

УДК 533.6.011.5

© 1990 г.

Ю. Б. ЛИФШИЦ, В. С. САКОВИЧ

О ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ В ТЕОРИИ КОНИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

Применение потенциальной теории для описания внешних течений при умеренных сверхзвуковых скоростях позволяет создавать весьма быстродействующие алгоритмы расчета обтекания даже при появлении областей с дозвуковыми скоростями [1, 2]. Такой подход, однако, сопряжен с погрешностями, природа которых заключается в пренебрежении увеличением энтропии в головном скачке уплотнения. Оценить величину этих погрешностей и их влияние на значения различных параметров течения проще всего на примерах конических течений. В работе для интегрирования уравнения конического потенциала используется проекционно-сеточный метод сквозного счета [3]. Результаты расчетов обтекания кругового и эллиптического конусов, треугольной пластины и V-образного крыла сравниваются с соответствующими решениями системы уравнений Эйлера. Определяется область применимости потенциальной модели и доказывается, что выполнение на головном скачке уплотнения уравнения ударной поляры Гюгонио увеличивает погрешность вычисления давления.

1. Потенциальные модели. Пусть интенсивность скачков уплотнения, возникающих при обтекании тел равномерным на бесконечности сверхзвуковым потоком, характеризуется малой величиной ε . Изменение энтропии в таких скачках имеет порядок ε^3 , и такой же порядок имеет, согласно уравнению Крокко, завихренность потока за скачками уплотнения. Это позволяет с погрешностью ε^3 считать поле скоростей \mathbf{q} потенциальным, причем сам потенциал Φ удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\operatorname{div}(\rho \operatorname{grad} \Phi) = 0, \quad \mathbf{q} = \operatorname{grad} \Phi \quad (1.1)$$

Входящая в него плотность ρ вычисляется при помощи соотношения, следующего из уравнений энергии, состояния и постоянства в потоке энтропии S

$$\rho = \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2 (1 - q^2) \right]^{1/(\kappa - 1)} \quad (1.2)$$

Здесь κ — показатель адиабаты Пуассона, в качестве единиц измерения плотности ρ и скорости q взяты их значения в невозмущенном потоке, единицей длины является некоторый характерный размер обтекаемого тела, M_∞ — число Маха на бесконечности, энтропия отнесена к газовой постоянной и полагается равной нулю в набегающем потоке. Точное выражение для ρ отличается от формулы (1.2) множителем $\exp(-S)$, поэтому при вычислении ρ допускается погрешность $O(\varepsilon^3)$.

При решении задачи обтекания уравнения (1.1), (1.2) дополняются условием непротекания на поверхности тела и условием на некоторой поверхности, находящейся полностью вне возмущенной области течения

$$\mathbf{n} \operatorname{grad} \Phi = 0, \quad \operatorname{grad} \Phi = \mathbf{q}_\infty \quad (1.3)$$

Здесь \mathbf{n} — вектор нормали к поверхности тела, а \mathbf{q}_∞ — вектор скорости набегающего потока.

Уравнение (1.1) гиперболично в областях потока, где модуль скорости превышает скорость звука, и допускает там решения с поверхностями разрыва производных потенциала, являющимися скачками уплотнения.

На фронте скачка уплотнения отсутствует разрыв тангенциальной составляющей скорости

$$[q_\tau]=0, \quad [\rho q_n]=0 \quad (1.4)$$

поэтому потенциал непрерывен при пересечении фронта. Второе условие, связывающее нормальные к фронту составляющие скорости q_{1n} и q_{2n} , получается из интегрального аналога первого из уравнений (1.1) и означает отсутствие на разрыве источников и стоков в смысле определения плотности по формуле (1.2).

Краевая задача (1.1)–(1.4) определяет обычную потенциальную модель потока, в которой потенциал является кусочно-дифференцируемой функцией. При решении этой задачи с помощью консервативных методов сквозного счета условия (1.4) выполняются автоматически. Действительно, в этих методах интегральная форма уравнения неразрывности заменяется дискретным аналогом, гарантирующим отсутствие источников и стоков в ячейках баланса, покрывающих всю область интегрирования. Поэтому условия (1.4) обычно не фигурируют явно при формулировке потенциальной модели, хотя и играют в ней весьма важную роль.

В [4] рассмотрена другая потенциальная модель, в которой второе из равенств (1.4) заменено соотношением Прандтля и Майера между скоростями частиц на фронте скачка

$$q_{1n}q_{2n} = \frac{2}{(\kappa+1)M_\infty^2} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}(1-q_\tau^2) \quad (1.5)$$

Это уравнение совместно с требованием непрерывности потенциала описывает ударную поляру Гюгоню и может быть использовано для выделения скачка в виде внешней или внутренней границы области интегрирования. Для консервативных методов сквозного счета нужно знать интенсивность источника, который распределяется во фронтах скачков, удовлетворяющих условию (1.5). Ее величину проще всего вычислить из уравнения непрерывности потока массы на скачке при определении плотности по точной, а не изэнтропической формуле. После небольших преобразований получаем

$$[\rho q_n] = \rho_1 q_{1n} (e^{S_2 - S_1} - 1) = Q \quad (1.6)$$

Здесь изменение энтропии $S_2 - S_1$ находится обычным способом [5] по значениям параметров перед скачком.

Интересно отметить, что в задаче обтекания кругового конуса под нулевым углом атаки решение уравнения потенциала с выполнением равенства (1.5) на головном скачке уплотнения приводит к такому же распределению скорости, что и решение уравнений Эйлера. Однако решение с условиями (1.4) этим свойством не обладает.

2. Конические течения. Рассмотрим обтекание конического тела, расположенного вдоль оси x декартовой системы координат x, y, z . В случае конических течений параметры потока зависят только от отношений y/x и z/x , поэтому в сечениях $x = \text{const}$ поля скоростей и плотности подобны друг другу и их удобно вычислять только в сечении $x=1$. В этом сечении вводится расчетная система координат η, ξ , соотносящаяся с декартовыми переменными при помощи формул $\eta = \eta(y, z)$, $\xi = \xi(y, z)$.

В новых переменных уравнение неразрывности (1.1) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\rho V}{J} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\rho W}{J} + \frac{2\rho U}{J} = 0$$

$$U = \Phi + a_{12}\Phi_\eta + a_{13}\Phi_\xi \quad (2.1)$$

$$V = a_{12}U + C\Phi_\eta + B\Phi_\xi$$

$$W = a_{13}U + B\Phi_\eta + A\Phi_\xi$$

Здесь U , V и W — контравариантные составляющие скорости, а компоненты метрического тензора и якобиан преобразования выражаются через декартовы координаты и производные η и ξ

$$a_{12} = -y\eta_y - z\eta_z, \quad a_{13} = -y\xi_y - z\xi_z, \quad A = \xi_y^2 + \xi_z^2$$

$$B = \eta_y\xi_y + \eta_z\xi_z, \quad C = \eta_y^2 + \eta_z^2, \quad J = \eta_y\xi_z - \eta_z\xi_y$$

В уравнение (2.1) входит еще плотность ρ , определяемая по формуле (1.2). Требуемое для этого значение q^2 вычисляется также через производные потенциала и составляющие метрического тензора

$$q^2 = U^2 + A\Phi_\xi^2 + 2B\Phi_\eta\Phi_\xi + C\Phi_\eta^2 \quad (2.2)$$

Преобразование координат выбирается таким образом, что контур сечения обтекаемого тела совпадает с координатной линией $\eta = \text{const}$, поэтому граничное условие непротекания переходит на ней в равенство $V = 0$.

Граничное условие, задающее набегающий поток на некоторой поверхности, целиком лежащей в невозмущенной области, в конических течениях трансформируется в задание потенциала и его нормальной производной на линии пересечения этой поверхности плоскостью $x = 1$. Эти значения проще всего получить из формулы для потенциала равномерного потока, движущегося с единичной скоростью под углом атаки α и углом скольжения γ

$$\Phi = \cos \alpha \cos \gamma + y \sin \alpha \cos \gamma + z \sin \gamma \quad (2.3)$$

Уравнение для потенциала имеет гиперболический тип при

$$q^2 > a^2 + \Phi^2(1 + y^2 + z^2)^{-1} \quad (2.4)$$

и эллиптический тип при выполнении противоположного неравенства. Здесь a — скорость звука, вычисляемая при помощи уравнения Бернулли. Изменение типа уравнения (2.1) нужно принимать во внимание при конструировании численного метода интегрирования.

3. Проекционно-сеточный метод. В настоящее время описаны два неплохих алгоритма численного решения смешанных задач для уравнения конического потенциала. Один из них [6] базируется на записи этого уравнения в неконсервативной форме и аппроксимации вторых производных потенциала при помощи следящей схемы из работы [7]. Его недостатком является применение неконсервативной схемы для расчета течений без выделения скачков уплотнения и, кроме того, весьма сложная методика построения преобразования координат, основанная на конформном отображении. В [1] в этот алгоритм вставлена процедура выделения головного скачка уплотнения. В работе [8] конические течения вычисляются при помощи консервативной разностной схемы. Представленный в этом разделе проекционно-сеточный метод обладает большим числом положительных свойств: он консервативен, не зависит от способа генерации сетки, позволяет удовлетворять на скачках уплотнения условиям типа (1.6) и точно воспроизводит равномерный поток.

Пусть граница конического тела в области интегрирования $\Omega(\eta, \xi)$ совпадает с линией $\eta = 1$, а внешней границей является прямая $\eta = K$. Переменная ξ в этой области меняется от 1 до L , причем на прямых $\xi = 1$ и $\xi = L$ совпадают как значения самого потенциала Φ , так и его производной $\partial\Phi/\partial\eta$. Покроем область интегрирования сеткой Ω_h , ячейки которой — квадраты с вершинами в точках с целыми значениями $\eta = k$, $\xi = l$, а стороны имеют единичную длину. Такое представление координат узлов сетки фактически дает способ их нумерации.

В узлах сетки (k, l) декартовы координаты $y_{k,l}$ и $z_{k,l}$ задаются при помощи специальной процедуры генерации сетки, искомый потенциал вычисляется также в узлах сетки. Внутри ячейки сетки потенциал $\Phi(\eta, \xi)$ и координаты y и z восполняются при помощи формул билинейной интерполяции. Для ячейки с правым верхним углом (k, l) это дает

$$\Phi(\eta, \xi) = (k - \eta)(l - \xi)\Phi_{k-1, l-1} + (\eta - k + 1)(l - \xi)\Phi_{k, l-1} +$$

$$+ (\eta - k + 1)(\xi - l + 1)\Phi_{k, l} + (k - \eta)(\xi - l + 1)\Phi_{k-1, l} \quad (3.1)$$

Аналогичные формулы имеют место и для декартовых координат $y(\eta, \xi)$ и $z(\eta, \xi)$ внутри ячеек сетки. Они определяют вид преобразования координат.

Равенство (3.1) означает, что приближенное решение задачи на сетке Ω_h принадлежит линейному многообразию кусочно-дифференцируемых функций, имеющих на

границах ячеек разрывы нормальных к ним производных. Оно позволяет вычислить метрические коэффициенты, якобиан преобразования, модуль скорости (2.2) и контравариантные составляющие скорости. Все эти функции терпят разрыв на границах ячеек, поэтому дифференциальное уравнение (2.1), в которое они входят, должно быть заменено интегральным аналогом.

Возьмем теперь ячейки баланса $\Omega_{k,l}^h$ на сетке Ω_h , которые представляют собой квадраты с вершинами в центрах ячеек сетки Ω_h . Ячейки баланса $\Omega_{k,l}^h$ состоят из двух полуячеек, прилегающих к боковым границам расчетной области $\zeta=1$ и $\zeta=L$. Прилегающие к телу ячейки баланса $\Omega_{1,l}^h$ являются прямоугольниками, одна из сторон которых совпадает с телом. Проинтегрируем уравнение (2.1) по площади каждой ячейки баланса $\Omega_{k,l}^h$. После замены интеграла от производных потоков массы контурным интегралом получим систему уравнений

$$\oint_{\partial\Omega_{k,l}^h} \rho \frac{W}{J} d\eta - \rho \frac{V}{J} d\zeta + 2 \iint_{\Omega_{k,l}^h} \rho \frac{U}{J} d\eta d\zeta = Q_{k,l} \quad (3.2)$$

Здесь $\partial\Omega_{k,l}^h$ — граница ячейки баланса $\Omega_{k,l}^h$, а направление ее обхода выбирается так, что площадь ячейки остается слева. Равенство значений потенциала и его нормальных производных на линиях $\zeta=1$ и $\zeta=L$ означает справедливость (3.2) и для составных ячеек $\Omega_{k,l}^h$. В потенциальной теории с условиями (1.4) на скачках уплотнения правая часть уравнений $Q_{k,l}=0$, при выполнении условия (1.6) величина $Q_{k,l}$ равна расходу массы в отрезке фронта скачка, находящегося внутри ячейки баланса.

Подставим в (3.2) выражения для контравариантных составляющих скорости V и W . Это дает уравнение

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial\Omega_{k,l}^h} \frac{\rho}{J} (A\Phi_\zeta + B\Phi_\eta) d\eta - \frac{\rho}{J} (B\Phi_\zeta + C\Phi_\eta) d\zeta + \\ & + \oint_{\partial\Omega_{k,l}^h} \rho \frac{U}{J} (a_{13}d\eta - a_{12}d\zeta) + 2 \iint_{\Omega_{k,l}^h} \rho \frac{U}{J} d\eta d\zeta = Q_{k,l} \end{aligned} \quad (3.3)$$

которое от соответствующего уравнения баланса для плоского течения отличается только слагаемыми, содержащими продольную скорость U . Поэтому при вычислении первого контурного интеграла в (3.3) воспользуемся теми же формулами, что и в работе [3]. В двух других интегралах будем считать произведение ρU постоянным в каждой ячейке сетки и равным значению в ее центре, оно выносится из-под знака интеграла в каждом квадранте ячейки баланса, а оставшиеся выражения являются линейными функциями и интегрируются точно. В полученных таким способом сеточных уравнениях для потенциала $\Phi_{k,l}$ коэффициенты однозначно определяются величиной ρ и значениями декартовых координат узлов сетки. Потенциал равномерного потока является точным решением этих уравнений.

Уравнение (2.1) для конического потенциала имеет смешанный эллиптико-гиперболический тип, поэтому в областях гиперболичности, где выполняется неравенство (2.4), в решении могут возникать как скачки уплотнения, так и скачки разрежения. Чтобы схема удовлетворяла энтропийному условию, которое запрещает существование скачков разрежения, в сеточные уравнения нужно ввести диссипативный механизм. Для этого, согласно идеям искусственной диссипации [9], следует в уравнениях (3.2) при выполнении (2.4) изменить плотность за счет смещения точки ее вычисления на величину порядка шага сетки вверх по потоку.

Системы сеточных уравнений (3.3) нужно дополнить заданием потенциала в узлах внешней границы $\eta=K$ по формуле (2.3) и условием периодичности $\Phi_{k,1} = \Phi_{k,L}$.

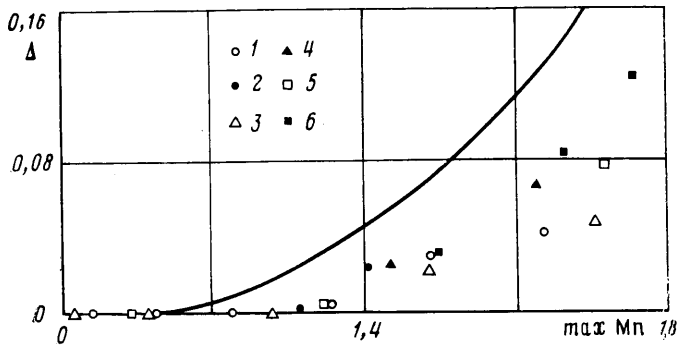
Поскольку плотность ρ связана с модулем скорости посредством (1.2), а модуль скорости вычисляется через потенциал при помощи формулы (2.2), то система сеточных уравнений оказывается нелинейной. Она решается итерациями, основанными на фиксации плотности на нижнем итерационном слое. Для значений потенциала на верхнем слое получается сеточный аналог корректной задачи для уравнения эллиптического типа. Эта задача решается одним из вариантов многосеточного метода работы [10], подробно изложенным в [3]. В качестве сглаживающего оператора в нем применен алгоритм «зебра» [11], представляющий собой верхнюю релаксацию вдоль систем линий $\zeta = \text{const}$ с четными и нечетными номерами.

Приведенные далее расчеты конических течений выполнялись на сетке из 145×55 узлов. Решение считалось полученным при уменьшении максимума модуля невязки до 10^{-7} . Для этого обычно требуется не более 150 итераций.

4. **Погрешность потенциального приближения.** Рассмотрим вначале обтекание кругового конуса. При угле атаки $\alpha=0$ энтропия S между головным скачком и телом постоянна и определяется только нормальным к скачку числом Маха M_n . При выделении скачка или выполнении на нем условия (1.6) в методе сквозного счета получаемое поле скоростей совпадает с решением уравнений Эйлера, поэтому погрешность потенциальной теории имеет место только при вычислении давления p и плотности ρ . В дальнейшем под погрешностью будем подразумевать ошибку в давлении на теле. Величина p связана со значением давления в решении уравнений Эйлера p_E известным соотношением $p_E = p \exp(-S)$, из которого следует формула для относительной погрешности

$$\Delta = p/p_E - 1 = \exp(-S) - 1$$

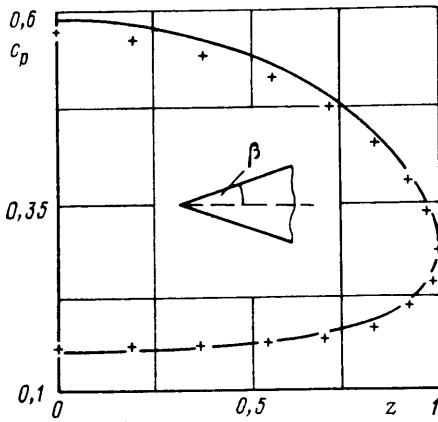
На поверхности конусов с различными полууглами раствора она изображена на фиг. 1 сплошной линией.



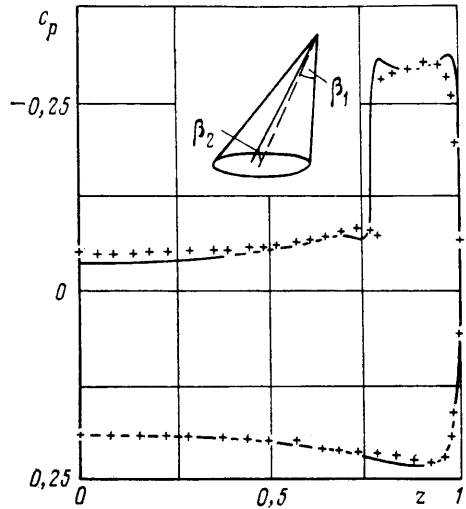
Фиг. 1

Если воспользоваться традиционным потенциальным приближением с условиями (1.4) на скачках уплотнения, то относительная погрешность на теле оказывается заметно меньшей. На фиг. 1 она нанесена символами, обозначенными цифрами 1, 3 и 5, которым соответствуют числа M_∞ , равные 2, 3 и 5. Объяснение этого вычислительного эффекта основывается на сравнении условий на скачках уплотнения (1.4) и (1.5) в традиционном и модифицированном потенциальных приближениях. Формула (1.6), следующая из (1.5), показывает, что в модифицированной теории на скачках уплотнения расположены дополнительные источники. Им соответствуют меньшие скорости на теле, чем в традиционной постановке, где источники отсутствуют. Поэтому традиционное приближение за счет ошибки в вычислении q частично компенсирует погрешность в величине давления на теле, не связанную с завихренностью потока. Это приближение применяется во всех последующих расчетах.

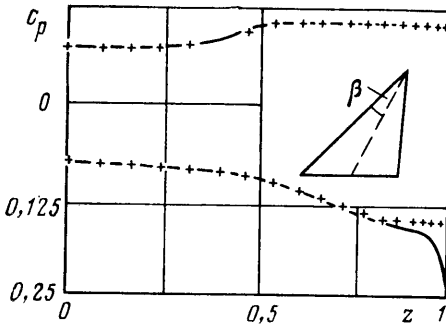
При обтекании кругового конуса под углом атаки поток в возмущенной области становится завихренным. Согласно асимптотической теории, подробно изложенной в монографии [12], завихренность существенно влияет на распределение плотности, энтропии и составляющих скорости, кроме нормальной, в прилегающей к телу узкой области, называемой вихревым слоем. Давление в вихревом слое меняется мало, поэтому потенциальное приближение дает наиболее достоверные результаты для давления и для его вычисления обычно и применяется. Максимальная погрешность в давлении соответствует точкам плоскости симметрии на наветренной стороне конуса. Это иллюстрирует, в частности, сравнение на фиг. 2 расчета коэффициента давления на конусе $\beta=20^\circ$ при $M_\infty=2$ и $\alpha=10^\circ$ с данными интегрирования уравнений Эйлера из [13]. На этой фигуре и всех последующих символом «плюс» нанесены решения уравнения Эйлера, а сплошной кривой изображены решения уравнения потенциала, по-



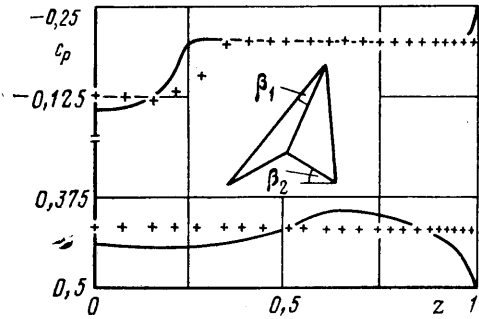
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

лученные изложенным методом. Максимальное значение M_n является, таким образом, неплохой характеристикой погрешности. На фиг. 1 она нанесена символами, обозначенными цифрами 2, 4 и 6, которым соответствуют числа M_∞ , равные 2, 3 и 5. В рассматриваемом диапазоне чисел M_∞ и углов α и β влияние завихренности составляет не более 20% общей погрешности.

Другим весьма распространенным тестовым случаем является обтекание эллиптического конуса с полууглами раствора $\beta_1=18,39^\circ$, $\beta_2=3,17^\circ$ при $M_\infty=1,97$ и $\alpha=10^\circ$. Данные расчета коэффициента давления на нем при помощи уравнений Эйлера приведены в работе [14]. Они изображены на фиг. 3 совместно с решением уравнения потенциала. Согласование результатов очень хорошее, включая положение и интенсивность внутреннего скачка уплотнения, возникающего на подветренной стороне конуса.

Чтобы выяснить, к каким погрешностям приводит применение алгоритма сквозного счета при расчете обтекания крыла со сверхзвуковыми кромками, рассмотрим треугольную пластину с полууглом при вершине $\beta=45^\circ$ при $M_\infty=2$ и $\alpha=5^\circ$. Распределения коэффициента давления на ней приведены на фиг. 4, причем уравнения Эйлера решались методом Макормака с выделением головного скачка уплотнения [15]. Согласование результатов снова оказывается хорошим, за исключением области передней кромки на наветренной стороне пластины, к которой скачок уплотнения присоединен. Здесь методика сквозного счета имеет большую погрешность, связанную, вероятно, с размазыванием косога скачка уплотнения.

Последний пример относится к обтеканию V-образного крыла, изображенного вместе с распределением коэффициента давления на его поверхностях на фиг. 5. Рассматриваемый режим обтекания является расчетным для уравнений Эйлера или уравнения потенциала с условием (1.5) на скачке уплотнения. Для условий (1.4) он расчетным не будет, поэтому имеется отклонение коэффициента давления на наветренной стороне от постоянного значения. На передней кромке снова видно резкое увеличение c_p , которое имеет ту же природу, что и в предыдущем примере. Вне окрестности передней кромки, составляющей 10% размаха, максимальная величина отклонения c_p от точного значения составляет 6,6%. Выполнение условия (1.5) вместо (1.4) приводит к $c_p = 0,4535$ на наветренной стороне крыла, отличающемуся на 8% от точного решения. Это соответствует сказанному выше о большей величине погрешности при вычислении давления на теле при помощи модифицированного потенциального приближения по сравнению с традиционным.

В заключение авторы благодарят В. В. Коваленко за проведение расчетов уравнений Эйлера и А. Н. Крайко за обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Siclary M. J.* Supersonic nonlinear potential flows with subsonic regions and implicit isentropic shock fitting // AIAA Pap. 1981. № 1202. 14 p.
2. *Shankar V., Szema K.-Y., Osher S.* A conservative type dependent full potential method for the treatment of supersonic flows with embedded subsonic regions // AIAA 6th Comput. Fluid Dynam. Conf. Danvers (Ma. 1983. A collection of technical papers. (New York, 1983. P. 36-47).
3. *Лифшиц Ю. Б., Шагаев А. А.* Проекционно-сеточная схема для расчета обтекания профиля трансзвуковым потоком // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28. № 8. С. 1163-1176.
4. *Григоренко В. Л., Крайко А. Н.* Об использовании потенциального приближения для расчета течений со скачками уплотнения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 121-129.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
6. *Grossman B.* Numerical procedure for the computation of irrotational conical flows // AIAA J. 1979. V. 17. № 8. P. 828-837.
7. *Jameson A.* Iterative solution of transonic flows over airfoils and wings, including flows at Mach 1 // Commun. Pure and Appl. Mathem. 1974. V. 27. № 3. P. 283-309.
8. *Shankar V.* Conservative full potential, implicit marching scheme for supersonic flows // AIAA J. 1982. V. 20. № 11. P. 1508-1514.
9. *Jameson A.* Transonic potential flow calculation using conservation form // Proc. AIAA Second Comput. Fluid Dynam. Conf. Hartford, Connecticut. 1975. P. 148-161.
10. *Федоренко Р. П.* Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1961. Т. 1. № 5. С. 922-927.
11. *South J. C., Keller J. D., Hafez M. M.* Vector processor algorithms for transonic flow calculations // AIAA Journal. 1980. V. 18. № 7. P. 786-792.
12. *Булах Б. М.* Нелинейные конические течения газа. М.: Наука, 1970. 343 с.
13. *Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. Н., Русанов В. В.* Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. М.: Наука, 1964. 505 с.
14. *Siclari M. J.* Investigation of crossflow shocks on delta wings in supersonic flow // AIAA Journal. 1980. V. 18. № 1. P. 85-93.
15. *Коваленко В. В., Кравцов А. Н.* Расчет течения около крыльев с дозвуковой передней кромкой в рамках модели, использующей систему уравнений Эйлера // Числ. методы мех. сплош. среды. 1986. Т. 17. № 5. С. 101-109.

Москва

Поступила в редакцию
6.X.1988