МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1990

УДК 532.5.013.4

К. Е. ДЖАУГАШТИН

О КРИТИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ

На основе уравнений для рейнольдсовых напряжений, пограничного слоя и элементов теории теплового взрыва исследован критический режим струйных течений. Результаты расчета чисел Рейнольдса перехода ламинарного режима течения в турбулентный, выполненные для плоской и осесимметричной струй, для течений в следе сопоставлены с теоретическими значениями, полученными другими методами, и с данными экспериментальных исследований.

Наряду с известными методами исследования гидродинамической устойчивости [1] полуэмпирическая теория турбулентности, основанная на уравнениях баланса пульсационной энергии [2], позволяет также выполнить анализ критического режима течения. Применительно к течению в канале оценка критического числа Рейнольдса получена в [2], в [3, 4] – для винтового течения в круглой цилиндрической трубе, в [5] – для течений в стратифицированной среде. Ниже приводятся результаты исследования критических условий в струйных течениях.

Уравнения одноточечных моментов второго порядка для течений с поперечным сдвигом без учета турбулентной и молекулярной диффузий имеют вид [2, 3]

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\langle u_iu_j\rangle+\langle u_ku_j\rangle\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+\langle u_ku_j\rangle\frac{\partial U_j}{\partial x_k}+$$

$$+k\frac{\sqrt{E}}{l}\left(\langle u_iu_j\rangle-\frac{2}{3}\delta_{ij}E\right)+c_1\nu\frac{\langle u_iu_j\rangle}{l^2}+\frac{2}{3}c\delta_{ij}\frac{E^{3/2}}{l}=0 \qquad (1)$$

Здесь U_i и u_j — составляющие осредненной и пульсационной скоростей вдоль координаты x_i, l — величина, имеющая размерность длины (в пограничном слое на твердой поверхности — длина пути смещения, в струйных течениях — условная ширина струи), $c_1\approx{}^5/_4\pi$ — постоянная, оцениваемая из теории изотропной турбулентности, $k/c\simeq7$ — эмпирическая константа [2–6].

Вводя локальные числа Рейнольдса

$$\mathrm{Re}=l^2\frac{\partial U}{\partial y},\qquad R_E=\frac{\sqrt{E}\,l}{\nu},\qquad E=\frac{1}{2}(\langle u^2\rangle+\langle v^2\rangle+\langle w^2\rangle) \qquad (2)$$

из (1) получим систему уравнений

$$\frac{\langle uv\rangle}{E}\mathrm{Re}+cR_E+c_1=0$$

$$\frac{\langle v^2\rangle}{E}(kR_E+c_1)-\frac{2}{3}(k-c)R_E=0,\qquad \frac{\langle v^2\rangle}{E}\mathrm{Re}+\frac{\langle uv\rangle}{E}(kR_E+c_1)=0 \qquad (3)$$

$$\langle v^2\rangle=\langle w^2\rangle,\ \langle uw\rangle=\langle vw\rangle=0$$

которые служат для определения членов тензора турбулентных напряжений, в частности турбулентного напряжения трения. Последнее определяется выражением

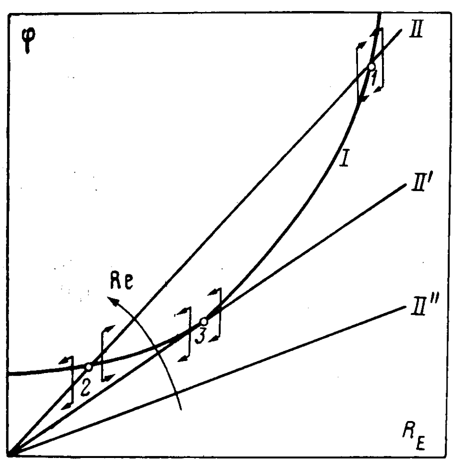
$$-\langle uv\rangle=\nu g(R_E)\,\frac{\partial U}{\partial y},\qquad g=\frac{2(k-c)R_E^3}{3(kR_E+c_1)^2}$$

Таким образом, пульсационные характеристики зависят от параметра R_E, значение которого находится из уравнения баланса энергии (первое уравнение в (3)). Запишем его в виде

$$\varphi_{\mathrm{I}}=\varphi_{\mathrm{II}},\qquad \varphi_{\mathrm{I}}=\frac{2(k-c)R_E}{3(kR_E+c_1)}\,\mathrm{Re}^2,\qquad \varphi_{\mathrm{II}}=cR_E+c_1$$

где φ_{I} соответствует порождению энергии пульсационного движения, φ_{II} — его диссипации.

По внешнему виду кривые, представленные на фигуре, напоминают характерные закономерности в теории теплового взрыва горючей смеси [8]. Эта внешняя аналогия при более внимательном рассмотрении оказывается связанной и с существом явления. В обоих случаях (течение жидкости и горение) природа движений, приводящих к критическим явлениям (турбулизация и воспламенение), объясняется нелинейностью одной из характеристик процесса.



Некоторая общность указанных явлений определяет и одинаковые приемы исследования. В частности, это относится к графоаналитическому способу анализа уравнений. Например, на фигуре показаны различные варианты пересечения кривых φ_{I} и φ_{II}. Кривым I и II соответствует принципиальная возможность существования двух независимых стационарных режимов — точки *1* и *2*, причем первая из этих точек *1* отвечает устойчивому равновесию, вторая точка *2* в области малых значений пульсационной энергии в противоположность этому — неустойчивому и, следовательно, практически нереализуемому состоянию равновесия.

С уменьшением генерации энергии, пропорциональной Re, при некотором значении Re^+ имеет место касание кривых φ_{I} и φ_{II} — кривые I и II. Точка касания *3*, являющаяся граничной точкой существования стационарного турбулентного режима, соответствует локальному критическому режиму течения. Заметим, что точка *3* — односторонне устойчивая по отношению к малым отклонениям, т. е. устойчивая по отношению к увеличению энергии E и неустойчивая к ее уменьшению. Наконец, кривым I и II отвечает невозможность стационарного турбулентного течения при $\mathrm{Re}<\mathrm{Re}^+$

Локальное число Re (2) можно представить в виде отношения порождения энергии к вязкой диссипации

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho\langle uv\rangle\partial U/\partial y}{\mu(\partial U/\partial y)^2}$$

Следовательно, локальные критические условия возникают там, где генерация энергии в Re^+ раз превышает вязкую диссипацию. В рассматриваемых ниже свободных течениях, обладающих плоской или осевой симметрией, число Re на оси струи и вдали от нее обращается в нуль, достигая максимального значения в точке перегиба. Поэтому именно в этой точке поперечного сечения возникают условия для критического состояния течения. Этот вывод согласуется с известной в теории гидродинамической устойчивости определяющей ролью точки перегиба в профиле скорости для возникновения неустойчивых колебаний.

Условия критического режима, как и в теории теплового взрыва [8], определяются из системы уравнений

$$\varphi_{\text{I}}=\varphi_{\text{II}}, \qquad \frac{d\varphi_{\text{I}}}{dR_E}=\frac{d\varphi_{\text{II}}}{dR_E}$$

Решая соответствующую систему алгебраических уравнений, получим значения критических чисел Рейнольдса

$$R_E{}^+=0{,}25\frac{c_1}{c}\left(\sqrt{1+8\frac{c}{k}}-1\right), \qquad \text{Re}^+=(kR_E{}^++c_1)\sqrt{\frac{3}{2}\frac{cR_E{}^++c_1}{(k-c)R_E{}^2}} \tag{4}$$

Эти же выражения получены в [3] исходя из других соображений.

При указанных значениях постоянных k/c и c_1 критические параметры (4) (здесь и ниже обозначаемые знаком плюс) будут равны

$$R_E{}^+\simeq 3, \ \text{Re}^+\simeq 11, \ g^+\simeq 0{,}325$$

Эти критические параметры связаны с локальными градиентами скорости и кинетической энергией. В струйных течениях и в следах за телами критические числа Рейнольдса R_0 и R вычисляют соответственно по режимным параметрам или по максимальной скорости $U_m{}^\circ$ и некоторой условной ширине области смешения l°, соответствующей ламинарному течению

$$R_0=\frac{U_0 d}{\nu}, \qquad R=\frac{U_m{}^\circ l^\circ}{\nu}$$

Здесь для струйного течения U_0 и d — соответственно начальная скорость истечения и диаметр сопла, для течения в следе за телом $U_0=U_\infty$, где U_∞ — скорость потока, обтекающего тело с характерным размером d.

Для вычисления указанных критических чисел Рейнольдса следует рассчитать поля скоростей на основном участке с учетом того, что в переходном режиме перенос количества движений ламинарной и турбулентной диффузией соизмеримы. Поэтому в уравнениях пограничного слоя, приведенных ниже, сохранены члены, отражающие как молекулярный, так и молярный перенос импульса.

Для струи уравнения движения, неразрывности и интегральные условия имеют вид

$$U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{1}{y^k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu y^k\frac{\partial U}{\partial y}-\langle uv\rangle\right), \qquad J_x{}^\circ=\rho U_0{}^2 d\left(\frac{\pi d}{4}\right)^k$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(y^k U)+\frac{\partial}{\partial y}(y^k V)=0, \qquad J_x=2\pi^k\int_0^\infty \rho U^2 y^k\,dy \tag{5}$$

Для следа соответственно

$$U_\infty\frac{\partial U_1}{\partial y}=\frac{1}{y^k}\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu y^k\frac{\partial U_1}{\partial y}-\langle uv\rangle\right)$$
$$2\pi^k\int_0^\infty \rho U_\infty U_1 y^k\,dy=J_x, \qquad J_x=C_x\rho\frac{U_\infty{}^2 d}{2}\left(\frac{\pi d}{4}\right)^k \tag{6}$$

В обоих случаях граничные условия соответствуют симметрии течения и нулевому значению скорости на бесконечности (или дефекту скорости U_1 в следе за телом)

$$\frac{\partial U}{\partial y}=U=0, \quad y=0; \quad U\to 0, \quad y\to\infty$$

В уравнениях (5), (6) C_x — коэффициент сопротивления, J_x — импульс струи.

Правую часть в уравнениях движения (5), (6) удобно записать в принятом для ламинарного слоя виде

$$\nu\frac{\partial U}{\partial y}-\langle uv\rangle=\nu\theta\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \theta=1+\frac{R_{\kappa}^{+2}}{\mathrm{Re}^{+}}g(R_{\kappa}^{+})$$

Решение уравнений (5), (6) в автомодельной области будем искать для струи, следа и слоя смещения соответственно в виде

$$\frac{F'(\varphi)}{\varphi^{k}}, \quad \varphi=\frac{y}{l} \qquad (7)$$

где φ — универсальная координата.

Решения уравнений (5), (6) для различных типов струйного смешения приведены в табл. 1 (плоская струя — I, осесимметричная — II, след за цилиндром — III, за сферой — IV). Там же указаны значения градиента скорости $\alpha=F''(\varphi_+)$ в точке перегиба φ_+. Масштабные величины U_m и l представлены в виде двух сомножителей: $U_m=U_m^{\circ}f$, $l=l^{\circ}\psi(\theta)$. Значения U_m° и l° соответствуют ламинарному течению [9], параметры f, ψ учитывают их изменения в критическом режиме течения.

Результаты анализа переходного режима течения приведены в табл. 2 (два крайних столбца справа).

Последовательность расчетов критических чисел Рейнольдса покажем на примере плоской струи. Преобразуя Re с учетом (7) и табл. 1 (I)

$$\mathrm{Re}=\frac{l^2}{\nu}\frac{dU}{\partial y}=\frac{U_m l}{\nu}F''=\frac{U_m^{\circ}l^{\circ}}{\nu}\theta^{1/3}F''=R\theta^{1/3}F''$$

найдем связь между R^+ и Re^+, имея в виду, что Re достигает максимального значения в точке перегиба, а $\theta^+=1+g^+=1{,}32$: $R^+=\mathrm{Re}^+/(\alpha\theta^{1/3})$.

Подставляя значения величин в правую часть, найдем искомое критическое число Рейнольдса $R^+\simeq 13$.

Заменяя в выражении для R^+ значения U_m° и l° по табл. 1, а значения импульса по формуле (5), найдем связь между точкой перехода ламинарного течения в турбулентное x^+ и начальным числом R_0^+: $x^+\simeq 490/R_0^{+2}$.

В табл. 2 приведены результаты расчета критических чисел Рейнольдса, выполненные на основе линейной теории — *1* (*а* — несимметричные, *б* — симметричные возмущения), энергетического метода — *2*, и результаты экспериментальных исследований — *3*. Численные значения R в табл. 2 заимствованы из [1, 11, 12] соответственно для типов течений I, II, III (прочерки в таблице означают отсутствие соответствующих теоретических или экспериментальных данных).

Обсудим кратко полученные результаты. Если в плоской струе и слое смешения течение в начальной области развития было ламинарным, то на некотором расстоянии потока происходит его турбулизация в противоположность течению в осесимметричном следе, где первоначально турбулентное течение при некотором $x>x^+$ становится ламинарным. В осесимметричной струе и следе за поперечно обтекаемым цилиндром режим течения определяется только начальным значением R_0, поскольку локальное значение R вдоль течения в этих случаях остается неизменным. В слое смешения с увеличением параметра спутности устойчивость увеличивается так, что однородный поток становится абсолютно устойчивым. Количественная оценка критических чисел R удовлетворительно

Таблица 1

Типы течений	$U_m^{\bullet}$	$f(\theta)$	l_0	$\Psi(\theta)$	F'	α
I	$\left(\frac{3J_x^2}{32\rho^2\nu x}\right)^{1/3}$	$\theta^{1/3}$	$\left(\frac{48\rho\nu^2x^2}{Jx}\right)^{1/3}$	$\theta^{2/3}$	$\mathrm{ch}^{-2}\varphi$	0,77
II	$\frac{3J_x}{8\pi\rho\nu x}$	θ^{-1}	$\sqrt{\frac{8\pi\rho}{3J_x}\nu x}$	θ	$\frac{\varphi}{(1+\varphi^2/8)}$	0,368
III	$\frac{C_x dU_\infty}{4\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$	$\theta^{-1/2}$	$2\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$	$\theta^{1/2}$	$e^{-\varphi^2}$	0,86
IV	$\frac{J_x}{2\pi\nu x}$	θ^{-1}	$2\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$	$\theta^{1/2}$	$e^{-\varphi^2}$	0,86

Таблица 2

Типы течений	1		2	3	R^+	
	а	б				
I	3,7—12	88	2,5	$R^+=9,5—19$	$\frac{\mathrm{Re}^+}{\theta^{1/3}\alpha}=13$	$x^+=\frac{490}{R_0^2}$
II	38	—	—	$R_0^+=10—100$	$\frac{\mathrm{Re}^+}{\alpha}=30$	$R_0^+=98$
III	19	55	—	$R_0^+=30$	$\frac{\mathrm{Re}^+}{\alpha}=13$	$R_0^+=\frac{2\sqrt{\pi}R^+}{C_x}\simeq 27$
VI	—	—	—	—	$\frac{\mathrm{Re}\theta}{\alpha}=15$	$x=\left(\frac{8R^+}{C_x}\right)\frac{1}{R_0^3}$

согласуется как с результатами теоретических расчетов другими методами, так и с экспериментальными данными. Поскольку выполненные расчеты дают оценку снизу, значения R меньше полученных методом малых возмущений и несколько меньше или близки к опытным данным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.
2. *Rotta J. C.* Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. 1 // Z. Phys. 1951. B. 129. № 5. S. 547–572.
3. *Левин В. Б.* К расчету основных характеристик турбулентных потоков с поперечным сдвигом // Теплофизика высоких температур. 1964. Т. 2. № 4. С. 588–598.
4. *Левин В. Б.* О стабилизирующем влиянии вращения потока на турбулентность // Теплофизика высоких температур. 1964. Т. 2. № 6. С. 892–900.
5. *Джаугаштин К. Е.* Критический режим течения в стратифицированной среде // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 2. С. 156–159.
6. *Джаугаштин К. Е.* Двумерный свободный пограничный слой в стратифицированной среде // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 4. С. 71–79.
7. *Хинце И. О.* Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963. 680 с.
8. *Вулис Л. А.* Тепловой режим горения. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1954. 288 с.
9. *Вулис Л. А., Кашкаров В. П.* Теория струй вязкой жидкости. М.: Наука, 1965. 431 с.
10. *Clenshaw C. W., Elliot D.* A numerical treatment of the Orr – Sommerfeld equation in the case of a laminar jet // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1960. V. 13. № 3. P. 303–313.
11. *Steyerd A., Kurtz E. F., Jr.* Computeraided study of the stability of parallel incompressible flows in a co-linear magnetic field // Ingr-Arch. 1967. B. 36. № 2. P. 114–125.
12. *Архипов В. Н.* Образование колебаний в следе за телом // Докл. АН СССР. 1958. Т. 123. № 4. С. 620–622.
13. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

Алма-Ата

Поступила в редакцию
28.XI.1988