МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1990

УДК 532.592:517.95
© 1990 г.

ИЛЬИЧЕВ А. Т.

К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН, ОПИСЫВАЕМЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Для описания распространения одномерных длинных волн в диспергирующих средах, часто используется уравнение (КдВ), однако в ряде случаев бывает необходимо учитывать следующие члены разложения по степеням волнового числа в соответствующем дисперсионном уравнении. При этом порядок модельных эволюционных уравнений возрастает. Например, при описании распространения волн в холодной квазинейтральной плазме в магнитном поле [1], распространение сигналов в линиях передач [2], когда коэффициент при третьей степени волнового числа в дисперсионном уравнении оказывается равным нулю, необходимо учитывать следующий член разложения по степеням волнового числа. Возникающее в более общей ситуации уравнение Кавахары [3]

$$u_t+uu_x+\alpha u_{xxx}-u_{xxxxx}=0,\quad \alpha=0,\ \pm1 \tag{0.1}$$

имеет достаточно универсальный характер и при $\alpha\neq0$, в частности, описывает распространение длинных волн под ледяным покровом в жидкости конечной глубины [4, 5], гравитационные волны на поверхности тяжелой жидкости при учете поверхностного натяжения [6]. До сих пор известно лишь два точных решения уравнения (0.1) соответствующих периодическим стационарным волнам и уединенной волне фиксированной амплитуды при $\alpha=1$ [7, 8]. Уединенные волны, решения уравнения (0.1) при $\alpha=0$, находились численно [3]. Экспериментально обнаружена их устойчивость, а также вид зависимости от свободного параметра – скорости v [2].

Во второй части настоящей статьи подтверждается этот экспериментальный факт при помощи использования специфики точечных симметрий для уравнения (0.1). Уединенные волны уравнения (0.1) при $\alpha=0$ структурно-устойчивы и имеют осциллирующую структуру фронтов. Двух- и трехсолитонное взаимодействие в рассматриваемом случае существенно отличается от упругого взаимодействия солитонов уравнения КдВ [9]. Стационарные решения типа ударной волны со структурой при $\alpha=0$ для (0.1), так же как при $\alpha=\pm1$, отсутствуют [5, 10]. Уединенные волны уравнения (0.1) могут иметь как осциллирующую, так и гладкую структуру в зависимости от значения α и скорости распространения v. При этом волны с осциллирующей структурой фронта необязательно симметричны, а также могут быть не единственны [6]. Уравнение (0.1) допускает два семейства уединенных волн с гладкой структурой фронта: для $\alpha=1$, $0<v<{}^1/_4$, одна из сепаратрис этого семейства интегрируется в явном виде [8], и для $\alpha=-1$, $v\in(-{}^1/_4,\ 0)$, которые являются пределом одного из семейств периодических волн при периоде, стремящемся к бесконечности [10].

В первой части настоящей статьи рассматриваются некоторые свойства решений задачи Коши линеаризованных уравнений (0.1) с $\alpha=0$, в частности показывается, что структура переднего фронта линейной волны является осциллирующей при гладких данных Коши, что может служить объяснением физического механизма образования уединенных волн с осциллирующими фронтами. В третьей части доказывается устойчивость по форме (орбитальная устойчивость) уединенной волны, профиль которой описывается аналитическим выражением и близких к ней уединенных волн. В четвертой части рассматриваются автомодельные решения уравнения (0.1) с $\alpha=0$, а также их применение к описанию волны разрежения.

1. Решение уравнения (0.1), линеаризованного на фоне нулевого решения, отвечающего данным Коши $u(x,0)=w(x)$, может быть записано в виде

$$u(x,t)=\frac{(5t)^{-{}^1/_5}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}w(y)G((x-y)(5t)^{-{}^1/_5})\,dy \tag{1.1}$$

$$G(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\cos\left(kz+\frac{1}{5}k^5\right)dk$$

Функция $G(z)$ играет такую же фундаментальную роль для уравнения (0.1), как функция Эйри для линеаризованного уравнения КдВ. Аналогом уравнения Эйри в данном случае является уравнение

$$\frac{d^4}{dz^4}\varphi-z\varphi=0$$

которому удовлетворяет $\varphi=G(z)$. Рассмотрим далее асимптотическое поведение функции $G(z)$ при $z\to\pm\infty$, применяя метод наибыстрейшего спуска [11]. При $z>0$ интеграл (1.1) приводится к интегралу по контуру в комплексной плоскости параметра $w=ikz^{-1/4}$, представляющему собой линию наибыстрейшего спуска. В рассматриваемом случае линии наибыстрейшего спуска представляют собой две ветви кривой пятого порядка, лежащие в области аналитичности подынтегральной функции. Эти ветви симметричны относительно вещественной оси, лежат во втором и третьем квадрантах комплексной плоскости и проходят через точки перевала $w=-e^{-i\pi/4}$, $w=-e^{i\pi/4}$. Интегрирование по линиям наибыстрейшего спуска позволяет, в частности, вычислить первый член асимптотики $G(z)$

$$G(z)\approx\frac{z^{-3/8}}{2\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{2\sqrt{2}}{5}z^{5/4}\right)\cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}z^{5/4}-\frac{\pi}{8}\right)\qquad(1.2)$$

$$z\to+\infty$$

Асимптотика функции $G(z)$ при $z\to-\infty$ может быть получена при замене в интеграле (1.1) z на $-z$. Контур интегрирования в этом случае может быть деформирован в контур, состоящий из двух ветвей линии наибыстрейшего спуска, проходящей через точки перевала $w=i$ и $w=-i$ и отрезка мнимой оси от $-i$ до i. Асимптотика интеграла по отрезку мнимой оси вычисляется методом стационарной фазы [11]. В результате получим

$$G(z)\approx\left(|z|^{-3/8}/\sqrt{2}\right)\cos\left(4/5|z|^{5/4}-\pi/4\right)\qquad(1.3)$$

$$z\to-\infty$$

Рассмотрим далее асимптотический вид решения (1.1) для больших времен t. Разложим функцию $G(z-z')$ в ряд по степеням z'

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}a_nG^{(n)}(z)\,(5t)^{-(n+1)/5}$$

$$z=\frac{x}{(5t)^{1/5}},\qquad a_n=\int_{-\infty}^{\infty}y^nw(y)\,dy\qquad(1.4)$$

Подставив в (1.4) выражения для производных, полученные дифференцированием асимптотических выражений (1.2) и (1.3), найдем

$$u(x,t)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(5x^3t)^{-1/8}\,\mathrm{Re}\left[\Phi\left(\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{5t}\right)^{1/4}\right)\exp\left(-\frac{2\sqrt{2}}{5}(1-i)z^{5/4}-\frac{i\pi}{8}\right)\right]$$

$$z\to+\infty\qquad(1.5)$$

$$u(x,t)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(5x^3t)^{-1/8}\,\mathrm{Re}\left[\Phi\left(\left|\frac{x}{5t}\right|^{1/4}\right)\exp\left(-i\left(\frac{4}{5}z^{5/4}-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]$$

$$z\to-\infty$$

$$\Phi(k)=\int_{-\infty}^{\infty} w(y)e^{-iky}dy=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{(-ik)^n}{n!}$$

При больших временах t и $z\sim1$ достаточно учесть только первый член в разложении (1.4): $u(x,t)\approx(5t)^{-1/5}/\sqrt{\pi}\,G(z)$, $z\sim1$. Из формулы (1.5) видно, что быстрые осцилляции лежат в области $x<0$, как и в случае линеаризованного уравнения КдВ. Однако в отличие от волнового пакета, описываемого уравнением КдВ, решение (1.1) имеет осциллирующую (а не гладкую) структуру переднего фронта. При образовании солитона из «небольшого» начального возмущения, для которого параметр $\sigma=l\sqrt{u_0}$, где l — характерная ширина, а u_0 амплитуда возмущения, невелик, при небольших временах решение приближенно описывается решением линеаризованного уравнения (0.1). Затем из передней части линейного образования выделяется уединенная волна, структура фронта которой является осциллирующей.

2. Уравнение (0.1) с $\alpha=0$ допускает масштабные преобразования, которые являются точечным [12] и порождаются генератором

$$X=-\frac{5}{4}t\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{4}x\frac{\partial}{\partial x}+u\frac{\partial}{\partial u}$$

$$u\to cu,\quad t\to c^{-5/4}t,\quad x\to c^{-1/4}x \tag{2.1}$$

где c — константа. Рассмотрим соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее стационарные уединенные волны

$$-vu+{}^1/_2u^2-u^{(\mathrm{IV})}=0 \tag{2.2}$$

где v — скорость стационарной волны. При помощи численных методов было показано, что уравнение (2.2) допускает решения в виде уединенных волн [3]. Предположим, что при значении скорости $v=v_0$ существует решение (2.2) типа уединенной волны. Применяя преобразование (2.1) к уравнению (2.2), получим, что такое решение существует и при $v=cv_0$, где c — любая положительная константа. Отсюда следует, что уединенные волны существуют при любом значении скорости и являются, таким образом, структурно-устойчивыми. Предположим далее, что скорость солитона равна единице и $u=f(x-t)$. Применив преобразование (2.1) с $c=v$, получим, что $u=vf(v^{1/4}(x-vt))$ также является решением уравнения (0.1) с $\alpha=0$ и, очевидно, представляет собой также уединенную волну. В силу того что уединенные волны для (0.1) с $\alpha=0$ образуют однопараметрическое семейство, приведенная формула дает общую зависимость уединенной волны от параметра скорости. Этот факт был установлен ранее экспериментально [2] наряду с орбитальной устойчивостью уединенных волн.

3. Уравнение (0.1) представляет собой гамильтонову систему

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta u} \tag{3.1}$$

$$H=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{2}u_x^2-\frac{1}{6}u^3+\frac{1}{2}u_{xx}^2\right)dx \tag{3.2}$$

Кроме гамильтониана H, уравнение (0.1) допускает еще две сохраняющиеся полиномиальные по u величины

$$P=\int_{-\infty}^{\infty}u\,dx,\quad Q=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}u^2\,dx$$

Далее ограничимся рассмотрением случая $\alpha=1$. Уравнение (0.1) при $\alpha=1$ имеет решения типа уединенных волн, одно из которых допускает аналитическое выражение в диапазоне $0<v<1/4$ и распространяется со скоростью $v=v_0=36/169$. Под орбитальной устойчивостью понимается следующее [13]. Пусть в начальный момент времени $t=0$ решение $u(x,0)$ лежит близко к рассматриваемому солитону U_v.

$$\|u(x,0)-U_v\|_{W_2^2(R)}<\delta(\varepsilon)$$

Тогда в любой момент времени

$$\sup_{t>0}\inf_{y}\|u(x,t)-U_v(\xi+y)\|_{W_2^2(R)}<\varepsilon \tag{3.3}$$

Выбор нормы в пространстве Соболева $W_2^2(R)$ диктуется видом гамильтониана (3.2) [14]. Условие (3.3) означает устойчивость семейства U_v по форме, наличие этой устойчивости необходимо для физической реализуемости данной уединенной волны. Для устойчивости по форме должны выполняться следующие условия [13]: а) существование решений для каждого $u(x,0)=u_0\in W_2^2(R)$. При этом $H(u_0)=H(u)$, $Q(u_0)=Q(u)$ в любой момент времени; б) существуют уединенные волны для $v_1<v<v_2$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\delta H}{\delta u}(U_v)+v\frac{\delta Q}{\delta u}(U_v)=0$$

и дифференцируемые достаточное число раз; в) для каждого $v_1<v<v_2$ оператор

$$L_v=\frac{\delta^2 H}{\delta u^2}(U_v)+v\frac{\delta^2 Q}{\delta u^2}(U_v)$$

имеет ровно одно простое отрицательное собственное число, одномерное ядро, порождаемое функцией $\partial U_v/\partial x$, и положительный спектр отделен от нуля; г) вторая производная величины $D(v)=H(U_v)+vQ(U_v)$ по v больше нуля.

Далее рассмотрим случай $v=v_0$, при этом из доказательства станет очевидно, что свойства а)—г) справедливы и в некоторой окрестности v_0 и устойчивость имеет место также и для солитонов, близких к U_v, $v=v_0$. Заметим, что условия а) и б) для уравнения (0.1) выполняются. Условие г) выполняется для уравнений типа (0.1) со степенной нелинейностью до девятого порядка [14]. Для доказательства устойчвости остается проверить условие в).

Оператор L_v в данном случае имеет вид

$$L_v=\frac{d^4}{dx^4}-\frac{d^2}{dx^2}-U_v+v_0 \tag{3.4}$$

Легко видеть, что функция $f=\partial U_v/\partial x$ является решением уравнения $L_v f=0$, т. е. представляет собой собственный вектор, соответствующий нулевому собственному значению. Кроме того, при выполнении условия г) спектр оператора L_v обязательно содержит хотя бы одно отрицательное собственное значение [13]. При доказательстве единственности и простоты отрицательного собственного значения и простоты нулевого собственного значения будем пользоваться минимаксными выражениями для спектра [15]

$$\lambda_j=\max_{\chi_i}\min_{\substack{(\chi_i,\varphi)=0\\ i=1,\dots,j-1}}\frac{(L_v\varphi,\varphi)}{(\varphi,\varphi)} \tag{3.5}$$

где круглые скобки обозначают скалярное произведение в $L_2(R)$, χ_i – произвольные кусочно-гладкие функции. Заметим, что максимум в выражении (3.5) реализуется при $\chi_i=\psi_i$, где ψ_i – собственные функции, отвечающие предыдущим собственным значениям, причем собственные функции для кратных собственных значений берутся ортогональными. При $\varphi=\psi_j$ j-й собственной функцией достигается минимум. Представим квадратичную форму $(L_v\varphi, \varphi)$ в виде суммы

$$(L_v\varphi, \varphi)=(L_S\varphi, \varphi)+(L_1\varphi, \varphi) \qquad (3.6)$$

где L_S – оператор Шредингера, а $(L_1\varphi, \varphi)$ – положительный член, соответствующий четвертой производной в (3.4). Заметим, что солитон U_v мало отличается от солитона уравнения КдВ U_K, имеющего скорость $v_0=36/169$. Собственные значения λ_v оператора L_S с потенциалом U_v поэтому мало отличаются от собственных значений λ_K оператора L_S с рассеивающим потенциалом U_K. Это видно из следующих соображений. Если положить $U_v=U_K+\delta u$, $\lambda_v=\lambda_K+\delta\lambda$, $\psi_v=\psi_K+\delta\psi$, то из уравнения $(-d^2/dx^2-U_v+v_0-\lambda_v)\psi_v=0$, пользуясь условием разрешимости уравнения на $\delta\psi$ (ортогональностью правой части функции ψ_K в $L_2(R)$) и пренебрегая членами второго порядка малости, получим

$$\delta\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}\delta u\psi_K^2\,dx\Big/\int_{-\infty}^{\infty}\psi_K^2\,dx, \quad \text{т. е.} \quad |\delta\lambda|<0{,}05 .$$

Отсюда следует, что собственные значения λ_{v1}, λ_{v2}, λ_{v3} оператора L_S с потенциалом U_v отличаются от соответствующих собственных значений оператора L_S с потенциалом U_K не более чем на 0,05. Собственные значения L_S с потенциалом U_K однозначно связаны с амплитудами образующихся из начального возмущения $6U_K$ трех солитонов уравнения КдВ. Эти амплитуды легко могут быть получены из первых трех законов сохранения для уравнения КдВ с учетом того факта, что U_K – безотражательный потенциал. Соответствующие собственные значения равны: $\lambda_{K1}=-45/169$, $\lambda_{K2}=0$, $\lambda_{K3}=27/169$.

Первое собственное значение λ_1 для оператора L_v, как об этом уже упоминалось,– отрицательное. Если в качестве χ_1 взять собственную функцию G_1, соответствующую λ_{v1} для оператора L_S с рассеивающим потенциалом U_v, то из (3.5), (3.6) получим

$$\lambda_2\geqslant\min_{(\varphi,G_1)=0}\frac{[(L_S\varphi,\varphi)+(L_1\varphi,\varphi)]}{(\varphi,\varphi)}>-0{,}05$$

в силу положительности формы $(L_1\varphi, \varphi)$. Если далее $\chi_1=G_1$, а $\chi_2=G_2$ – собственная функция с собственным значением λ_{v2} для L_S с U_v, то

$$\lambda_3\geqslant\min_{\substack{(\varphi,G_i)=0\\ i=1,2}}\frac{(L_S\varphi,\varphi)+(L_1\varphi,\varphi)}{(\varphi,\varphi)}>0 \qquad (3.7)$$

так как третье собственное значение оператора L_S с потенциалом U_v строго больше нуля. Отсюда следует, что λ_2 для L_v равно нулю, а также, что λ_1 и λ_2 – простые собственные значения, так как встречаются один раз в ряду оценок для возрастающих номеров собственных значений. Кроме того, из (3.7) следует, что положительные собственные значения отделены от нуля.

Таким образом, условие в) оказывается выполненным и рассматриваемый солитон, а также близкие к нему солитоны семейства U_v – устойчивы. Если все солитоны семейства U_v, $0<v<1/4$, мало отличаются от соответствующих солитонов уравнения КдВ (что, по-видимому, имеет место), то приведенное доказательство верно и применительно к любому представителю семейства.

4. Инварианты $Xu=0$ группы (2.1) имеют вид

$$u=(5t)^{-4/5}f((5t)^{-1/5}x) \qquad (4.1)$$

При подстановке (4.1) в уравнение (0.1) с $\alpha=0$ получим обыкновенное уравнение на функцию f

$$f^{(V)}-ff'+zf'+4f=0 \qquad (4.2)$$

где производные берутся по переменной $z=(5t)^{-1/5}x$. Рассмотрим далее конфигурацию, заданную в виде волны разрежения

$$u=-1\ (x\leqslant-t),\ u=x/t\ (-t<x<t),\ u=1\ (x\geqslant t) \qquad (4.3)$$

Функция (4.3) является точным решением уравнения (0.1). Это решение имеет два слабых разрыва при $x=-t$ и t, которые будут размываться под влиянием дисперсионных членов (пятой производной) с течением времени. Структура обоих разрывов будет описываться автомодельными решениями (0.1) с $\alpha=0$. Вообще говоря, функция (4.2) может рассматриваться как данные Коши при $t=t_0>0$. Под влиянием дисперсионных членов слабые разрывы будут сглаживаться и размываться и при $t\to\infty$ их можно рассматривать отдельно. Для нахождения структуры левого и правого разрывов надо искать решение уравнения (0.1) с $\alpha=0$, удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$u\to-1\ (x\to-\infty),\ u\to x/t\ (x\to\infty) \tag{4.4}$$

$$u\to x/t\ (x\to-\infty),\quad u\to 1\ (x\to\infty) \tag{4.5}$$

Для описания эволюции разрывов воспользуемся автомодельными решениями (4.1) уравнения (4.2). При этом заметим аргументы в (4.1): $x\to x+t$ и $x\to x-t$. Рассмотрим функции

$$u_{1,2}=(5t)^{-4/5}f_{1,2}\left(\frac{x\pm t}{(5t)^{1/5}}\right)\mp 1$$

В силу инвариантности (0.1) относительно галилеевых преобразований функции u_1 и u_2 по-прежнему являются решениями уравнения (0.1) с $\alpha=0$, так как f_1 и f_2 являются решениями уравнений (4.2) с $z=(x\pm t)/(5t)^{1/5}$. Заметим, что при $f_1\to 0$ $(z\to-\infty)$, $f_1\to 5z$ $(z\to\infty)$ u_1 удовлетворяет асимптотикам (4.4), характеризующим эволюции левого слабого разрыва, а при $f_2\to 5z$ $(z\to-\infty)$, $f_2\to 0$ $(z\to\infty)$ асимптотикам (4.5), характеризующим эволюцию правого слабого разрыва. Решения уравнений (4.2) с приведенными выше граничными условиями описывают асимптотическое поведение волны разрежения на больших временах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Березин Ю. А.* Моделирование нелинейных волновых процессов. Новосибирск: Наука, 1982. 160 с.
2. *Nagashima H.* Experiment on solitary waves in the nonlinear transmission line described by the equation $\frac{\partial u}{\partial\tau}+u\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial^5 u}{\partial\xi^5}=0$ // J. Phys. Soc. Japan. 1979. V. 47. № 4. P. 1387–1388.
3. *Kawahara T.* Oscillatory solitary waves in dispersive media // J. Phys. Soc. Japan. 1972. V. 33. № 1. P. 260–264.
4. *Марченко А. В.* О длинных волнах в мелкой жидкости под ледяным покровом // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 230–235.
5. *Ильичев А. Т., Марченко А. В.* О распространении длинных нелинейных волн в тяжелой жидкости под ледяным покровом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1.
6. *Zufiria J. A.* Symmetry breaking in periodic and solitary gravity-capillary waves on water of finite depth // J. Fluid Mech. 1987. V. 184. № 1. P. 183–206.
7. *Kano K., Nakayama T.* An exact solution of the wave equation $u_t+uu_x-u_{(5)x}=0$ // J. Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50. № 2. P. 361–362.
8. *Yamamoto Y., Takizawa E. I.* On a solution of non-linear time-evolution equation of fifth order // J. Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50. № 5. P. 1421–1422.
9. *Nagashima H., Kuwahara M.* Computer simulation of solitary waves of the nonlinear wave equation $u_t+uu_x-\gamma^2u_{5x}=0$ // J. Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50. № 11.
10. *Ильичев А. Т.* О свойствах одного нелинейного эволюционного уравнения пятого порядка, описывающего волновые процессы в средах со слабой дисперсией // Тр. Математ. ин-та им. В. А. Стеклова. 1989. Т. 186. С. 392–401.
11. *Копсон Э. Т.* Асимптотические разложения: Пер. с англ. М.: Мир, 1966. 159 с.
12. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
13. *Grillakis M., Shatah J., Strauss W.* Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I // J. Funct. Anal. 1987. V. 74. № 1. P. 160–197.
14. *Bona J. L., Souganidis P. E., Strauss W. A.* Stability and instability of solitary waves of Korteweg – de Vries type // Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A. 1987. V. 411. № 1841. P. 395–412.
15. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики: Пер. с нем. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 476 с.

Москва

Поступила в редакцию 16.I.1989