

УДК 532.59

© 1990 г.

МАРЧЕНКО А. В., СИБГАТУЛЛИН Н. Р.

**О РЕЗОНАНСНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ДЛИННЫХ ВОЛН
В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ ПЕРЕМЕННЫМ ДАВЛЕНИЕМ
НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

В связи с тем, что частота Вэйсяля – Брента в атмосфере и океане – величины одного порядка, в спектр атмосферных давлений существенный вклад вносят атмосферные внутренние гравитационные волны с частотами и волновыми числами порядка частот и волновых чисел внутренних волн в океане и потому выполнение условий резонанса весьма вероятно [1]. Генерация внутренних волн периодическим полем атмосферного давления постоянной глубины исследовалась в [1–5]. В случае резонанса амплитуда линейных внутренних волн возрастает пропорционально времени. Вследствие этого на определенном этапе эволюции линейное приближение теряет смысл. Влияние слабой нелинейности на ограничение амплитуды при резонансном возбуждении поверхностных волн в глубокой жидкости переменным атмосферным давлением исследовано в [6, 7]. В [8] для описания указанного процесса в мелкой жидкости применялось неоднородное уравнение Кортевега – де Вриза (КдВ).

В данной работе рассматривается резонансное возбуждение длинных внутренних волн на границе раздела тяжелой двухслойной жидкости периодическим полем атмосферного давления малой амплитуды, перемещающимся в пространстве с постоянной скоростью c . С помощью асимптотических разложений получено неоднородное уравнение КдВ, описывающее данный процесс. Показано, что в отсутствие дисперсии вблизи резонанса на границе раздела возникает разрывная стационарная периодическая волна с периодом, равным периоду вынуждающей силы. Подобные эффекты возникают при изучении нелинейных резонансных колебаний газового столба в трубах [9], а также сдвиговых колебаний упругого слоя [10]. В [9] показано, что учет слабой диссипации приводит к появлению структуры у разрывов.

Для неоднородного уравнения КдВ с произвольной 2π -периодической вынуждающей силой задача Коши с 2π -периодическими начальными условиями сведена к бесконечномерной гамильтоновой системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Построены ее стационарные решения. Показано, что выход на стационарный режим из состояния покоя не происходит. Исследование неоднородного уравнения КдВ с вынуждающей силой, являющейся случайной функцией времени, проведено в [11], со стационарной локализованной в пространстве вынуждающей силой различных форм – в [12, 13]. В [14] численно исследовалось влияние дисперсии на точные решения уравнений простой волны с синусоидальной вынуждающей силой.

Проведена оценка амплитуд стационарных внутренних волн при точном резонансе. Исследована зависимость амплитуд от плотностей и глубин слоев. Показано, что дисперсия существенно уменьшает амплитуду стационарных волн. В решении при этом появляются высшие гармоники.

1. Система уравнений с граничными условиями, описывающая потенциальные движения двухслойной тяжелой жидкости, в безразмерной форме выглядит следующим образом [15]:

$$\left(\mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi_i = 0, \quad i=1, 2 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta_1 + \frac{\partial}{\partial x} \eta_1 \frac{\partial}{\partial x} \varphi_1 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \varphi_1, \quad y = \Delta + \varepsilon \eta_1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_1 + \frac{\varepsilon}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_1 \right)^2 + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial y} \varphi_1 \right)^2 \right] + \eta_1 + \beta p = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \eta_2 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \eta_2 \frac{\partial}{\partial x} \varphi_i &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \varphi_i, \quad y = \varepsilon \eta_2 \\ (1-\delta) \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1 - \frac{\partial}{\partial t} \varphi_2 + \frac{\varepsilon}{2} (1-\delta) \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_1 \right)^2 + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial y} \varphi_1 \right)^2 \right] - \\ - \frac{\varepsilon}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_2 \right)^2 + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial y} \varphi_2 \right)^2 \right] - \delta \eta_2 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \varphi_2 &= 0, \quad y = -1 \\ \Delta = \frac{h_1}{h_2}, \quad \delta = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}, \quad \varepsilon = \frac{a}{h_2}, \quad \mu = \left(\frac{h_2}{\lambda} \right)^2, \quad \beta = \frac{P}{\rho_1 a g} \end{aligned}$$

Здесь h_i , ρ_i — глубины и плотности верхнего ($i=1$) и нижнего ($i=2$) слоев, φ_i — потенциалы скоростей, η_i — возвышения свободной поверхности верхнего ($i=1$) и поверхности раздела слоев ($i=2$) над горизонтальным положением равновесия, p — атмосферное давление на свободной поверхности, a — характерная амплитуда волн, λ , h_2 — характерные горизонтальный и вертикальный масштабы, P — характерная величина перепадов атмосферного давления. В качестве характерных величин потенциалов скоростей жидкости и времени взяты соответственно величины $a\lambda\sqrt{g/h_2}$, $\lambda/\sqrt{gh_2}$.

Решение уравнений (1.1) при предположениях теории мелкой воды ε , $\mu \ll 1$ будем искать в виде рядов по y

$$\varphi_i(x, y, t) = \varphi_{i,0}(x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \varphi_{i,k}(x, t) \quad (1.2)$$

Из уравнений Лапласа следует, что коэффициенты $\varphi_{i,2k}$ выражаются через $\varphi_{i,0}$, а $\varphi_{i,2k+1}$ через $\varphi_{i,1}$. Из условия непротекания на дне и кинематического граничного условия на свободной поверхности находим

$$\begin{aligned} \varphi_{1,1} &= \mu \frac{\partial}{\partial t} \eta_1 + \mu \Delta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_{1,0} + \varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta_1 \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{1,0} \right] + \\ &+ \frac{\Delta^2 \mu^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x^2} \eta_1 + \frac{\Delta^3 \mu^2}{3} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \varphi_{1,0} + O(\mu^3) \\ \varphi_{2,1} &= -\mu \frac{\partial^3}{\partial x^2} \varphi_{2,0} - \frac{\mu^2}{3} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \varphi_{2,0} + O(\mu^3) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Далее индекс ноль у φ_i опускается. Исключая из оставшихся граничных условий η_i , с использованием (1.3) получаем с точностью до $O(\varepsilon, \mu)$ систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [(1-\delta) \varphi_1 - \varphi_2] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\delta \frac{\partial}{\partial x} \varphi_2 + \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi_1 - \frac{\partial}{\partial t} \varphi_2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \varphi_2 - \right. \\ \left. - \varepsilon \delta \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1 \frac{\partial}{\partial x} \varphi_2 + \frac{\mu \delta}{3} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \varphi_2 \right] + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[(1-\delta) \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_1 \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_2 \right)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\varphi_1 - \varphi_2 - \mu \Delta \delta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi_1 + \frac{3\mu \Delta^2 \delta}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_1 \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_1 - \varphi_2) \frac{\partial}{\partial x} \varphi_1 - \right. \\ \left. - \delta \Delta \frac{\partial}{\partial x} \varphi_1 - \frac{\mu \Delta^3 \delta}{3} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \varphi_1 \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\varepsilon}{2} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_1 \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi_2 \right)^2 \right) + \beta p \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Домножим уравнение (1.4) на постоянную α и сложим его с уравне-

нием (1.5), причем α выберем из условия

$$\alpha\Delta(1+\alpha)=1-\delta+\alpha$$

Отсюда находим

$$\alpha_1=\Delta^{-1}-\delta(1+\Delta)^{-1}+O(\delta^2), \quad \alpha_2=-1+\delta(1+\Delta)^{-1}+O(\delta^2)$$

В результате сложения получим два линейно независимых уравнения, соответствующие α_1 и α_2

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-v_i^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi_i=\varepsilon N_i+\mu D_i+\beta_i\frac{\partial}{\partial t}p, \quad i=1,2 \quad (1.6)$$

$$\psi_i=\Delta\alpha_i\varphi_1-\varphi_2, \quad v_i^2=\delta\Delta(1+\Delta)^{-1}+O(\delta^2)$$

$$v_2^2=1+\Delta+O(\delta), \quad N_i=\sum_{k,l=1}^2\alpha_{ki}^i\frac{\partial}{\partial x}\psi_k\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_l$$

$$D_i=\frac{\partial^4}{\partial x^4}(\beta_1^i\psi_1+\beta_2^i\psi_2), \quad \beta_i=\frac{\beta\alpha_i}{1+\alpha_i}$$

Коэффициенты α_{ki}^i , β_k^i даны в Приложении.

Уравнения (1.6) при $\varepsilon=\mu=\beta=0$ совпадают с уравнениями распространения поверхностной ($i=2$) и внутренней ($i=1$) мод свободных длинных линейных гравитационных волн [16].

Пренебрегая дисперсионными эффектами и внешней силой, т. е. полагая $\mu=\beta=0$, решение (1.6) будем искать в следующих формах:

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_i=f_i(u_i), \quad \frac{\partial}{\partial x}\psi_i=\Phi_i(u_i), \quad u_i=\frac{\partial}{\partial x}\psi_i, \quad j=3-i \quad (1.7)$$

Как будет видно из дальнейшего, соответствующие решения описывают два вида римановских волн, которые в линейном приближении имеют скорости внутренней ($i=1$) и поверхностной ($i=2$) мод соответственно. Из (1.7) имеем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-f_i'^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi_i=0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\psi_i+\Phi_i'\psi_i)=0 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi_i=\Phi_i'f_i'^2\frac{\partial}{\partial x}u_i, \quad f_i'=\frac{df_i}{du_i}, \quad \Phi_i'=\frac{d\Phi_i}{du_i}$$

Подставляя (1.7), (1.8) в (1.6), получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для определения f_i и Φ_i

$$f_i'^2=v_i^2+\varepsilon[\alpha_{ii}^i u_i+\alpha_{ij}^i \Phi_i' u_i+\alpha_{ji}^i \Phi_i+\alpha_{jj}^i \Phi_i \Phi_i'] \quad (1.9)$$

$$\Phi_i'(v_j^2-v_i^2)=\varepsilon[(\alpha_{ii}^i-\alpha_{ij}^j)\Phi_i' u_i+(\alpha_{ji}^i-\alpha_{jj}^j)\Phi_i \Phi_i'+\alpha_{ij}^i \Phi_i'^2 u_i+\alpha_{jj}^i \Phi_i \Phi_i'^2-\alpha_{ii}^j u_i-\alpha_{ji}^j \Phi_i]$$

Решения (1.9), имеющие при $\varepsilon=0$ смысл линейных волн, имеют вид

$$\Phi_i=\varepsilon\frac{\alpha_{ii}^j}{2(v_i^2-v_j^2)}u_i^2+O(\varepsilon^2) \quad (1.10)$$

$$f_i'=v_i+\varepsilon\frac{\alpha_{ii}^i}{2v_i}u_i+O(\varepsilon^2)$$

Из (1.10) следует, что u_i удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i=\left(v_i+\varepsilon\frac{\alpha_{ii}^i}{2v_i}u_i\right)\frac{\partial}{\partial x}u_i \quad (1.11)$$

$$u_j = \varepsilon \frac{\alpha_{ii}^j}{2(v_i^2 - v_j^2)} u_i^2$$

Отделяя волны, бегущие в одну сторону, из (1.6) с учетом (1.11) получаем уточнение первого уравнения в системе (1.11) дисперсионными членами и вынуждающей силой

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i = \left(v_i + \varepsilon \frac{\alpha_{ii}^i}{2v_i} u_i \right) \frac{\partial}{\partial x} u_i + \mu \frac{\beta_i^i}{2v_i} \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_i + \frac{\beta_i}{2v_i} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.12)$$

2. Рассмотрим процесс возбуждения волн на границе раздела двухслойной жидкости периодическим давлением на свободной поверхности, имеющим следующий вид:

$$P = \sin \theta, \quad \theta = x + ct$$

После перехода в систему координат, перемещающуюся в пространстве со скоростью c , уравнение (1.12) при $\mu = 0$ для внутренней моды (далее индекс $i=1$ опускается) запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \Delta \frac{\partial}{\partial \theta} u + 2\alpha u \frac{\partial}{\partial \theta} u + \gamma \cos \theta \quad (2.1)$$

$$\Delta = v_1 - c, \quad \alpha = \varepsilon \alpha_{11} / (4v_1), \quad \gamma = c\beta_1 / (2v_1)$$

Не ограничивая общности, положим $\alpha > 0$, $\gamma > 0$. Рассмотрим возбуждение колебаний из состояния покоя $u(\theta, 0) = 0$. Решение (2.1) можно найти методом характеристик [12]

$$\frac{d\theta}{dt} = -\Delta - 2\alpha u, \quad \frac{du}{dt} = \gamma \cos \theta, \quad \theta(0) = \theta_0 \quad (2.2)$$

Интегрируя (2.2), получаем

$$2\alpha u = -\Delta \pm \text{sign } \Delta \sqrt{D}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \mp \text{sign } \Delta \sqrt{D} \quad (2.3)$$

$$D = \Delta^2 + 4\alpha\gamma (\sin \theta_0 - \sin \theta)$$

При $t=0$, согласно $u(\theta, 0) = 0$, в формулах (2.3) надо взять верхний знак.

При $\Delta^2 > 8\alpha\gamma$ при любых значениях θ будет выполняться $D > 0$. При $\Delta^2 < 8\alpha\gamma$ на характеристиках появляется поворотная точка, где $D = d\theta/dt = 0$. Для продления характеристик далее надо использовать в формулах (2.3) нижний знак.

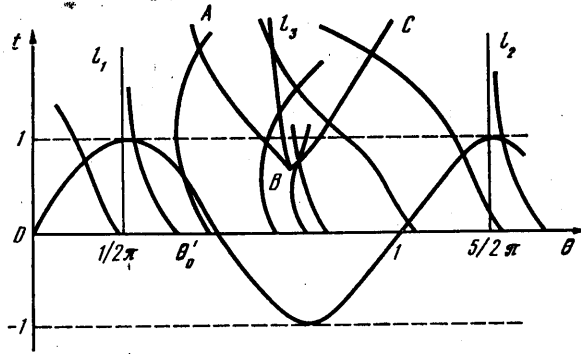
При $t=0$ тангенс угла наклона характеристик к оси θ равен $-\Delta$. Существует точка θ_0' , такая, что исходящая из нее характеристика подходит к поворотной точке за бесконечно большое время, т. е. рассматриваемая характеристика имеет асимптоту, параллельную оси t . Перепишем второе уравнение (2.3) в виде

$$\int_{\theta_0'}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{D}} = -\text{sign } \Delta t_0$$

Если разложение D в ряд Тейлора в окрестности θ начинается с квадратичных членов, то $t_0 \rightarrow \infty$. Отсюда получим условия для нахождения θ_0' : $D=0$, $\partial D/\partial \theta = 0$, $\partial^2 D/\partial \theta^2 > 0$. Подставляя сюда выражение для D , находим

$$\sin \theta_0' = 1 - \Delta^2 / (4\alpha\gamma), \quad \theta = \pi/2$$

Значение u на характеристике, исходящей из θ_0' , стремится к $u_s = -\Delta / (2\alpha)$ при $t \rightarrow \infty$.



Фиг. 1

На плоскости (θ, t) есть область пересечения характеристик, которая соответствует разрывам, появляющимся в решении. Из (2.1) следует, что разрыву соответствует некоторая линия, уравнение которой можно записать в виде

$$\frac{d\theta}{dt} = -\Delta - \alpha(u_1 + u_2)$$

Здесь $u_{1,2}$ — значения u , привносимые в данную точку характеристиками, пересекающимися в ней. При $t \rightarrow \infty$ углы наклона характеристик, которые еще не пересекли разрыв, к оси t стремятся к нулю и поэтому кривая разрыва имеет при $t \rightarrow \infty$ вертикальную асимптоту. Это означает, что при $t \rightarrow \infty$ решение выходит на стационарный режим. Характеристический портрет представлен при $\Delta > 0$, $\Delta^2 < 8\alpha\gamma$ на фиг. 1. Прямые l_1, l_2 — вертикальные асимптоты характеристик, выходящих на стационарные значения, ABC — угол, ограничивающий область пересечения характеристик, l_3 — кривая разрыва, кривая $l - t = \sin \theta$.

Из (2.1) и $u(\theta, 0) = 0$ следует, что для стационарного периодического решения должно выполняться

$$\int_{1/2\pi}^{5/2\pi} u \, d\theta = 0 \quad (2.4)$$

После интегрирования (2.1) по θ в стационарном случае имеем

$$\Delta u + \alpha u^2 + \gamma \sin \theta = \gamma C, \quad C = \text{const} \quad (2.5)$$

Постоянную интегрирования C надо взять равной $\sin \theta'_0$, так как только в этом случае стационарное решение имеет значение, равное u_s в точке $\theta = \pi/2$. Уравнение (2.5) имеет два решения

$$2\alpha v_{1,2} = -\Delta \pm 2 \operatorname{sign} \Delta \sqrt{2\alpha\gamma} \sin(\pi/4 - \theta/2) \quad (2.6)$$

Каждое из этих решений в отдельности не удовлетворяет условию (2.4), однако из них можно составить решение с разрывом, удовлетворяющее (2.4). Условие (2.4) запишем в виде

$$\int_{\pi/2}^{\theta'} v_2 \, d\theta + \int_{\theta'}^{5/2\pi} v_1 \, d\theta = 0, \quad \Delta > 0 \quad (2.7)$$

$$\int_{\pi/2}^{\theta'} v_1 \, d\theta + \int_{\theta'}^{5/2\pi} v_2 \, d\theta = 0, \quad \Delta < 0 \quad (2.8)$$

Значение $\theta = \theta'$ определяет положение разрыва. Из (2.6)–(2.8) находим

$$\Delta \pi = -4\sqrt{2\alpha\gamma} \cos(\pi/4 - \theta'/2)$$

При $\Delta = \Delta_1 = 4\sqrt{2\alpha\gamma}/\pi$ разрыв находится при $\theta_1' = 5/2\pi$ и все решение составлено из v_2 . При $\Delta = \Delta_2 = 0$ разрыв находится в точке $\theta_2' = 3/2\pi$. При изменении θ от $\pi/2$ до $3/2\pi$ решение состоит из v_2 , и при изменении θ от $3/2\pi$ до $5/2\pi$ из v_1 . При $\Delta = \Delta_3 = -\Delta_1$ разрыв находится при $\theta_3' = \pi/2$ и все решение составлено из v_1 . Профили указанных решений представлены на фиг. 2.

3. Рассмотрим случай 2π -периодического поля атмосферного давления, представимого рядом Фурье. С учетом дисперсии уравнение (2.1) запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\Delta u + \alpha u^2 + \beta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u + \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k \exp ik\theta + \text{C. C.}) \right] \quad (3.1)$$

Для исследования эволюции 2π -периодического начального возмущения решение (3.1) представим в виде ряда Фурье с коэффициентами, зависящими от времени

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k} z_k \exp(ik\theta) + \text{C. C.}), \quad z_k = z_k(t) \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (3.1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем бесконечномерную гамильтонову систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = i \frac{dH}{dz^*}, \quad \dot{z}^* = -i \frac{dH}{dz} \quad (3.3)$$

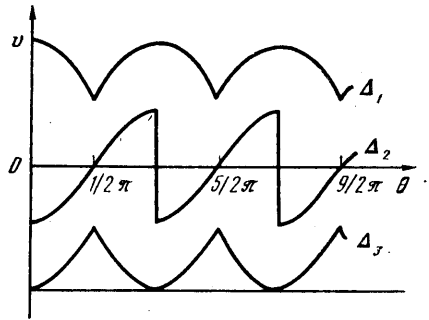
$$H = H_{N,1} + H_{N,2}, \quad H_{N,1} = \sum_{k=1}^{\infty} [k \Delta_k |z_k|^2 +$$

$$+ \alpha \sum_{l=1}^{k-1} z_{k-l} z_l z_k^* \sqrt{kl(k-l)} +$$

$$+ (\gamma_k z_k^* + \gamma_k^* z_k) \sqrt{k}] +$$

$$+ \alpha \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{k-1} z_{k-l}^* z_l^* z_k \sqrt{kl(k-l)}$$

$$H_{N,2} = \alpha \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-1} z_{k-l}^* z_l^* z_k \sqrt{kl(k-l)}, \quad \Delta_k = \Delta - \beta k^2$$



Фиг. 2

Здесь $z = (z_k)$, $z^* = (z_k^*)$ — бесконечномерные вектор-столбец и вектор-строка соответственно.

Система (3.3) имеет интеграл $H = \text{const}$. Фазовые кривые системы (3.3), лежащие на различных поверхностях уровня H , не могут переходить с одной поверхности на другую. Стационарным решениям (3.1) соответствуют экстремальные точки гамильтониана

$$\frac{\partial H}{\partial z^*} = 0 \quad (3.4)$$

Состояние покоя при $\gamma_k \neq 0$ не является положением равновесия системы (3.3), и ему соответствует гиперповерхность $H = 0$. Выход на стационарный режим из начального состояния покоя возможен только в том

случае, если гамильтониан имеет экстремумы на гиперповерхности $H=0$. Отметим, что при $\gamma_k=0$ система (3.3) имеет счетное число первых интегралов, находящихся в инволюции, которые возникают из законов сохранения для уравнения КдВ [17].

Стационарные решения (3.3) при $\Delta_k \neq 0$, $k \geq N$ находятся в виде ряда

$$z = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k, \quad S_k = z^\circ + \delta_1 z + \dots + \delta_k z \quad (3.5)$$

где z° есть точное решение уравнений

$$\frac{\partial H_{N,1}}{\partial z^*} = 0 \quad (3.6)$$

а $\delta_k z$ являются решениями линеаризованной относительно системы (3.4), где значение $H_{N,1}$ берется в точке $z = S_{k-1} + \delta_k z$, а $H_{N,2}$ — в точке $z = S_{k-1}$. Критерием применимости данного метода является сходимость рядов (3.5).

Для примера рассмотрим случай $N=3$, $\gamma_k=0$ ($k > 1$), $\text{Im } \gamma_1 = 0$. Из (3.6) следует, что z_1° является корнем уравнения (3.7) и остальные z_k° определяются формулами (3.8)

$$(\Delta_1 z_1 + \gamma) M^2 + 2\alpha^2 \Delta_3 M z_1^3 - 4\alpha^2 z_1^5 = 0 \quad (3.7)$$

$$M = 4\alpha^2 z_1^2 - \Delta_2 \Delta_3, \quad \text{Im } z_1 = 0, \quad \gamma = \gamma_1 \quad (3.8)$$

$$z_2^\circ = \alpha z_1^{\circ 2} \Delta_3 / (\sqrt{2} M), \quad z_k^\circ = \left[-\alpha \sum_{l=1}^{k-1} z_{k-l}^\circ \right. \\ \left. z_l^\circ \sqrt{l(k-l)} \right] / \sqrt{k} \Delta_k$$

Из (3.7) видно, что при $\Delta_{1,2} \neq 0$ существует корень $z_1^\circ = -\gamma/\Delta_1 + O(\gamma^3)$. Из (3.4), (3.8) находим

$$z_k^\circ = O(\gamma^k), \quad \delta_n z_k = O(\gamma^{k+2n})$$

В рассматриваемом случае решение может быть построено в виде рядов по степеням γ . Значение гамильтониана на стационарном решении $H = H_s$ можно приближенно определить

$$H_s = -\gamma^2/\Delta_1 + O(\gamma^4)$$

Отсюда видно, что из состояния покоя переход на построенное стационарное решение не происходит, так как эти решения находятся на разных энергетических уровнях.

При точном втором резонансе $\Delta_2 = 0$ находим

$$z_2^\circ = \Delta_3 / (4\sqrt{2} \alpha) + O(\gamma^2)$$

В окрестности второго резонанса амплитуда второй гармоники в стационарном решении не зависит от амплитуды γ вынуждающей силы. Переход на стационарный режим из состояния покоя здесь также не происходит.

В окрестности первого резонанса $\Delta_1 = 0$ для малых z_1 уравнение (3.7) приближенно запишем в форме

$$2\alpha^2 z_1^3 - \Delta_1 \Delta_2 z_1 - \gamma \Delta_2 = 0 \quad (3.9)$$

Дискриминант уравнения (3.9) равен

$$D = \frac{\Delta_2^2}{16\alpha^4} (\gamma^2 - f(\Delta)), \quad f(\Delta) = \frac{2}{27\alpha^2} (\Delta - \beta)^3 (\Delta - 4\beta)$$

В зависимости от знака D уравнение (3.9) имеет один ($D > 0$), два ($D = 0$) или три ($D < 0$) действительных корней. Каждый из этих корней в случае малой абсолютной величины может являться малым параметром,

по степеням которого строится решение. При точном первом резонансе $\Delta_1=0$ единственный действительный корень имеет значение

$$z_1^0 = -(\gamma\Delta_2/(2\alpha^2))^{1/3}$$

Из (3.4), (3.8) следует, что

$$z_k^0 = O(\gamma^{k/3}), \quad \delta_n z_k = O(\gamma^{(k+2n)/3})$$

В данном случае стационарное решение записывается в виде рядов по степеням $\gamma^{1/3}$. Стационарное значение гамильтониана определяется формулой

$$H_s = -^{5/2}\gamma(\gamma\Delta_2/(2\alpha^2))^{1/3} + O(\gamma^2)$$

Поэтому и в окрестности $\Delta_1=0$ переход на стационарное решение из состояния покоя не происходит, так как они находятся на разных уровнях энергии H . Отметим, что стационарное решение при $\Delta_1=0$ может быть построено методом Малкина [18].

4. Оценим амплитуду стационарных волн на границе раздела в случае точного резонанса $c=v_1$. В отсутствие дисперсии из (2.6) находим амплитуду разрыва

$$[u_1] = \sqrt{2\gamma/\alpha} \quad (4.1)$$

С учетом дисперсии амплитуда первой гармоники определяется из (3.10)

$$|z_1^0| = \left(\frac{\mu\gamma\beta_1^4}{\alpha^2 v_1} \right)^{1/3} \quad (4.2)$$

Принимая, что $\Delta, \delta \ll 1$, из (4.1), (4.2) находим

$$[u_1] = 2 \sqrt{\frac{\beta}{3\varepsilon}} + O(\Delta, \delta), \quad |z_1^0| = \left(\frac{\mu\beta\Delta\gamma\delta\Delta}{54\varepsilon^2} \right)^{1/3} + O(\Delta, \delta) \quad (4.3)$$

Из (1.1) в линейном приближении для длинных волн следует

$$\eta_2 = \sqrt{\Delta/\delta} u_1 + O(\Delta)$$

В размерном виде амплитуда волн на границе раздела определяется в соответствии с (4.3) формулами

$$[\eta] = \sqrt{\frac{P h_2 \Delta}{\rho g \delta}}, \quad \eta_z = \sqrt{\frac{\Delta}{\delta}} \left(\frac{h_2^4 P \Delta \gamma \delta \Delta}{54 \lambda^2 \rho g} \right)^{1/3} \quad (4.4)$$

Амплитуда волн растет при уменьшении стратификации δ и уменьшается при уменьшении толщины верхнего слоя. Положим

$$P = 10^3 \text{ н} \cdot \text{м}^{-2}, \quad h_1 = 10^2 \text{ м}, \quad h_2 = 10^3 \text{ м}, \quad \delta = 10^{-2}, \quad \lambda = 10^4 \text{ м}.$$

Из (4.4) находим $[\eta] \approx 30 \text{ м}$, $\eta_z \approx 1 \text{ м}$. Таким образом, дисперсия уменьшает амплитуду стационарных волн вблизи резонанса, при этом в решении появляются высшие гармоники.

Приложение

$$\alpha_{11}^1 = 3\sqrt{\delta\Delta}(\Delta-1)(\Delta+1)^{-1/2} + O(\delta), \quad \alpha_{12}^1 = \sqrt{\delta\Delta}(1+\Delta)^{-1} + O(\delta)$$

$$\alpha_{21}^1 = 2\sqrt{\delta\Delta}(1+\Delta)^{-3/2} + O(\delta), \quad \alpha_{22}^1 = -\delta\Delta(1+\Delta)^{-3/2} + O(\delta^2)$$

$$\alpha_{11}^2 = 2\sqrt{\Delta}(1+\Delta)\delta^{-1/2} + O(\sqrt{\delta}), \quad \alpha_{12}^2 = -\Delta^2(1+\Delta)^{-1/2} + O(\delta)$$

$$\alpha_{21}^2 = (1+\Delta-4\Delta^2)\sqrt{\delta\Delta}(1+\Delta)^{-3/2} + O(\delta^{3/2}), \quad \alpha_{22}^2 = 3(1+\Delta)^{-1/2} + O(\delta)$$

$$\beta_1^1 = 1/3\delta\Delta^2(1+\Delta)^{-1} + O(\delta^2), \quad \beta_2^1 = 1/6\delta\Delta(\Delta^2-3\Delta-4)(1+\Delta)^{-2} + O(\delta^2)$$

$$\beta_1^2 = 1/3\Delta(\Delta-1)(\Delta+1) + O(\delta), \quad \beta_2^2 = -1/6(1+\Delta)(\Delta^2-4\Delta-2) + O(\delta), \quad \beta_i = \alpha_i\beta(1+\alpha_i)^{-1}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонов А. И., Миропольский Ю. З. О резонансном возбуждении внутренних гравитационных волн в океане колебаниями атмосферного давления // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1973. Т. 9. № 8. С. 851-862.

2. *Мирополюский Ю. З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. М.: Гидрометеоздат, 1981. 302 с.
3. *Черкесов Л. В.* Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. Киев: Наук. думка, 1976. 364 с.
4. *Букагов А. Е., Черкесов Л. В.* Внутренние волны от периодических поверхностных возмущений // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1971. Т. 7. № 6. С. 648–657.
5. *Нестеров С. В., Никитин Л. В.* Возбуждение волн нестационарными областями аномального давления // Ветровые, внутренние, приливные волны, волны цунами: Тез. докл. на III съезде советских океанологов, Ленинград, 1987. Л.: Гидрометеоздат, 1987. С. 142.
6. *Срегенский Л. Н.* Волны конечной амплитуды, возникающие от периодического распределенного давления // Изв. АН СССР. ОТН. 1953. № 4. С. 505–511.
7. *Нестеров С. В.* Возбуждение волн конечной амплитуды бегущей системой давления // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1968. Т. 4. № 10. С. 1123–1125.
8. *Akylas T. R.* On the excitation of long nonlinear water waves by a moving pressure distribution // J. Fluid Mech. 1984. 141. P. 455–466.
9. *Chester W.* Resonant oscillations in closed tubes // J. Fluid Mech. 1964. V. 18. № 1. P. 44–64.
10. *Сибгагуллин Н. Р.* Колебания и волны в сильных гравитационных и электромагнитных полях. М.: Наука, 1984. 351 с.
11. *Городцов В. А.* Диффузионное расплывание локализованных гидродинамических возмущений под действием случайных сил // ПММ. 1988. Т. 52. В. 2. С. 211–217.
12. *Grimshaw R. H. J.* Resonant flow of a stratified fluid over topography // J. Fluid Mech. 1986. V. 169. P. 429–464.
13. *Mei C. C.* Radiation of solitons by slender bodies advancing in a shallow channel // J. Fluid Mech. 1986. V. 16. P. 53–67.
14. *Moriguchi H., Nozaki K., Taniuti T.* Nonlinear responses of dispersive media. II. A stability of stationary solutions to the KdV equation with sinusoidal force // J. Phys. Soc. Jap. 1988. V. 57. № 2. P. 470–475.
15. *Марченко А. В.* О некоторых эффектах диффузии солитонов внутренних волн над неровным дном // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 1. С. 111–114.
16. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. Т. 1. М.: Мир, 1981. 480 с.
17. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
18. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.

Владивосток
Москва

Поступила в редакцию
27.I.1989