

УДК 533.6.011.72

© 1990 г.

С. А. ЕГОРУШКИН, В. С. УСПЕНСКИЙ

ВЛИЯНИЕ ОПЕРЕЖАЮЩЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СИЛЬНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В ГАЗАХ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ

Задача об устойчивости плоской ударной волны в идеальной двухпараметрической среде с произвольным уравнением состояния была впервые решена в работах Дьякова, Иорданского [1, 2], причем одним из результатов этих работ было доказательство устойчивости ударной волны в совершенном газе.

Долгое время неустойчивые ударные волны считались математической экзотикой, однако затем они были обнаружены в экспериментах на ударных трубах [3, 4] (см. список литературы в [4]). Отличительной чертой всех наблюдаемых явлений было то, что неустойчивость возникала после начала ионизации за фронтом ударной волны.

Теоретические объяснения неустойчивости, предложенные в [3–5], не дали убедительного решения вопроса, так как либо не описывали явления во всем диапазоне изменения наблюдаемых параметров [3], либо основывались на кинетических механизмах ионизации [4, 5], поставленных под сомнение в последующих теоретических и экспериментальных работах [6, 7]. Поэтому вопрос о причинах неустойчивости сильных ударных волн остается открытым.

В настоящей работе исследуется влияние опережающего излучения на устойчивость сильной ударной волны в идеальном газе с произвольным уравнением состояния. Ионизация до и за фронтом ударной волны и излучение считаются равновесными. Рассмотрение проводится в линейном по амплитуде приближении, для возмущений с длиной волны, много большей ширины релаксационных зон до и за ударной волной. Получены условия дестабилизирующего воздействия опережающего излучения на ударную волну. Показано, в частности, что нейтрально-устойчивые ударные волны становятся неустойчивыми. Получены условия, при которых возникновение неустойчивости носит пороговый характер по интенсивности излучения. Установлено, что излучение оказывает дестабилизирующее воздействие и на устойчивые ударные волны, в том числе на ударные волны в совершенном газе. Однако в этом случае неустойчивость может возникнуть только при возмущениях с длиной волны, сравнимой с шириной релаксационной зоны. Предложен простой физический механизм возникновения неустойчивости под действием опережающего излучения.

1. Сильная ударная волна имеет довольно сложную структуру, в которой можно выделить три основные области (фиг. 1). Центральная область A_2B_1 представляет собой узкий ударный слой (ударную волну в классическом смысле), в котором происходит сжатие и разогрев газа.

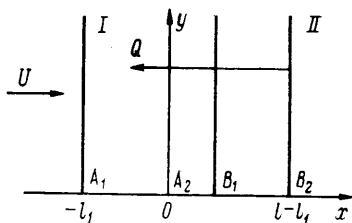
Непосредственно за ударным слоем A_2B_1 расположена область B_1B_2 неравновесно ионизованного и излучающего газа. Справа от зоны B_1B_2 неравновесной релаксации расположена область II, в которой степень ионизации газа можно считать равновесной, а действием излучения пренебречь.

Опережающее излучение, проникая из зоны II и частично поглощаясь в ударном слое A_2B_1 , нагревает газ перед ударной волной. Характерная ширина l_1 этого прогреваемого слоя (область I) определяется длиной свободного пробега квантов излучения непрерывного спектра [8]. Нагреваясь, газ в зоне I ионизируется и также начинает излучать в непрерывном спектре, но этим излучением можно пренебречь.

С точки зрения теории Дьякова — Иорданского под ударной волной понимается разрыв A_1B_2 , соединяющий равновесные состояния газа на $-\infty$ и $+\infty$. Структура зоны A_1B_2 при этом не учитывается. Поэтому ре-

зультаты [1, 2] справедливы только для возмущений с длиной волны $\lambda \gg l$ и представляют собой решение задачи об устойчивости ударной волны в нулевом приближении по параметру l/λ . Здесь l — характерная ширина равновесной ударной волны $A_1 B_2$.

Настоящая работа представляет собой учет элементов структуры сильной ударной волны в теории Дьякова — Иорданского. При этом из понятия поверхности разрыва, принятого в [1, 2], вычленяется наиболее протяженная зона I (фиг. 1), а под ударной волной понимается область $A_2 B_2$,



Фиг. 1

структура которой не учитывается. Рассматриваются газодинамические возмущения с длиной волны $\lambda \gg l$. Отметим, что для большинства реальных условий выполнена оценка $l_1 \gg l - l_1$, например для аргона при давлении $p=10$ тор, скорости набегающего потока, определяемой числом Маха $M_\infty > 15$, $l - l_1 \sim 10^{-1}$ см, $l_1 \geq 1$ см.

Таким образом, в рассматриваемой модели плоская ударная волна соединяет два однородных состояния равновесно ионизованного газа, причем с поверхности ударной волны задан поток излучения, определяемый параметрами за ударной волной. Степень ионизации газа и характеристики излучения считаются равновесными функциями температуры и плотности. Необходимо отметить, что подобная постановка не учитывает некоторых особенностей протекания релаксационных процессов в ударных волнах. Тем не менее она в основных чертах правильно отражает характер изучаемых явлений, позволяет получить аналитические критерии устойчивости и объяснить физический механизм дестабилизации ударной волны опережающим излучением.

Введем декартову систему координат, ось y которой совпадает с невозмущенной поверхностью ударной волны, а ось x направлена по потоку. Уравнения газовой динамики в областях I, II запишутся в виде

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial R_j^\circ}{\partial t} + \frac{\partial R_j^\circ U_j^\circ}{\partial x} + \frac{\partial R_j^\circ V_j^\circ}{\partial y} = 0 \\
 & \frac{\partial R_j^\circ U_j^\circ}{\partial t} + \frac{\partial R_j^\circ (U_j^\circ)^2}{\partial x} + \frac{\partial R_j^\circ U_j^\circ V_j^\circ}{\partial y} = 0 \\
 & \frac{\partial R_j^\circ V_j^\circ}{\partial t} + \frac{\partial R_j^\circ V_j^\circ U_j^\circ}{\partial x} + \frac{\partial R_j^\circ (V_j^\circ)^2}{\partial y} + \frac{\partial P_j^\circ}{\partial y} = 0 \\
 & \frac{\partial R_j^\circ E_j^\circ}{\partial t} + \frac{\partial R_j^\circ E_j^\circ U_j^\circ}{\partial x} + \frac{\partial R_j^\circ E_j^\circ V_j^\circ}{\partial y} + \frac{\partial P_j^\circ U_j^\circ}{\partial x} + \frac{\partial P_j^\circ V_j^\circ}{\partial y} + \frac{\partial (Q_x^\circ)^j}{\partial x} + \\
 & \quad + \frac{\partial (Q_y^\circ)^j}{\partial y} = 0 \\
 & E_j^\circ = E_j^\circ(P_j^\circ, R_j^\circ, \alpha_j) + \frac{(U_j^\circ)^2}{2} + \frac{(V_j^\circ)^2}{2} \\
 & \alpha_j = \alpha_j(T_j^\circ, R_j^\circ), P_j^\circ = P_j^\circ(T_j^\circ, R_j^\circ, \alpha_j)
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь значения индекса $j=1$ и 2 соответствуют параметрам до (область I) и за (область II) ударной волной, $R^\circ, P^\circ, T^\circ$ — плотность, давление и температура, U°, V° — компоненты скорости, E° — внутренняя энергия единицы массы, $\alpha(T^\circ, R^\circ)$ — степень ионизации, $P^\circ(T^\circ, R^\circ, \alpha)$ — уравнение состояния, Q° — вектор потока лучистой энергии.

В силу условия $\lambda \gg l_1$ преобладающий вклад в теплоперенос перед фронтом ударной волны вносит поток излучения, исходящий по нормали к поверхности скачка. Вклад удаленных участков излучающей поверхности оказывается мал в силу экспоненциальной зависимости плотности потока излучения от расстояния. Поэтому при вычислении потока излучения в зоне I ударную волну можно считать локально-плоской. По аналогичной причине можно пренебречь эффектом переизлучения в областях I и II.

Таким образом, с учетом предположения о равновесности излучения для вектора потока лучистой энергии в областях I, II в приближении осреднения по углам справедливы представления [9]

$$\begin{aligned} (Q^\circ)^1 &= 2\pi \{E_1(k_1 x) B_1(T_2^+, \alpha_2), E_2(k_1 x) B_2(T_2^+, \alpha_2)\} \\ (Q^\circ)^2 &= 0, \quad E_1(k_1 x) = - \int_1^\infty e^{-xsh_1 s^{-3}} ds, \quad T_2^+ = T_2^\circ|_{x=0} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь B_1 — интегральная равновесная функция излучения, $k_1 \sim l_1^{-1}$ — коэффициент поглощения излучения непрерывного спектра, принимаемого постоянным для различных частот излучения в области I. В невозмущенном течении $\partial(Q_v^\circ)^1 / \partial y = 0$. Для рассматриваемых длинноволновых возмущений $(Q_v^\circ)^1$ может быть вычислено, например, в приближении осреднения по углам Эдингтона [9]

$$(Q_v^\circ)^1 = E_2 B_2, \quad B_2(T_2^+, \alpha_2) = \frac{dB_1}{dT^\circ} \frac{\partial T^\circ}{\partial y}, \quad E_2(k_1 x) = \int_0^x E_1(k_1 r) dr \quad (1.3)$$

Учет неравновесности излучения в зоне ионизационной релаксации $B_1 B_2$ может быть выполнен введением соответствующего множителя, меньшего единицы, в поток излучения [10]. Аналогично может быть описано поглощение излучения в ударном слое $A_2 B_1$ (фиг. 1).

В качестве характерных величин введем скорость U_2° и плотность R_2° газа за ударной волной. Тогда параметры течения в областях I, II запишутся в виде

$$\begin{aligned} U_j^\circ &= U_2^\circ U_j (1 + u_j), \quad R_j^\circ = R_2^\circ R_j (1 + \rho_j), \quad P_j^\circ = P_j R_2^\circ (U_2^\circ)^2 (1 + p_j) \\ T_j^\circ &= T_j (U_2^\circ)^2 (1 + \theta_j), \quad E_j^\circ = E_j U_2^\circ (1 + \varepsilon_j), \quad V_j^\circ = U_2^\circ v_j \\ (Q_x^\circ)^1 &= R_2^\circ (U_2^\circ)^3 (Q_x^1 + q_x), \quad (Q_v^\circ)^1 = R_2^\circ (U_2^\circ)^3 q_v \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь U, P, R, E, Q соответствуют безразмерным параметрам невозмущенного течения, $u, v, \rho, p, \varepsilon, q_x, q_v$ — возмущения скорости, плотности, давления, внутренней энергии и вектора потока тепла.

Из (1.1) следуют соотношения для невозмущенных параметров в областях I и II, которые позволяют рассчитать невозмущенное течение до и за ударной волной по параметрам набегающего потока и функции $Q_x^1(k_1 x)$.

2. Подставляя (1.4), (1.5) в систему (1.1) и оставляя линейные по амплитуде члены, получим уравнения для малых возмущений, решение которых в областях I, II будем искать в виде

$$F_j(x, y, t) = F_j^\circ(x) e^{i(\omega t + k_y y)}, \quad F = (u, v, p, \rho) \quad (2.1)$$

В области I для $F_j^\circ(x)$ получим систему (индекс ноль будем для краткости опускать)

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} (u_1 + \rho_1) + i\omega^\circ R_1 \rho_1 + ik_y R_1 v_1 = 0 \\ & i\omega^\circ (\rho_1 + u_1) + \frac{d}{dx} [U_1 (2u_1 + \rho_1)] + ik_y v_1 + \frac{d}{dx} (P_1 p_1) = 0 \\ & i\omega^\circ R_1 \left[E_1 (\rho_1 + \varepsilon_1) + \frac{1}{2} U_1^2 (\rho_1 + 2u_1) \right] + \frac{d}{dx} [E_1 (\rho_1 + u_1 + \varepsilon_1)] + \\ & + \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [U_1^2 (\rho_1 + 3u_1)] + \frac{d}{dx} [P_1 U_1 (p_1 + u_1)] + ik_y P_1 v_1 + ik_y R_1 \left(E_1 + \frac{1}{2} U_1^2 \right) v_1 = \\ & = \frac{2\pi T_2 + \theta_2^+}{R_2^\circ (U_2^\circ)^3} (B_+{}' E_1{}' - k_y^2 E_2 B_+{}'') \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\theta_2|_{x=0} = \theta_2^+ e^{(i\omega^\circ t + k_y y)}, \quad \varepsilon_1 = e_p^1 p_1 + e_R^1 \rho_1$$

$$B_+{}' \equiv \frac{dB}{dT^\circ} \Big|_{x=0}, \quad B_+{}'' = \frac{d}{dT^\circ} (B_+{}')^2 \frac{\partial T^\circ}{\partial y} \Big|_{x=0}$$

Величины e_p^j и e_R^j находятся из линеаризованных уравнений состояния $\varepsilon^\circ = \varepsilon^\circ(P^\circ, R^\circ, \alpha)$, $P^\circ = P^\circ(T^\circ, R^\circ, \alpha)$ и закона ионизации $\alpha = \alpha(T^\circ, R^\circ)$.

Так как параметры невозмущенного течения и функции $E_{1,2}$ зависят от $k_1 x$, сделаем в (2.2) замену переменных $x_1 = k_1(x - \varphi)$. Разделив уравнения (2.1) на k_1 и введя обозначения

$$\lambda_y = \frac{k_y}{k_1} \sim \frac{l_1}{\lambda} \ll 1, \quad \omega^\circ = \frac{\omega^\circ k_y}{k_y k_1} \equiv \omega \lambda_y$$

систему (2.1) запишем в виде (члены с φ_1' , φ_y' опущены, так как входят в (2.3) квадратичным по амплитуде возмущений образом)

$$AF_x' + (B + i\lambda_y C)F = G_0 - \lambda_y^2 G_1 \quad (2.3)$$

Решение (2.3) будем искать в виде ряда по целым степеням λ_y : $F = F_0 + i\lambda_y F_1 + \lambda_y^2 F_2 + \dots$. При этом функции F_i удовлетворяют уравнениям

$$AF_0' + BF_0 = G_0, \quad AF_1' + BF_1 = -CF_0$$

Несложные выкладки приводят к следующим выражениям для F_0 и F_1 :

$$\begin{aligned} u_1^\circ &= -E_1(x_1) b \theta_2^+ D_0, & \rho_1^\circ &= u_1^\circ, & p_1^\circ &= -\frac{U_1}{P_1} u_1^\circ \\ v_1^\circ &= 0, & u_1^1 &= -\omega b \theta_2^+ D_1, & \rho_1^1 &= -\omega b \theta_2^+ D_2 - u_1^1 \\ v_1^1 &= -\omega b \theta_2^+ D_3, & p_1^1 &= -\frac{U_1}{P_1} (u_1^1 - \omega b \theta_2^+ D_2), & b &= \frac{2\pi T_2 + B_+{}'}{R_2^\circ (U_2^\circ)^3} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Величины D_i выражаются через параметры невозмущенного течения. Из приведенных формул следует, что при $x \rightarrow -\infty$ $F_1 \rightarrow 0$, что соответствует отсутствию приходящих на ударную волну и порождаемых внешним источником возмущений.

В области II уравнения для малых возмущений представляют собой систему уравнений акустики с постоянными коэффициентами, решение которой можно искать в виде

$$F_2 = \sum_{j=1}^4 (F_2^\circ)^j e^{i(\omega^\circ t + k_x x + k_y y)} \quad (2.5)$$

При этом величины ω° , k_x^j , k_y должны удовлетворять дисперсионному уравнению

$$(\omega^\circ + k_x^j)^2 [(\omega^\circ + k_x^j)^2 - ((k_x^j)^2 + k_y^2) M^{-2}] = 0 \quad (2.6)$$

где M — число Маха в ионизованном газе, вычисленное по равновесной скорости звука.

Уравнение (2.6) имеет четыре корня, два из которых ($k_x^{1,2} = -\omega^\circ$) соответствуют энтропийной и вихревой, а два других — приходящей на ударную волну и уходящей от нее звуковым волнам.

В силу отсутствия источника возмущений на $+\infty$ амплитуда приходящей волны должна равняться нулю. Так как для дальнейшего понадобится только давление за ударной волной, которое не меняется в энтропийной и вихревой волнах, запишем

$$p_2 = p_2^\circ e^{i(\omega^\circ t + k_x x + k_y y)}, \quad u_2^\circ = -\frac{k_x}{\omega + k_x} P_2 p_2^\circ \quad (2.7)$$

$$v_2^\circ = \frac{k_y}{k_x} u_2^\circ, \quad \rho_2^\circ = M^2 P_2 p_2^\circ, \quad k_x = \frac{(\omega M^2 \pm \sqrt{M^2 \omega^2 + M^2 - 1}) k_y}{1 - M^2}$$

Ветвь $k_x(\omega)$ определяется из условия $\text{Im } k_x \geq 0$.

3. Возмущения газодинамических величин в областях I, II должны удовлетворять линеаризованным условиям Рэнкина — Гюгио на ударной волне, которые могут быть записаны в виде

$$(1 + \delta) P_2 p_2 + 2u_2 = L_1, \quad \frac{\delta - 1}{2} P_2 p_2 + \frac{\sigma - 1}{\sigma} \varphi_1 = L_2 \quad (3.1)$$

$$v_2 - (\sigma - 1) \varphi_1 = v_1, \quad \rho_2 - \delta P_2 p_2 = L_3$$

Здесь $x = \varphi(t, y)$ — возмущение ударной волны, параметр $\sigma = U_1$ характеризует ее интенсивность, L_i — линейные функции возмущений перед ударной волной, индекс ноль относится к значениям функций на ударной волне. При выводе (3.1) в законе сохранения энергии на ударной волне учитывался источниковый член, описывающий опережающее излучение.

Если излучения нет и возмущения в набегающем сверхзвуковом потоке отсутствуют, правые части системы (3.1) обращаются в нули и она совпадает с хорошо известными линеаризованными условиями Рэнкина — Гюгио [1, 2], при этом величина δ характеризует наклон ударной адиабаты в плоскости $(1/R^\circ, P^\circ)$ и совпадает с одноименным параметром работы [4].

Следуя [11], исключим перекрестным дифференцированием из (3.1) величину φ и используя линеаризованные уравнения газовой динамики в области II, приведем систему (3.1) к одному дифференциальному соотношению, связывающему возмущения давления за ударной волной с возмущениями в набегающем сверхзвуковом потоке

$$P_2 \left[(2M^2 + 1 + \delta) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2(M^2 - 1) \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} + \sigma(\delta - 1) \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right] = \\ = 2 \frac{\partial^2 L_1}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial y} + 2\sigma \frac{\partial^2 L_2}{\partial y^2} \equiv L[F_1] \quad (3.2)$$

Правая часть уравнения (3.2) представляет собой линейный дифференциальный оператор, действующий на функции F_1 , которые описывают возмущения в набегающем сверхзвуковом потоке. Согласно (2.3) — (2.4), $F_1 = F_1^\circ + i\lambda_y F_1^1$ и $L[F_1] = L[F_1^\circ] + i\lambda_y L[F_1^1]$. Непосредственным вычислением нетрудно убедиться, что $L[F_1^\circ] = 0$, что соответствует предельному переходу к решению Дьякова — Иорданского при $\lambda_y \rightarrow 0$, когда тол-

пиной нагретого слоя перед ударной волной и процессами ионизации в нем можно пренебречь.

Согласно (2.4), функции F_1^1 линейно зависят от возмущения температуры за ударной волной ($F_1^1 = \theta_2 + \Phi_1^1$), которое в свою очередь выражается через возмущение давления при помощи линеаризованного уравнения состояния и краевых условий

$$T_2 = \left[P_2 p_2 - \rho_2 \frac{dP_2}{dR_2} \right] \frac{dP_2}{dT_2} \quad (3.3)$$

$$\rho_2 = \delta P_2 p_2 + L_3(\Phi_1^1), \quad L_3(F_1^1) = \theta_2 + L_3(\Phi_1^1)$$

Таким образом, в силу (3.3) правая часть уравнения (3.2) оказывается выраженной через возмущение давления за ударной волной. Подставляя в полученное соотношение выражение (2.7), выпишем окончательное уравнение для собственных чисел исследуемой краевой задачи

$$W(\omega) \equiv \omega^2(1+\delta) + \sigma(\delta-1) \pm 2\omega \sqrt{M^2\omega^2 + M^2 - 1} = i\lambda_y R(\omega) \quad (3.4)$$

$$R(\omega) = -\frac{b\omega(c_1\omega^2 + c_2)}{1 - b\omega c_3}, \quad b = \frac{2\pi B_+'}{R_2^\circ (U_2^\circ)^3}$$

Здесь c_1, c_2, c_3 — константы, определяемые по невозмущенному течению и уравнению состояния среды. Знак « \pm » в $W(\omega)$ соответствует знаку « \mp » в выражении для функции $k_x(\omega)$ (см. (2.7)), та или другая ветвь которой выбирается согласно условию $\text{Im } k_x \geq 0$.

4. Решение (3.4) будем искать в виде ряда $\omega = \omega_0 + i\lambda_y \omega_1 + \dots$. Тогда ω_0 удовлетворяет уравнению $W(\omega_0) = 0$, которое подробно исследовалось в [1, 2], а величина ω_1 определяется из соотношения

$$\omega_1 = R(\omega_0) [W_\omega'(\omega_0)]^{-1} \quad (4.1)$$

Собственная функция, соответствующая рассматриваемому корню ω , имеет вид

$$F(\omega, x, y, t) \equiv F(x) e^{i k_y(\omega_0 t + y) - \lambda_y k_y \omega_1 t} \quad (4.2)$$

В области $x > 0$ $F(x) = F_0 e^{i k_x x}$, причем $\text{Im } k_x(\omega) \geq 0$.

Множитель $e^{-\lambda_y k_y \omega_1 t}$ в правой части (4.2) связан с опережающим излучением и определяет отличие построенной собственной функции от решения Дьякова — Иорданского [1, 2].

Поэтому, если $\text{Re } \omega_1 < 0$, то опережающее излучение действует на ударную волну дестабилизирующе. При этом необходимые и достаточные условия возникновения неустойчивости зависят от длины волны возмущения и имеют вид

$$\lambda_y \text{Re } \omega_1 + \text{Im } \omega_0 < 0 \quad \text{Im } k_x(\omega_0 + i\lambda_y \omega_1) \geq 0 \quad (4.3)$$

Физический механизм возникновения неустойчивости состоит в том, что случайное температурное возмущение за ударной волной приводит к локальному усилению (уменьшению) потока опережающего излучения, что создает температурную неоднородность в набегающем потоке и приводит к ускорению (торможению) соответствующих участков ударной волны с дальнейшим ростом (убыванием) температуры газа и потока опережающего излучения. В определенных условиях (определяемых (4.3)) этот процесс может приводить к самовозбуждению и росту двумерных возмущений.

Проверим выполнение неравенств $\text{Re } \omega_1 < 0$, (4.3) для устойчивых и нейтрально-устойчивых по [1, 2] ударных волн. Для этого воспользуемся результатами [2], где было показано, что асимптотика решения задачи

об устойчивости ударной волны определяется поведением интеграла

$$I_R = \int \frac{e^{i\omega t}}{W(\omega)} d\omega$$

который вычисляется вдоль прямой L_ω : $(-\infty - i\Omega_0, +\infty - i\Omega_0)$, лежащей в плоскости ω ниже всех особенностей подынтегрального выражения.

Для вычисления I_R проведем разрез $[-\sqrt{M^2-1}, \sqrt{M^2-1}]$ в плоскости ω , выделяющий однозначную ветвь корня в $W(\omega)$ и сделаем замену переменных

$$\omega = -\frac{i\sqrt{1-M^2}}{2M} (z-z^{-1}) \quad (4.4)$$

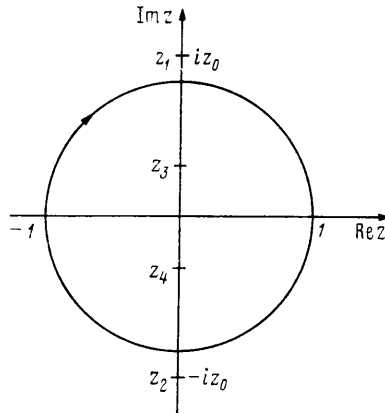
переводящую внешность разреза во внешность единичного круга (фиг. 2). Тогда по теореме о вычетах и лемме Жордана [12]

$$I_R = \int_{|z|=1} \omega_z' e^{i\omega(z)t} P^{-1}(z) dz + \sum_{|z|>1} \text{res}(\omega_z' e^{i\omega(z)t} P^{-1}(z))$$

$$P(z) = Az^4 + 2Bz + C, \quad A = (1-M^2)(1+\delta+2M)$$

$$B = 2M^2(1-\delta)\sigma - (1+\delta)(1-M^2), \quad C = (1-M^2)(1+\delta-2M)$$

В [2] было показано, что если ударная волна устойчива, т. е. $\delta_0 < \delta < 1$ ($\delta_0 = (\sigma M^2 + M^2 - 1) / (\sigma M^2 + 1 - M^2)$), то все четыре корня $P(z)$ лежат внутри единичного круга и I_R определяется интегралом по окружности, имеющим асимптотику $I_R \sim t^{-3/2}$. При $\delta \rightarrow \delta_0$ корни $P(z)$ становятся чисто мнимыми. При $\delta = \delta_0$ два из них принимают значения $z = \pm i$, а интеграл по окружности ведет себя как $t^{-1/2}$.



Фиг. 2

Для нейтрально-устойчивых ударных волн $(-1 - 2M < \delta < \delta_0)$ корни $P(z)$ остаются чисто мнимыми, причем два из них ($z_{1,2} = \pm iz_0$) лежат вне единичного круга (фиг. 2) и определяют асимптотику $I_R \sim e^{ih\nu} (y + \omega(\pm iz_0)t)$. Рассмотрим один из этих корней, полагая для определенности, что $z_0 > 0$. В силу (4.4) ему соответствует действительная величина $\omega_0' = \sqrt{M^2-1} (z_0 + z_0^{-1}) / 2 > 0$ — корень $W(\omega)$. При этом

$$W(\omega) = (1+\delta)\omega^2 - (1-\delta)\sigma + 2\omega\sqrt{\omega^2 M^2 + M^2 - 1}$$

что соответствует ветви дисперсионного уравнения

$$k_x = (\omega M^2 - \sqrt{\omega^2 M^2 + M^2 - 1}) (1 - M^2)^{-1}$$

Тогда нетрудно показать, что для всех $\omega_0^1 > \sqrt{M^2 - 1}$ и $-1 - 2M < \delta < \delta_0$, $W'(\omega_0^1) > 0$.

Аналогичное рассмотрение, проведенное для корня $z = -iz_0$, приводит к результатам

$$\omega_0^2 = \omega(-iz_0) = -\omega_0^1, \quad k_x(\omega) = (\omega M^2 + \sqrt{\omega^2 M^2 + M^2 - 1})(1 - M^2)^{-1}$$

$$W(\omega) = (1 + \delta)\omega^2 - (1 - \delta)\sigma - 2\omega\sqrt{\omega^2 M^2 + M^2 - 1}, \quad W'(\omega_0^2) < 0$$

Тогда, согласно (3.4) и (4.1)

$$\text{sign}(\omega_1) = \text{sign}\left(-\frac{|b|(c_1\omega_0^2 + c_2)}{1 - |b|\omega_0 c_3}\right) \quad (4.5)$$

Пусть $c_1\omega_0^2 + c_2 > 0$. Тогда при малых $|b|\omega_1 < 0$. Так как в рассматриваемом случае $\text{Im}(\omega_0) = 0$, то неравенства (4.3) выполняются, т. е. сколь угодно слабое излучение ($|b| \ll 1$) делает ударную волну неустойчивой.

Если $c_1\omega_0^2 + c_2 < 0$, то в зависимости от знака c_3 для одного из корней $\omega_0^{1,2}$ величина $\omega_0 c_3$ будет положительна. Тогда при $|b| > (\omega_0 c_3)^{-1}$ знаменатель в (4.5) поменяет знак и ω_1 станет отрицательной, что соответствует неустойчивости ударной волны.

Таким образом, нейтрально-устойчивые по [1, 2] ударные волны под действием опережающего излучения становятся неустойчивыми. При этом в зависимости от уравнения состояния (знака $c_1\omega_0^2 + c_2$) неустойчивость либо не зависит от интенсивности излучения, либо имеет пороговый характер и наступает при $|b| > |(\omega c_3)^{-1}|$.

Исследуем теперь влияние опережающего излучения на устойчивые по [1, 2] ударные волны при значениях параметра δ , близких к δ_0 , что соответствует условиям экспериментов [3, 4]. В этом случае корни $P(z)$ также являются чисто мнимыми, но располагаются внутри единичного круга [2]. Поэтому критерий возникновения неустойчивости (4.3), эквивалентный в силу $\text{Im} \omega_0 = 0$ неравенству $\text{Re} \omega_1 < 0$, необходимо дополнить условием выхода точки $z(\omega)$ за единичную окружность

$$\text{Re} \omega_1 < 0, \quad |z(\omega_0 + i\lambda_v \omega_1)| > 1 \quad (4.6)$$

Так как $|\lambda_v \omega_1| \ll |\omega_0| \sim 1$, имеет смысл рассматривать только пару корней $z_0^{1,2} = \pm i \mp i \Delta z_0$, $0 < \Delta z_0 \ll 1$, расположенную вблизи единичной окружности. В силу (4.4) числам $z_0^{1,2}$ соответствуют корни $W(\omega)$

$$\omega_0^{1,2} = \pm \sqrt{M^2 - 1} \pm \Delta \omega_0, \quad \Delta \omega_0 > 0$$

При этом уравнение $W(\omega) = 0$ имеет вид

$$W(\omega) = \omega^2(1 + \delta) - (1 - \delta)\sigma \mp 2\omega\sqrt{M^2\omega^2 + M^2 - 1} = 0$$

в первом и во втором случаях соответственно, что следует из неравенства $\omega^2(1 + \delta) - (1 - \delta)\sigma > 0$, выполненного при всех $|\omega| > \sqrt{M^2 - 1}$ и $\delta > \delta_0$. Тогда для производной W'_ω получим выражение $W'_\omega \simeq (\Delta \omega_0)^{-1/2}$ причем знак минус соответствует корню $\omega_0 > 0$. Теперь из (3.4) и (4.1) следует, что

$$\text{sign}(\omega_1) = \text{sign}\left(\frac{|b|(c_1\omega_0^2 + c_2)}{1 - |b|\omega_0 c_3}\right)$$

Поэтому опережающее излучение оказывает дестабилизирующее воздействие на ударную волну, если $c_1\omega_0^2 + c_2 < 0$ и интенсивность излучения произвольна или $c_1\omega_0^2 + c_2 > 0$, а интенсивность излучения больше порогового значения $|b| > (\omega c_3)^{-1}$.

Отметим, что несложные вычисления, проведенные для сильной ударной волны ($M_\infty \gg 1$) в одноатомном совершенном газе ($\gamma = 5/3$), дают $c_1\omega^2 + c_2 < 0$. Таким образом, и на устойчивые по [1, 2] ударные волны опережающее излучение действует дестабилизирующим образом. Про-

верим теперь выполнение достаточного условия возникновения неустойчивости — второго неравенства в (4.6). Рассмотрим для определенности корень $\omega = \sqrt{M^{-2} - 1 + \Delta\omega_0 + i\lambda_y\omega_1}$, $\omega_1 < 0$. В плоскости z ему соответствует точка с координатой $i - i\Delta z$, причем в силу (4.4), (3.4) и (4.1)

$$\Delta z \sim (\Delta\omega_0)^{1/2} (1 + i\lambda_y c_0 |b| (\Delta\omega_0)^{-1/2})^{1/2}, \quad c_0 < 0, \quad c_0 = \text{const}$$

При $|\lambda_y c_0 |b| (\Delta\omega_0)^{-1/2} \ll 1$ $|\text{Re } \Delta z| \gg |\text{Im } \Delta z|$ и смещение корня z от точки $z = i$ происходит внутри единичного круга почти по мнимой оси ($i \rightarrow i - i\Delta z$). В другом предельном случае

$$\begin{aligned} |\lambda_y |b| c_0 (\Delta\omega_0)^{-1/2} | &\gg 1 \\ -i\Delta z &\sim (\Delta\omega_0)^{1/4} \sqrt{\lambda_y |c_0 b|} e^{-i^{3/4}\pi} \end{aligned}$$

т. е. точка $z = i$ смещается внутрь единичной окружности. Поэтому неравенство $|i - i\Delta z| > 1$ может быть выполнено только при $|\Delta z| \sim O(1)$, т. е. при $\lambda_y \sim O(1)$. Таким образом, устойчивая по [1, 2] ударная волна может стать неустойчивой под действием опережающего излучения только при наличии возмущений с длиной волны порядка толщины прегретого слоя.

Авторы выражают благодарность А. Г. Куликовскому и А. А. Бармину за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дьяков С. П. Об устойчивости ударных волн // ЖЭТФ. 1954. Т. 27. № 3. С. 288–295.
2. Иорданский С. В. Об устойчивости плоской стационарной ударной волны // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 4. С. 465–472.
3. Griffiths R. W., Sandeman R. J., Hornung H. G. The stability of shock waves in ionizing and dissociating gases // J. Physics. D: Appl. Phys. 1976. V. 9. № 12. P. 1681–1691.
4. Мишин Г. И., Бедин А. П., Ющенкова Н. И. и др. Аномальная релаксация и неустойчивость ударных волн в газах // ЖТФ. 1981. Т. 51. Вып. 11. С. 2315–2324.
5. Коршунов С. Е. Об устойчивости ударных волн с конечной зоной релаксации // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 5. С. 176–179.
6. Howling A. F. P., McIntyre T. J., Taloni P. A., Sandeman R. J. On the population of the metastable states behind unstable shock wave in ionizing argon // J. Fluid Mechanics. 1986. V. 170. P. 319–337.
7. Железняк М. Б., Филимонова Е. А. Влияние ассоциативной ионизации на релаксацию за фронтом сильных ударных волн в аргоне // Теплофизика высоких температур. 1986. Т. 24. Вып. 6. С. 1203–1205.
8. Цикулин М. А., Попов Е. Г. Излучательные свойства ударных волн в газах. М.: Наука, 1977. 173 с.
9. Пиллюгин Н. Н., Турский Г. А. Основы динамики излучающего газа. М.: Изд-во МГУ, 1979. 147 с.
10. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 686 с.
11. Блозин А. М. Интегралы энергии в задаче об устойчивости ударной волны. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. 1982. 176 с.
12. Лаврентьев М. А., Шабар Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.III.1989