

УДК 532.593

© 1990 г.

**К. А. БЕЖАНОВ, П. Г. ЗАЕЦ, А. Т. ОНУФРИЕВ,
А. М. ТЕР-КРИКОРОВ**

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ОБТЕКАНИЯ НЕРОВНОСТИ ДНА ПОТОКОМ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Рассматривается пространственная задача обтекания неровности дна потоком экспоненциально стратифицированной жидкости конечной глубины в приближении твердой крышки и при наличии свободной поверхности. В приближении твердой крышки решение получено в виде ряда Фурье по вертикальной лагранжевой координате, а коэффициенты ряда выражены через однократные интегралы вне горизонтальной полосы, стороны которой параллельны оси потока и касаются проекции носителя функции, описывающей неровность дна. Это позволило исследовать ближнее поле в областях, не рассмотренных в работах [1, 2]. Наличие малого параметра в граничном условии на свободной поверхности позволило найти в первом приближении волновые движения и неволновые возмущения на свободной поверхности в ближнем и дальнем полях. В ближнем поле ширина волновой зоны имеет порядок глубины потока, расширяется по мере удаления от дна и оказывается самой широкой на свободной поверхности. В отличие от кольцевых возмущений внутри жидкости картина неволновых возмущений на свободной поверхности зависит от полярного угла. Получен также закон подобия для расходящихся волн на свободной поверхности.

1. Постановка и решение граничной задачи. Исследуется пространственная задача обтекания малой неровности дна потоком экспоненциально стратифицированной жидкости конечной глубины в рамках постановки задачи, описанной в [1]. Было показано, что если число Фруда по высоте неровности дна больше единицы, то все частицы жидкости обходят препятствие сверху и в этом случае нет разделяющей поверхности, ниже которой частицы жидкости обходят препятствие сбоку, а неровность дна есть поверхность постоянной плотности [1–3]. Вначале задача решается в приближении твердой крышки, стратификация предполагается малой, скорость набегающего потока V постоянной и направленной по оси x , плоскость xy совпадает с горизонтальной плоскостью дна, а ось z направлена вертикально вверх. Тогда в приближении Буссинеска можно сформулировать следующую граничную задачу для возмущения поверхности постоянной плотности [1, 4]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \mu \right) \Delta u + \frac{1}{\lambda^2} \Delta_1 u = 0$$

$$-\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < \xi < h$$
(1.1)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, y, \xi) = 0, \quad u(x, y, 0+0) = z_0(x, y), \quad u(x, y, h-0) = 0$$

$$\lambda = (V/N) = h \text{ Fr}, \quad \lambda_0 = 2\pi\lambda$$

Здесь ξ — лагранжева координата, задающая при $x \rightarrow -\infty$ расстояние от горизонтального дна до невозмущенной поверхности постоянной плотности, Δ — оператор Лапласа по переменным x, y и ξ , Δ_1 — оператор Лапласа по переменным x и y , N — частота Брента — Вайсяля, λ_0 — длина волны, Fr — число Фруда, h — глубина потока, $z_0(x, y)$ — форма

неровности дна, коэффициент искусственной вязкости μ здесь и ниже определяется с точностью до размерной постоянной без изменения обозначения и при $\mu \rightarrow +0$ позволяет автоматически удовлетворить условию излучения на бесконечности.

Если ввести безразмерные переменные и сделать замену искомой функции, то из (1.1) и (1.2) получим граничную задачу

$$x' = \frac{x}{\lambda}, \quad y' = \frac{y}{\lambda}, \quad \xi' = \frac{\xi}{h}, \quad f(x', y') = \frac{z_0(x, y)}{h} \quad (1.2)$$

$$\frac{u(x, y, \xi)}{h} = v(x', y', \xi') + (1 - \xi') f(x', y')$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \mu \right) \left(\Delta_1 v + \text{Fr}^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right) + \Delta_1 v = (\xi - 1) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1 \right) \Delta_1 f(x, y)$$

$$-\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < \xi < 1 \quad (1.3)$$

$$v(x, y, 0+0) = 0, \quad v(x, y, 1-0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x, y, \xi) = 0$$

где для простоты обозначений опущен штрих у безразмерных независимых переменных.

Разложим искомую функцию и правую часть уравнения (1.3) в ряд Фурье по полной и ортогональной в $L_2(0, 1)$ системе $\{\sin(\pi n \xi)\}$. Тогда для определения неизвестных коэффициентов Фурье получим уравнение четвертого порядка в бесконечной плоскости, решение которого методом преобразования Фурье имеет вид [1]

$$v_n(x, y) = \frac{1}{\pi^2 n} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \xi^2)(\xi^2 + \eta^2)}{B_n(\xi, \eta, \mu)} f^*(\xi, \eta) \exp(i(\xi x + \eta y)) d\xi d\eta \quad (1.4)$$

$$B_n(\xi, \eta, \mu) = \xi^4 + \xi^2(\eta^2 + \varepsilon_n^2 - 1) - \eta^2 -$$

$$-i\mu\xi(\xi^2 + \eta^2 + \varepsilon_n^2), \quad \varepsilon_n = \pi n \text{ Fr}$$

где $f^*(\xi, \eta)$ — преобразование Фурье функции $f(x, y)$.

2. Вычисление коэффициентов Фурье. Введем обозначения

$$G_1 = \{(x, y): -\infty < x < +\infty, |y| > y_1\}$$

$$G_2 = \{(x, y): |x| > x_1, -\infty < y < +\infty\}$$

где постоянные x_1 и y_1 таковы, что прямые $x = \pm x_1$ и $y = \pm y_1$ касаются носителя функции $f(x, y)$. В работах [1, 2] двойной интеграл в правой части формулы (1.4) был сведен к однократному при $(x, y) \in G_2$, в настоящем исследовании аналогичная процедура выполнена при $(x, y) \in G_1$. Для этого формула (1.4) записывается в виде повторного интеграла, в котором интегрирование проводится вначале по переменной η и внутренний интеграл вычисляется методом теории вычетов. Уравнение $B_n(\xi, \eta, 0) = 0$ имеет два корня

$$\eta_{1,2} = \mp \alpha(\xi), \quad \alpha(\xi) = \sqrt{\frac{\xi^2(\xi^2 + \varepsilon_n^2 - 1)}{1 - \xi^2}}, \quad |\xi| < 1 \quad (2.1)$$

$$\eta_{3,4} = \pm i\beta(\xi), \quad \beta(\xi) = \sqrt{\frac{\xi^2(\xi^2 + \varepsilon_n^2 - 1)}{\xi^2 - 1}}, \quad |\xi| > 1 \quad (2.2)$$

Можно показать, что при $-1 < \xi < 0$ полюс в точке η_1 сдвигается в нижнюю полуплоскость, а в точке η_2 — в верхнюю полуплоскость комплексной

плоскости η . При $0 < \xi < 1$ полюс в точке η_1 сдвигается в верхнюю полу-плоскость, а в точке η_2 — в нижнюю полу-плоскость комплексной плоско-сти η . Тогда с учетом сдвига полюсов подинтегральной функции формула (1.4) при $\mu \rightarrow +0$ запишется в виде

$$v_n(x, y) = \frac{1}{\pi^2 n} \left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_{-1}^0 + \int_0^1 + \int_1^{+\infty} \right) I_{\pm}(\xi, y) \exp(i\xi x) d\xi$$

$$I_{\pm}(\xi, y) = \int_{\gamma^{\pm}} F(\xi, \eta) \exp(i\eta y) d\eta, \quad F(\xi, \eta) = \frac{(1-\xi^2)(\xi^2+\eta^2)}{B_n(\xi, \eta, 0)} f^*(\xi, \eta) \quad (2.3)$$

где функция $I_+(\xi, y)$ задана при $y > y_1$, а $I_-(\xi, y)$ — при $y < -y_1$, γ^+ и γ^- — границы полукругов достаточно больших радиусов с центром в начале координат, расположенных соответственно в верхней и нижней полу-плоскостях комплексной плоскости η , а в формуле (2.3) и ниже используется символическая запись, при которой функция, стоящая под знаком интеграла, и дифференциал формально выносятся за знак скобки. Ниже для упрощения записи рассматривается случай, когда форма неровности дна симметрична относительно оси x . Предполагается также, что функция $F(\xi, \eta)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана, которое выполняется для рассматриваемого ниже случая полуэллипсоида, лежащего на гори-зонтальной плоскости. В этом случае

$$f^*(\xi, \eta) = a_1 b_1 c_1 (\sin \rho - \rho \cos \rho) / \rho^3$$

$$\rho = \sqrt{a_1^2 \xi^2 + b_1^2 \eta^2}, \quad a_1 = \frac{a_0}{\lambda}, \quad b_1 = \frac{b_0}{\lambda}, \quad c_1 = \frac{c_0}{h} \quad (2.4)$$

где a_0 , b_0 и c_0 — размерные полуоси полуэллипсоида.

Вычисляя интеграл (2.3) методом теории вычетов, имеем

$$v_n(x, y) = v_{n1}(x, y) + v_{n2}(x, y)$$

$$v_{n1}(x, y) = \frac{2i}{\pi n} \left(\int_{-1}^0 (\text{res}(F(\xi, \eta) \exp(i\eta y))) + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \text{res}(F(\xi, \eta) \exp(i\eta y)) \right) \exp(i\xi x) d\xi \quad (2.5)$$

$$v_{n2}(x, y) = \frac{2i}{\pi n} \left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{+\infty} \right) \text{res}(F(\xi, \eta) \exp(i\eta y)) \exp(i\xi x) d\xi$$

где вычеты в действительных точках дают основной вклад в генерирова-ние расходящихся волн, а вычет в мнимой точке — основной вклад в ге-нерирование кольцевых возмущений.

Формулы (2.5) после ряда стандартных преобразований позволяют записать окончательное решение граничной задачи (1.3) в виде

$$v(x, y, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} (v_{n1}(x, y) + v_{n2}(x, y)) \sin(\pi n \xi) \quad (2.6)$$

$$v_{n1}(x, y) = \frac{2}{\pi n} \int_0^1 \frac{\xi^2 + \alpha^2(\xi)}{\alpha(\xi)} f^*(\xi, \alpha(\xi)) \sin(\alpha(\xi) |y| - \xi x) d\xi, \quad (x, y) \in G_1$$

$$v_{n2}(x, y) = \frac{2}{\pi n} \int_1^{+\infty} \frac{\beta^2(\xi) - \xi^2}{\beta(\xi)} f^*(\xi, i\beta(\xi)) \exp(-\beta(\xi)|y|) \cos(\xi x) d\xi, \quad (x, y) \in G_1$$

где функция $f^*(\xi, i\beta(\xi))$ вещественна в силу четности $f(\xi, \eta)$ по переменной η .

3. Определение формы свободной поверхности. При наличии свободной поверхности граничное условие для функции $v(x, y, \xi)$ в безразмерных переменных запишется в виде

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \xi}(x, y, 1) - \frac{1}{F_0^2} \Delta_1 v(x, y, 1) = 0 \quad (3.1)$$

где переменные x и y не принадлежат носителю функции $f(x, y)$, $F_0^2 = V/\sqrt{gh}$ — поверхностное число Фруда, g — ускорение силы тяжести. Для широкого диапазона величин V и h параметр F_0^2 есть малая величина, что позволяет искать решение в виде следующего разложения [5, 6]:

$$v = v_0(x, y, \xi) + F_0^2 v_1(x, y, \xi) + \dots \quad (3.2)$$

где $v_0(x, y, \xi)$ — решение в приближении твердой крышки, а $v_1(x, y, \xi)$ — добавка, учитывающая влияние свободной поверхности. Подстановка (3.2) в граничное условие (3.1) дает

$$\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial \xi}(x, y, 1) - \Delta_1 Z(x, y) = 0 \quad (3.3)$$

$$Z(x, y) = v_1(x, y, 1)$$

Применяя к (3.3) операцию преобразования Фурье, получим

$$Z(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^2(1-\xi^2)}{B_n(\xi, \eta, 0)} f^*(\xi, \eta) \exp i(\xi x + \eta y) d\xi d\eta \quad (3.4)$$

Запишем двойной интеграл формулы (3.4) в виде повторного интеграла, в котором интегрирование ведется сначала по переменной η , и вычислим внутренний интеграл методом теории вычетов, как это было сделано при выводе формул (2.6), получим

$$Z(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (Y_{n1}(x, y) + Y_{n2}(x, y))$$

$$Y_{n1}(x, y) = (-1)^{n+1} 2 \int_0^1 \frac{\xi^2}{\alpha(\xi)} f^*(\xi, \alpha(\xi)) \sin(\alpha(\xi)|y| - \xi x) d\xi, \quad (x, y) \in G_1 \quad (3.5)$$

$$Y_{n2}(x, y) = (-1)^{n+1} 2 \int_1^{+\infty} \frac{\xi^2}{\beta(\xi)} f^*(\xi, i\beta(\xi)) \exp(-\beta(\xi)|y|) \cos(\xi x) d\xi, \quad (x, y) \in G_1$$

Запишем формулу (3.4) в виде повторного интеграла, в котором интегрирование ведется сначала по переменной ξ , и вычислим внутренний интеграл методом теории вычетов, как это было сделано в работе [1]

$$Z(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (\Phi(x-x_1) Z_{n1}(x, y) + Z_{n2}(x, y))$$

$$Z_{n1}(x, y) = (-1)^{n4} \int_0^{+\infty} \frac{a(\eta) (a^2(\eta) - 1)}{D(\eta^2)} f^*(a(\eta), \eta) \sin(a(\eta)x) \cos(\eta y) d\eta, \\ (x, y) \in G_2$$

$$Z_{n2}(x, y) = (-1)^{n2} \int_0^{+\infty} \frac{b(\eta) (1 + b^2(\eta))}{D(\eta^2)} f^*(ib(\eta), \eta) \exp(-b(\eta)|x|) \cos(\eta y) d\eta, \\ (x, y) \in G_2 \quad (3.6)$$

$$a^2(\eta) = \frac{2\eta^2}{D(\eta^2) + \eta^2 + \varepsilon_n^2 - 1}, \quad b^2(\eta) = \frac{\eta^2}{a^2(\eta)}$$

$$D(\eta^2) = \sqrt{(\eta^2 + \varepsilon_n^2 - 1)^2 + 4\eta^2}$$

где $\vartheta(x)$ — единичная функция Хевисайда, функция $f^*(ib(\eta), \eta)$ вещественна в силу четности функции $f^*(\xi, \eta)$ по переменной ξ , функция $Z_{n1}(x, y)$ описывает расходящиеся волны на свободной поверхности, а $Z_{n2}(x, y)$ — неволновое возмущение.

4. Асимптотическая формула для расходящихся волн. При больших значениях параметра ε_n формулы (3.6) можно заметно упростить, в то время как формулы (3.5) не позволяют получить эффективные приближения. Для случая обтекания полусферы радиуса R , лежащей на горизонтальной плоскости, из формул (2.4) и (3.6) получим при $\varepsilon_n \gg 1$ следующее приближенное выражение для расходящихся волн на свободной поверхности:

$$Z_{n1}(x, y) = \frac{(-1)^{n4} \varepsilon_n^2}{\pi n} \int_0^{+\infty} (c\eta \cos(c\eta) - \sin(c\eta)) \times \\ \times \cos(\eta y) \sin \frac{\eta x}{\sqrt{\eta^2 + \varepsilon_n^2}} \frac{d\eta}{\eta^2 (\eta^2 + \varepsilon_n^2)^{5/2}}, \quad c = \frac{R}{\lambda} \quad (4.1)$$

Формулу (4.1) можно преобразовать к виду

$$Z_{n1}(x, y) = \frac{(-1)^{n2}}{\pi n \varepsilon_n^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} (c \varepsilon_n H_k(\varepsilon_n(y+c)) + \\ + c \varepsilon_n H_k(\varepsilon_n(y-c)) - I_k(\varepsilon_n(y+c)) + I_k(\varepsilon_n(y-c))) \\ I_k(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\tau^{2k-1} \sin(t\tau)}{(\tau^2 + 1)^{k+3}} d\tau, \quad H_k(t) = I_k'(t) \quad (4.2)$$

где штрих здесь и ниже означает операцию дифференцирования.

Интегрируя выражение для $I_k(t)$ по частям и используя формулы для интегралов Лапласа и Дирихле при вычислении $I_0(t)$, получим следующее рекуррентное соотношение при $t > 0$:

$$I_k(t) = \frac{k-1}{k+2} I_{k-1}(t) + \frac{t}{2(k+2)} I_{k-1}'(t), \quad k=1, 2, \dots \quad (4.3)$$

$$I_0(t) = \pi \left(1 - \frac{t^2 + 5t + 8}{16e^t} \right)$$

Далее положим

$$I_k(t) = \frac{\pi}{4} e^{-t} P_k(t), \quad H_k(t) = \frac{\pi}{4} e^{-t} Q_k(t) \quad (4.4)$$

а рекуррентные формулы для многочленов $P_k(t)$ и $Q_k(t)$ получим из формул (4.3) и (4.4)

$$P_k(t) = \frac{2k-2-t}{2(k+2)} P_{k-1}(t) + \frac{t}{2(k+2)} P'_{k-1}(t), \quad k=2, 3, \dots$$

$$Q_k(t) = P'_k(t) - P_k(t), \quad k=1, 2, \dots \quad (4.5)$$

$$P_1(t) = \frac{1}{24} (t^3 + 3t^2 + 3t), \quad Q_0(t) = \frac{1}{4} (t^2 + 3t + 3)$$

Если ввести функцию $G(\tau, t)$ по формуле (4.6), то выражение (4.2) для расходящихся волн окончательно примет вид

$$G(\tau, t) = \tau I_0(t) + \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{\tau^{2k+1}}{e^t} P_k(t) \quad (4.6)$$

$$Z_{n1}(x, y) = \frac{(-1)^{n2}}{\pi n \varepsilon_n^3} \left(c \varepsilon_n \frac{\partial G}{\partial t}(x, \varepsilon_n(y+c)) + c \varepsilon_n \frac{\partial G}{\partial t}(x, \varepsilon_n(y-c)) - \right. \\ \left. - G(x, \varepsilon_n(y+c)) + G(x, \varepsilon_n(y-c)) \right) \quad (4.7)$$

Для первых m мод формулу (4.7) можно упростить, если учесть, что радиус полусферы R существенно меньше глубины жидкости h , в этом случае величину $\varepsilon = c \varepsilon_n = \pi n R / h$ можно считать малой и написать лишь главный член разложения по параметру ε для выражения, стоящего под знаком суммы в формуле (4.7). Тогда из формул (4.5)–(4.7) окончательно имеем

$$Z_{n1}(x, y) = \frac{(-1)^{nc^3}}{3\pi^2 n} \psi_n(x, \varepsilon_n y), \quad n=1, 2, \dots, m$$

$$\psi_n(\tau, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{\tau^{2k+1}}{e^t} M_k(t) \quad (4.8)$$

$$M_k(t) = Q_k''(t) - 2Q_k'(t) + Q_k(t)$$

$$M_0(t) = (t^2 - t - 1)/4$$

В размерных переменных формулы (4.7) и (4.8) без изменений обозначений примут вид

$$Z_{n1}(x, y) = \frac{(-1)^{n2}}{\pi n \varepsilon_n^3} \left(\frac{\pi n R}{h} \frac{\partial G}{\partial t} \left(\frac{x}{\lambda}, \frac{\pi n}{h} (y+R) \right) + \frac{\pi n R}{h} \frac{\partial G}{\partial t} \left(\frac{x}{\lambda}, \frac{\pi n}{h} (y-R) \right) - \right. \\ \left. - G \left(\frac{x}{\lambda}, \frac{\pi n}{h} (y+R) \right) + G \left(\frac{x}{\lambda}, \frac{\pi n}{h} (y-R) \right) \right) \quad (4.9)$$

$$Z_{n1}(x, y) = (-1)^n \frac{\pi n^2}{3 \varepsilon_n^3} \left(\frac{R}{h} \right)^3 \psi_n \left(\frac{x}{\lambda}, \frac{\pi n y}{h} \right), \quad n=1, 2, \dots, m$$

Из формул (4.9) следует, что для расходящихся волн имеет место такой закон подобия, при котором характерным размером в направлении

оси потока является длина волны, а в направлении, перпендикулярном оси потока, — глубина жидкости. При малых x ширина волновой зоны имеет порядок глубины жидкости, а не радиуса полусферы. Половине ширины волновой зоны для первой моды соответствуют значения $t=3$ и $y=3h/\pi$, для внутренних волн $t=2$, $y=2h/\pi$.

5. Асимптотическая формула для неволнового возмущения. Из формулы (3.6) получим при $\varepsilon_n \gg 1$ следующее приближенное выражение для случая обтекания полусферы, лежащей на горизонтальном дне:

$$Z_{n2}(x, y) = (-1)^n 2c^3 \text{Fr} \sigma(c\varepsilon_n) \int_0^{+\infty} \sqrt{\eta^2 + \varepsilon_n^2} \exp(-\sqrt{\eta^2 + \varepsilon_n^2} |x|) \cos(\eta y) d\eta \quad (5.1)$$

$$\sigma(\tau) = (\tau \operatorname{ch} \tau - \operatorname{sh} \tau) / \tau^3$$

Если вычислить интеграл, стоящий в правой части формулы (5.1), то окончательно получим [7]

$$Z_{n2}(x, y) = \frac{(-1)^n}{\pi n} 2c^3 \varepsilon_n^3 \sigma(c\varepsilon_n) \left(\cos^2 \theta K_0(r_n) + \cos 2\theta \frac{K_1(r_n)}{r_n} \right) \quad (5.2)$$

$$\varepsilon_n x = r_n \cos \theta, \quad \varepsilon_n y = r_n \sin \theta$$

В размерных переменных без изменения обозначений формула (5.2) примет следующий вид в полярных координатах:

$$\begin{aligned} Z_{n2}(x, y) = & (-1)^n 2\pi^2 n^2 \left(\frac{R}{h} \right)^3 \sigma\left(\frac{\pi n R}{h}\right) \left(\cos^2 \theta K_0\left(\frac{\pi n r}{h}\right) + \right. \\ & \left. + \cos 2\theta K_1\left(\frac{\pi n r}{h}\right) / \frac{\pi n r}{h} \right) \\ & x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $K_0(\tau)$, $K_1(\tau)$ — модифицированные функции Бесселя [8].

Из формулы (5.3) следует, что каждая мода неволнового возмущения затухает по экспоненциальному закону и в первом приближении не зависит от длины волны. Кроме того, неволновое возмущение не является чисто кольцевым в отличие от аналогичного возмущения внутри жидкости [1, 2].

6. Определение поля скоростей на свободной поверхности. Выразим давление через смещение свободной поверхности из уравнения гидростатики и подставим в линеаризованные уравнения движения Эйлера в движущейся системе координат. Получим в безразмерных переменных следующие соотношения

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = -\frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x} = -\frac{\partial Z}{\partial y} \quad (6.1)$$

где $V_1(x, y)$ и $V_2(x, y)$ — компоненты скорости соответственно по осям x и y , отнесенные к скорости V .

Решая уравнения (6.1) методом преобразования Фурье, получим

$$\begin{aligned} V_2(x, y) = & \sum_{n=1}^{+\infty} (\vartheta(x-x_1) U_{n1}(x, y) + U_{n2}(x, y)) \\ U_{n1}(x, y) = & (-1)^n 4 \int_0^{+\infty} \frac{\eta(1-a^2(\eta))}{D(\eta^2)} f^*(a(\eta), \eta) \sin(a(\eta)x) \sin(\eta y) d\eta, \\ & (x, y) \in G_2 \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$U_{n2}(x, y) = (-1)^{n+1} 2 \int_0^{+\infty} \frac{\eta(1+b^2(\eta))}{D(\eta^2)} f^*(ib(\eta), \eta) \exp(-b(\eta)|x|) \sin(\eta y) d\eta, \\ (x, y) \in G_2$$

а выражение для $V_1(x, y)$ с точностью до знака совпадает с формулой (3.6).

При $\epsilon_n \gg 1$ для случая полусферы, лежащей на горизонтальной плоскости, имеем

$$U_{n2}(x, y) = (-1)^{n+1} 2c^3 \text{Fr} \sigma(c\epsilon_n) \int_0^{+\infty} \exp(-\sqrt{\eta^2 + \epsilon_n^2} |x|) \sin(\eta y) \eta d\eta \quad (6.3)$$

После вычисления интеграла, стоящего в правой части формулы (6.3), окончательно получим [7]

$$U_{n2}(x, y) = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} c^3 \epsilon_n \sigma(c\epsilon_n) \sin 2\theta \left(K_0(r_n) + 2 \frac{K_1(r_n)}{r_n} \right) \quad (6.4) \\ \epsilon_n x = r_n \cos \theta, \quad \epsilon_n y = r_n \sin \theta$$

Выражение для неволнового возмущения горизонтальной компоненты скорости $V_1(x, y)$ с точностью до знака совпадает с формулой (5.2).

7. Результаты расчетов. Формулы (2.4), (2.6), (3.5) и (3.6), а также формула для расходящихся волн внутри жидкости

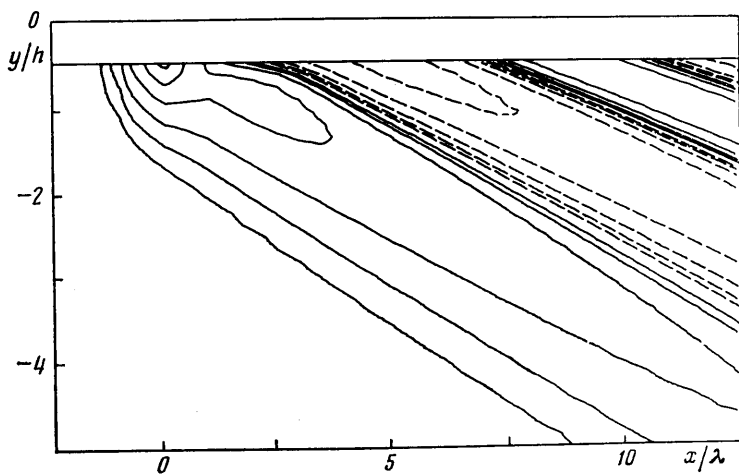
$$v_{n3}(x, y) = \frac{4}{\pi n} \int_0^{+\infty} \frac{(a^2(\eta) - 1)(a^2(\eta) + \eta^2)}{a(\eta) D(\eta^2)} f^*(a(\eta), \eta) \sin(a(\eta)x) \cos(\eta y) d\eta, \\ (x, y) \in G_2 \quad (7.1)$$

позволяют рассчитать волновые поля в различных горизонтальных сечениях [1, 2].

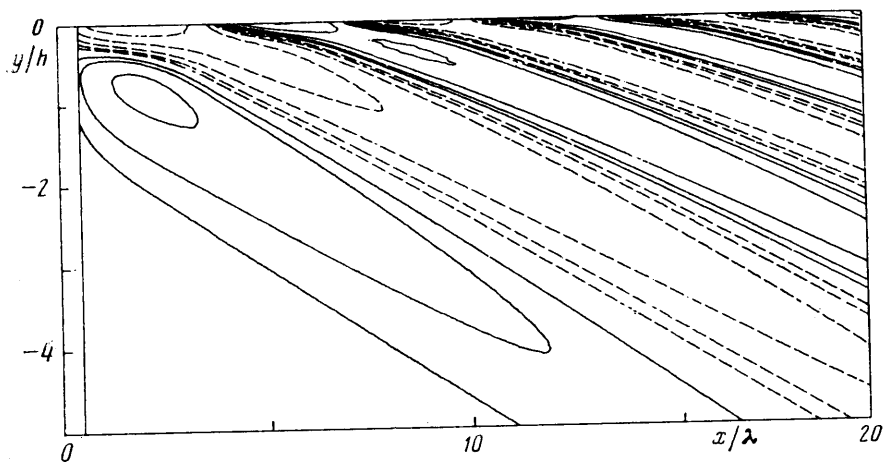
Опишем некоторые из результатов расчета. Интегралы (2.6) и (3.5) вычислялись на ЭВМ методом трапеций на сетке 32×32 точки, а интегралы (7.1) и (3.6) — методом быстрого преобразования Фурье на сетке 64×64 точки, далее с помощью программы построения линий равных уровней были построены изолинии искомых функций. В силу симметрии на фиг. 1–3 представлены половины горизонтальных сечений, сплошные линии соответствуют возвышениям, пунктирные — впадинам, минимальные значения амплитуд (min) соответствуют крайним замкнутым линиям, а далее увеличение в 2 раза при переходе к каждой последующей изолинии, экстремальные значения амплитуд находятся в центрах замкнутых линий. Ширина волновых зон имеет порядок глубины потока, первая мода имеет самую широкую волновую зону, а волновая зона каждой последующей моды содержится внутри предыдущей.

На фиг. 1 представлено волновое поле первой моды решения (2.4), (2.6) для глубины потока $z = (1/5)h$ или $z = (4/5)h$, $\text{Fr} = 1$, $a_0 = 0,04h$, $b_0 = 0,40h$, $c_0 = 0,04h$, $\min = 0,000010h$. Выражение для v_{11} дает главный вклад в волновую картину, а выражение v_{12} вносит основной вклад в окрестности оси потока, гасит слабую волну впереди препятствия и экспоненциально убывает при $|y| \rightarrow \infty$. В этом случае нет чистого разделения на расходящиеся волны и кольцевые возмущения. Волновая зона свободной поверхности, рассчитанная по формулам (2.4) и (3.5), расположена между двумя крайними впадинами, имеет более широкую волновую зону и из-за ограниченного объема статьи здесь не приводится.

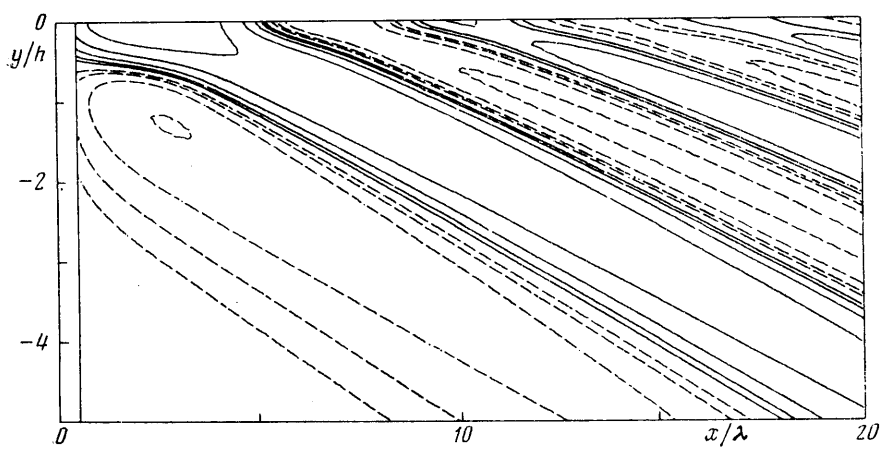
На фиг. 2 приведена картина расходящихся волн первой моды, рассчитанная по формулам (2.4) и (7.1) при $z = (1/5)h$ или $z = (4/5)h$, $\min = 0,000044h$, а на фиг. 3 — первая мода свободной поверхности, рассчитан-



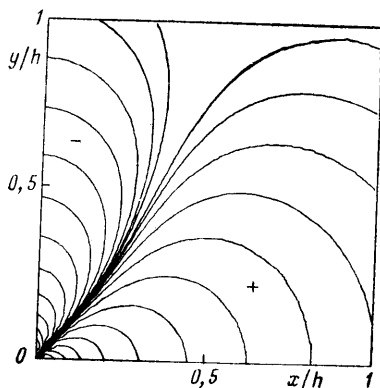
Фиг. 1



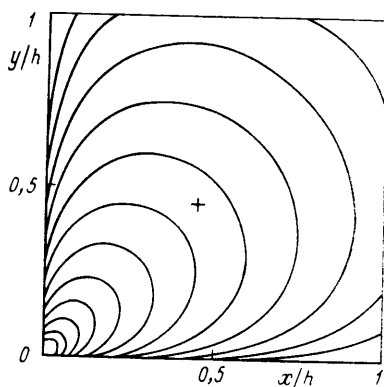
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

ная по формулам (2.4) и (3.6), $\min=0,000004h$, в обоих случаях $Fr=1$, $a_0=0,40h$, $b_0=0,04h$, $c_0=0,04h$. Из сравнения фиг. 2 и 3 заметна более широкая волновая зона свободной поверхности.

Были рассчитаны волновые поля для суммы первых четырех мод на различных глубинах. По мере удаления от дна волновая зона заметно расширялась и оказывалась самой широкой на свободной поверхности. На глубине $z=(1/5)h$ ширина волновой зоны заметно уже ширины волновой зоны первой моды, а на глубине $z=(4/5)h$ оказалась равной ей. В каждом горизонтальном сечении наибольшие значения амплитуд ($\max$) как для каждой отдельной моды, так и для суммы достаточного числа первых мод наблюдались сразу за препятствием вблизи оси потока, росли с увеличением числа мод и убывали по мере удаления от дна. Для суммы первых четырех мод имеем: $\max=0,00383h$ при $z=(1/5)h$, $\max=0,00064h$ при $z=(4/5)h$ и $\max=0,00016h$ при $z=h$. С ростом числа Фруда ($Fr=0,5$; 1; 2; 3 и 4) волновая картина сужалась к оси потока.

Выражение (5.2) для неволнового возмущения свободной поверхности не зависит от длины волны, но есть зависимость от полярного угла, в то время как неволновые возмущения внутренних волн чисто кольцевые. Поскольку неволновые возмущения вносят главный вклад в возмущение свободной поверхности над полусферой, на фиг. 4 и 5 приведены изолинии величин

$$\frac{V_1(x, y)}{(\pi R/h)^3} = - \frac{Z(x, y)}{(\pi R/h)^3 F_0^2}, \quad \frac{V_2(x, y)}{(\pi R/h)^3} \quad (7.2)$$

вычисленные по формулам (5.2) и (6.4) при $Fr=1$ и радиусе полусферы $R=0,05h/\pi$, в силу симметрии относительно осей x и y изображения изолиний даны в первых квадрантах. При расчете изолиний вблизи начала координат бралось порядка 100 мод, а вдали от начала координат основной вклад вносили первые несколько мод, что автоматически отслеживалось по заданной точности вычисления знакопеременных сумм и объясняется быстрой сходимостью рядов по функциям Бесселя. Максимальные значения величин (7.2) равны 2 вблизи начала координат, далее — уменьшение в 2 раза при переходе к каждой последующей изолинии. На фиг. 4 отмечены знаки изолиний величины V_1 , а знаки изолиний величины V_2 положительны в первом и третьем квадрантах и отрицательны во втором и четвертом. Вблизи прямых $y=\pm x$ смещение свободной поверхности равно нулю, причем перед полусферой и за ней имеет место понижение уровня свободной поверхности, а по бокам от оси потока — ее повышение.

Авторы благодарны Э. В. Теодоровичу за обсуждение постановки задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бежанов К. А., Онуфриев А. Т., Тер-Крикоров А. М. Исследование дальнего и ближнего полей в задаче обтекания неровности дна потоком экспоненциально стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 5. С. 86–94.
2. Бежанов К. А., Онуфриев А. Т., Тер-Крикоров А. М. Пространственная задача обтекания неровности дна потоком слоистой жидкости // Докл. АН СССР. 1987. Т. 296. № 2. С. 303–306.
3. Snyder W. H., Thompson R. S., Eskridge R. E. et al. The structure of strongly stratified flow over hills: dividing-streamline concept // J. Fluid Mech. 1985. V. 152. P. 249–288.
4. Тер-Крикоров А. М. Пространственные установившиеся течения слоистой жидкости и внутренние волны // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 3. С. 127–132.
5. Чехлов В. И. О возмущениях свободной поверхности внутренними волнами // Современная математика в физико-технических задачах. М.: Изд-во МФТИ, 1986. С. 142–149.
6. Бежанов К. А., Заец П. Г., Онуфриев А. Т., Тер-Крикоров А. М. О поле возмущений для пространственной задачи обтекания неровности дна потоком экспоненциально стратифицированной жидкости // Проблемы стратифицированных течений. Всесоюз. конф. Юрмала, 1988. Тез. докл. 1. Внутренние волны, гидродинам. неустойчивость, вихри. Саласпилс: Ин-т физики АН ЛатвССР, 1988. С. 15–18.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
8. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.VI.1989