$\int_0^{2\pi} p(\tau) \exp(i\tau) d\tau = \pi(\varepsilon - 1), \quad \int_0^{2\pi} p(\tau) d\tau = 2\pi \ln \frac{u_1}{v_{1\infty}} \quad (2.6)$$

Как и в [11, 12], ниже для удовлетворения (2.6) применен метод квазирешений обратных краевых задач.

3. Выбор гидродинамически целесообразного распределения скорости. Исходные распределения $v_j(s)$, $j=1,2$, в соответствии с принятой моделью течения нужно задавать так, чтобы при любом $\beta_2 \leq \beta \leq \beta_1$ на всей поверхности профиля не происходил отрыв пограничного слоя. Г. Ю. Степановым при задании исходных данных в обратной задаче предложено использовать известные критерии отрыва пограничного слоя. Этот подход был реализован в [13] при профилировании лопаток турбомашин по методу годографа скорости и подробно описан в [4] (критерий безотрывности выполнялся последовательными приближениями). Укажем способ реализации этого подхода при выборе распределений $v_j(s)$ для двух углов атаки.

Пусть распределение $v(s)$ реализуется на профиле при его обтекании со скоростью v_∞ под углом атаки β , $\beta_2 \leq \beta \leq \beta_1$. Критерий отсутствия отрыва имеет вид [4, с. 398]

$$-\frac{v'(s) \delta^{**}(s)}{|v(s)|} \leq BR^{** -1/m}, \quad R^{**} = \frac{|v(s)| \delta^{**}(s)}{v} \quad (3.1)$$

$$\delta^{**}(s) = aAR^{** -1/m} |v(s)|^{1-b} \left| \int_{s_*}^s |v(\tau)|^{b-1} d\tau \right| \quad (3.2)$$

$$a = \frac{m+1}{m}, \quad b = \frac{2(4m-1)}{2m-1}, \quad A = A(m) > 0$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости, B и m — взаимосвязанные положительные постоянные (в простейшем случае $m = \infty$, $B = 0,005$), $\delta^{**}(s)$ — толщина потери импульса, A — постоянная, зависящая от выбора m , s_* — дуговая абсцисса точки разветвления потока. В силу (3.1) и (3.2) критерий безотрывности принимает вид

$$f(v; s_*, s) \geq f_0, \quad f_0 = -\frac{B_1}{A}, \quad B_1 < B \quad (3.3)$$

$$f(v; s_*, s) = av'(s) |v(s)|^{-b} \left| \int_{s_*}^s |v(\tau)|^{b-1} d\tau \right|$$

Отметим, что по методу Кочина — Лойцянского критерием безотрывности турбулентного пограничного слоя служит (3.3), где $a = 1,17$, $b = 4,75$, $f_0 = -6$.

Покажем, что для удовлетворения критерия (3.3) при всех $\beta_2 \leq \beta \leq \beta_1$ достаточно потребовать одновременного выполнения неравенств

$$f(v_1; s_1, s) \geq f_0, \quad s_1 \leq s \leq 1 \quad (3.4)$$

$$f(v_2; s_2, s) \geq f_0, \quad 0 \leq s \leq s_2$$

Напомним, что s_1 и s_2 в формуле (3.4) обозначают дуговые абсциссы точек A_j разветвления потока при обтекании профиля под углами атаки β_j , $j = 1, 2$. При $\beta_2 \leq \beta \leq \beta_1$ имеем $s_1 \leq s_* \leq s_2$, а из (1.5) находим

$$v(s)/v_\infty = v_1(s)T_1(s), \quad s_0 \leq s \leq 1 \quad (3.5)$$

$$v(s)/v_\infty = kv_2(s)T_2(s), \quad 0 \leq s \leq s_0$$

$$T_j(s) = \cos \delta_j - \sin \delta_j \operatorname{tg} [1/2 \gamma(s) - \alpha_j], \quad \delta_j = \beta_j - \beta, \quad j = 1, 2$$

где $\gamma(s)$ — обратная к функции $s(\gamma)$.

Учитывая соотношение

$$\frac{d\gamma}{ds} = -|v_j(s)| \left\{ \left| 4u_j \cos \left[\frac{1}{2} \gamma(s) - \alpha_j \right] \sin \left[\frac{1}{2} \gamma(s) \right] \right| \right\}^{-1}$$

нетрудно проверить, что дифференцируемые функции $T_j(s)$, $j = 1, 2$, неотрицательны соответственно на интервалах $s_* \leq s \leq 1$, $0 \leq s \leq s_*$, причем $T_j(s_*) = 0$, $T_1'(s) > 0$, $T_2'(s) < 0$. Следовательно, $T_j(\tau) \leq T_j(s)$, $j = 1, 2$, соответственно при $s_* \leq \tau \leq s$ и $s \leq \tau \leq s_*$ справедлива оценка

$$[T_j(s)]^{1-b} \left| \int_{s_*}^s |v_j(\tau) T_j(\tau)|^{b-1} d\tau \right| \leq \left| \int_{s_j}^s |v_j(\tau)|^{b-1} d\tau \right| \quad (3.6)$$

Пусть $v_1'(s) \geq 0$ или $v_2'(s) \geq 0$ при некотором значении s . В силу неотрицательности $T_j(s)$ и $v_j(s)T_j'(s)$ выполняется неравенство $v'(s) \geq 0$. Следовательно, $f(v; s_*, s) \geq 0$ и (3.3) имеет место. Пусть теперь $v_j'(s) < 0$, $j = 1$ или 2 , при некотором $s_* \leq s \leq 1$ или $0 \leq s \leq s_*$. Из (3.4)–(3.6) получаем

$$f(v; s_*, s) \geq f(v_j; s_j, s) \geq f_0$$

Таким образом, задание распределений $v_j(s)$, $j=1, 2$, удовлетворяющих (3.4), гарантирует безотрывность обтекания профиля (по критерию (3.3)) при изменении угла во всем диапазоне $\beta_2 \leq \beta \leq \beta_1$.

Рассмотрим способ задания функций $v_j(s)$, $j=1, 2$, удовлетворяющих (3.4), в случае $\varepsilon=2$. В [14] при построении решетки профилей в потоке вязкого газа с учетом начального участка ламинарного пограничного слоя и его перехода в турбулентный в качестве целесообразного для задания распределения $v(s)$ на диффузорном участке указано условие постоянства специальным образом построенного формпараметра. На базе этой идеи в [12] построена простая формула для безотрывного распределения скорости на участке торможения, полученная как решение уравнения $f(v; s_*, s) = f_0$. Используя эту формулу и фиксируя значения $C_{j*} = v_j(s_0)$, $C_{1*} = v_1(1)$ и $C_{2*} = |v_2(0)|$, зададим функции $v_j(s)$, $j=1, 2$, в следующем виде:

$$\begin{aligned} v_1(s) &= C_{1*}, \quad s_0 \leq s \leq l_1 \\ v_1(s) &= C_{1*} [1 + K_1(s - l_1)]^{-m_1}, \quad l_1 \leq s \leq 1 \\ v_2(s) &= -C_{2*}, \quad l_2 \leq s \leq s_0 \\ v_2(s) &= -C_{2*} [1 + K_2(l_2 - s)]^{-m_2}, \quad 0 \leq s \leq l_2 \\ m_j &= -f_{0j} [a - f_{0j}(b - 1)]^{-1} \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $f_{0j} \geq f_0$ — заданные значения формпараметра $f(v_j, s_j, s)$, $j=1, 2$, соответственно на участках торможения $0 \leq s \leq l_2$ и $l_1 \leq s \leq 1$. Взаимосвязанные величины K_j и l_j однозначно определяются из условий $v_1(1) = C_{1*}$, $v_2(0) = -C_{2*}$. Используя (2.1), получим формулу для определения Γ_1

$$\Gamma_1 = \frac{2\pi\Delta\varphi_1}{H(\alpha_0, \alpha_1)}, \quad H(\alpha_0, \alpha_1) = 2 \cos^2 \alpha_0 \operatorname{ctg} \alpha_1 + \sin 2\alpha_0 + \pi + 2\alpha_0 \quad (3.8)$$

Для распределений $v_j(s)$ вида (3.7) имеем

$$\Delta\varphi_1 = C_{1*} \left\{ l_1 - s_0 + \frac{[1 + K_1(1 - l_1)]^{1 - m_1 - 1}}{K_1(1 - m_1)} \right\}$$

В рассматриваемом случае положение критических точек s_j , $j=1, 2$, не определено. Однако при $\beta = \beta_1$ и β_2 в силу невозрастания функций $v_j(s)$ в (3.7) для продолжений этих функций соответственно на интервалы $s_1 \leq s \leq s_0$ и $s_0 \leq s \leq s_2$ будут выполняться неравенства $v_j'(s) \geq 0$, $j=1, 2$. Вычислительный эксперимент показал, что вид распределений $v_j(s)$ на этих участках незначительно сказывается на развитии пограничного слоя. Это влияние можно учесть, задавая f_{0j} с запасом, например $-3 \leq f_{0j} \leq -2$. Тогда $v_j(s)$, $j=1, 2$, вида (3.7) будут удовлетворять критерию (3.4), а соответствующий профиль (при выполнении условий совместности и разрешимости) будет безотрывным во всем диапазоне изменения угла атаки.

4. Симметричные профили. Максимизация подъемной силы. Пусть $s_0 = 0,5$, $k = 1$, $v_1(s) > 0$ — заданная кусочно-гладкая функция, $s_0 \leq s \leq 1$, $v_2(s) = -v_1(1 - s)$, $0 \leq s \leq s_0$. Таким исходным данным соответствует симметричный контур, причем $\alpha_1 = -\alpha_2 = \delta/2$ и (1.4) выполняется тождественно. В силу (3.8) для максимизации Γ_1 (и, следовательно, подъемной силы) нужно максимизировать функционал

$$\Delta\varphi_1 = A(v_1) = \int_{s_0}^1 v_1(\tau) d\tau$$

на рассматриваемом классе эюр.

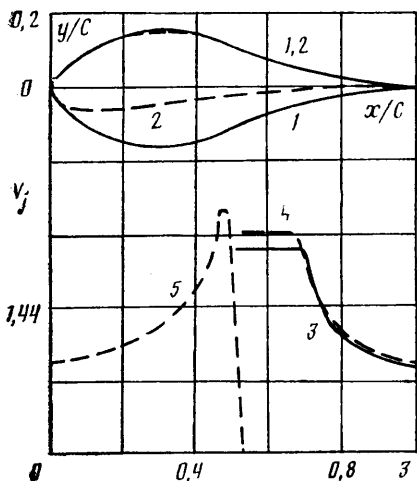
Пусть $v_1'(s)$ имеет не более конечного числа точек разрыва первого рода и

$$F(v_1, s) = a v_1'(s) v_1^{-b}(s) \int_{s_0}^s v_1^{b-1}(\tau) d\tau, \quad s_0 \leq s \leq 1 \quad (4.1)$$

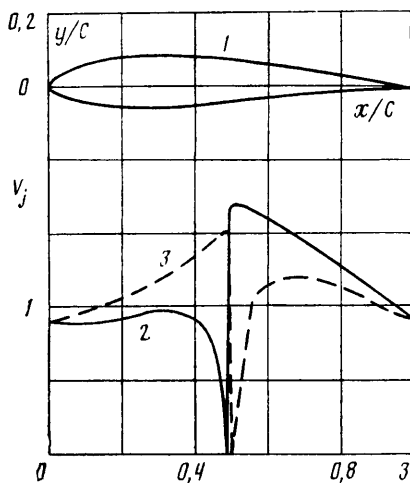
причем на концах интервалов непрерывности производной $v_1'(s)$ в (4.1) берутся соответствующие односторонние пределы. Рассмотрим класс эюр $v_1(s)$, $s_0 \leq s \leq 1$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} v_1(s_0) &= C_{1*}, \quad v_1(1) = C_{1*}, \quad p \leq F(v_1, s) \leq q \\ C_{1*} &> C_{1*}, \quad f_{01} \leq p < 0 \leq q < \infty \end{aligned} \quad (4.2)$$

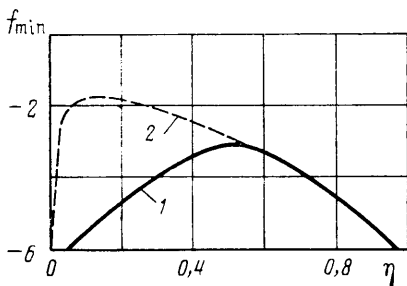
где C_{1*} , C_{1*} , p , q — фиксированные постоянные.



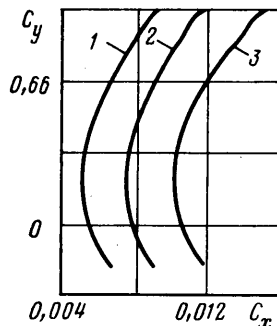
Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 3



Фиг. 5

Линейный функционал $A(v_1)$ достигает экстремальных значений на границе компактного в пространстве непрерывных функций множества (4.2). Граница этого множества состоит из кусочно-гладких функций $v_1(s)$, удовлетворяющих на объединении конечного числа подынтервалов из интервала $s_0 \leq s \leq 1$ уравнению $F(v_1, s) = p$, а на дополнительном участке — уравнению $F(v_1, s) = q$. Решения этих уравнений нетрудно получить в явном виде. При $p = f_{01}$, $q = 0$ экстремальная функция $v_1(s)$ имеет вид (3.7). Случай произвольных p и q исследуется аналогично.

Отметим, что для распределений (3.7) максимум площади эпокеры при вариациях C_1^* и C_{1*} достигается, если $C_1^*/C_{1*} = h$, где h — единственный корень уравнения

$$h = n_1(n_2 - n_3 h^{1/n_4})^{-1}, \quad n_1 = a - f_{01}(b-1)$$

$$n_2 = (b-2)(b-1)^{-1}[a - f_{01}(b-2)], \quad n_3 = \frac{(b-2)f_{01}^2}{a}, \quad n_4 = -\frac{f_{01}}{n_1}$$

В частности, при $f_{01} = -6$ имеем $h = 2,3524$.

На фиг. 2 изображены распределение $v_1(s)$, $0,5 \leq s \leq 1$, максимизирующее Γ_1 при $f_{01} = -6$ (сплошная линия 3), и соответствующий симметричный профиль (сплошная линия 1), построенный для $\delta = 25^\circ$ и имеющий относительную толщину $t = 0,33$ (условия разрешимости выполняются в силу специального выбора параметров C_1^* и δ). В предельных положениях при $\beta = \pm 12,5^\circ$ этот профиль имеет величину $C_y = \pm 1,51$. На фиг. 3 (сплошная линия 1) представлена зависимость $f_{\min} = f_{\min}(\eta)$, $f_{\min} = \min_{0 \leq s \leq 1} f(v, s_*, s)$, $\eta = (\beta - \beta_2)/\delta$. Неравенство $f_{\min} \geq -6$ выполняется лишь в интервале $|\beta| \leq 11,75^\circ$. Это объясняется тем, что на диффузорном участке значение f_{01} задавалось без запаса.

5. Несимметричные профили. Пусть $k=1$ и значения $v_1(1)$, $v_2(0)$ заданы. Тогда α_1 определяется из (2.2), а для максимизации Γ_1 в (3.8) необходимо минимизировать функцию $H(\alpha_0, \alpha_1)$ по α_0 и максимизировать $\Delta\varphi_1$. Минимум $H(\alpha_0, \alpha_1)$ достигается при $\alpha_0 = \alpha_2 = \alpha_1 - \delta$. Максимальное значение $\Delta\varphi_1$, как и в разд. 4, достигается при $v_1(s_0) = h v_1(1)$. Теперь осталось подобрать распределение $v_2(s)$ с фиксирован-

ными значениями $v_2(0)$, $v_2'(s_0)$ из (2.5) и площадью эпюры Δf_2 из (2.1), удовлетворяющее критерию безотрывности (3.3) и условиям разрешимости (2.6).

На фиг. 2 штриховой линией 4 изображены оптимизированное распределение $v_1(s)$ (при $f_{01}=-6$) и распределение $v_2(s)$, подобранное для $v_1(s)$ указанным выше способом ($\delta=25^\circ$). Штриховой линией 2 представлен соответствующий профиль, который в предельном положении при $\beta_1=13,6^\circ$ имеет $C_{y1}=2,06$. Зависимость $f_{\min}(\eta)$ изображена штриховой линией 2 на фиг. 3. Отметим, что $f_{\min}<-6$ при $\beta\geq 12,3^\circ$, поскольку распределение скорости $v_1(s)$, $s_0\leq s\leq 1$, задавалось, как и в симметричном случае, без запаса на безотрывность.

Профили на фиг. 2 представляют прежде всего теоретический интерес, так как оптимизированы в рамках описанной выше модели безотрывности. Расчет на них пограничного слоя по методу [15] с учетом начального ламинарного участка и его перехода в турбулентный показал наличие отрыва. При практическом проектировании профилей, обтекаемых безотрывно в заданном диапазоне изменения углов атаки, нужно брать в модели (3.3) определенный запас. Один из таких примеров для $\delta=10^\circ$ приведен на фиг. 4. В качестве исходных использованы распределения $v_j(s)$, $j=1, 2$, вида (3.7). Для удовлетворения (2.6) был применен метод квазирешений [12]. В результате получен профиль (сплошная линия 1) с $t=0,12$, на котором распределения скоростей при $\beta_1=6^\circ$ и $\beta_2=-4^\circ$ представлены линиями 2 и 3. Расчет пограничного слоя на этом профиле методом [15] для различных чисел $Re=v_\infty c/\nu$ показал отсутствие отрыва во всем диапазоне изменения углов атаки. На фиг. 5 приведены зависимости $C_y(C_x)$ для $Re=10^6, 5\cdot 10^5, 3\cdot 10^5$ (кривые 1-3), где C_x - коэффициент сопротивления, вычисленный по формуле Сквайра - Юнга.

Авторы благодарят Г. Ю. Степанова и Н. Б. Ильинского за постоянное внимание к работе и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mangler W. Die Berechnung eines Tragflügelprofils mit vorgeschriebener Druckverteilung // J. Deutschen Luftfahrtforschung. 1938. В. 1. S. 146-153.
2. Lighthill M. J. A new method of two-dimensional aerodynamic design // Aeronaut. Res. Council. Repts and Mem. 1945. № 2412. 44 p.
3. Тумашев Г. Г. Определение формы границ потока жидкости по заданному распределению скорости или давления // Уч. зап. Казан. ун-та. 1952. Т. 112. Кн. 3. С. 3.
4. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962. 512 с.
5. Glauret M. B. The application of the exact method of airfoil design // Aeronaut. Res. Council. Repts and Mem. 1947. № 2683. 45 p.
6. Eppler R. Direkte Berechnung von Tragflügelprofilen aus der Druckverteilung // Ing. Arch. 1957. В. 25. № 1. S. 32-57.
7. Eppler R. Turbulent airfoils for general aviation // J. Aircraft. 1978. V. 15. № 2. P. 93-99. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика. 1978. Т. 16. № 6. С. 131-140).
8. Eppler R., Shen Y. T. Wing sections for hydrofoils. Pt I. Symmetrical profiles // J. Ship Res. 1979. V. 23. № 3. P. 131-140.
9. Shen Y. T., Eppler R. Wing sections for hydrofoils. Pt II. Nonsymmetrical profiles // J. Ship Res. 1981. V. 25. № 3. P. 191-200.
10. Завадовский Н. Ю., Мелешко С. В., Русецкий А. А. Задача оптимизации формы крыловых профилей // Тр. 12-го Научно-методологического семинара по гидродинамике судна. НРБ, Варна, 1983. Т. 2. С. 1-16.
11. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Квазирешения обратной краевой задачи гидроаэродинамики // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284. № 2. С. 319-322.
12. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Построение крыловых профилей методом квазирешений обратных краевых задач // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 3. С. 5-13.
13. Степанов Г. Ю. Профиль лопатки турбомашин. А. с. № 155362. Заявл. 14.09.50 г. // Б. И. 1963. № 12. С. 66.
14. Степанов Г. Ю. Гидродинамическое исследование плоских турбинных решеток // Тр. ЦИАМ. 1951. № 202. 61 с.
15. Eppler R. Practical calculation of laminar and turbulent bled-off boundary layers. NASA TM-75328, 1978.

Казань

Поступила в редакцию
20.II.1989