

УДК 532.5.013.4:536.25

© 1990 г.

ГЕЛЬФГАТ А. Ю., МАРТУЗАН Б. Я.

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ  
ГРАВИТАЦИОННО-КАПИЛЛЯРНОЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ  
ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛОМ ЧИСЛЕ ПРАНДТЛЯ**

Исследуется устойчивость гравитационно-капиллярного течения в квадратной полости с изотермическими вертикальными и адиабатическими горизонтальными границами. Для жидкости с числом Прандтля, равным 0,02, определена область устойчивых режимов в плоскости число Грасгофа – число Марангони.

В [1] проведено численное исследование устойчивости стационарных режимов термогравитационной конвекции в нагреваемой сбоку квадратной области. Для решения системы уравнений свободной конвекции в приближении Обербека – Буссинеска применялся метод Галеркина с системой координатных функций, построенных предложенным в [2] способом. В настоящей работе описываемый в [2] вариант метода Галеркина применен для исследования устойчивости стационарных режимов свободноконвективного течения, развивающегося в условиях совместного действия термогравитационной и термокапиллярной сил.

Рассмотрим термоконвективное течение в квадратной полости, вертикальные границы которой поддерживаются при постоянных и различных значениях температуры. Горизонтальные границы полости считаются адиабатическими. Предполагается, что верхняя граница области является свободной поверхностью, остальные границы – твердые. Течение жидкости описывается системой уравнений конвекции в приближении Обербека – Буссинеска с соответствующими граничными условиями

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + Gr \mathbf{T} e_y \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)T = \frac{\Delta T}{Pr}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

$$Gr = g\beta \frac{l^3}{\nu^2} \Delta T, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi}, \quad Ma = \frac{l}{\rho\nu^2} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \Delta T$$

$$T|_{x=0} = 1, \quad T|_{x=1} = 0, \quad T_y'|_{y=0,1} = 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{v}|_{x=0,1} = \mathbf{v}|_{y=0} = 0 \quad (3)$$

$$v_y|_{y=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=1} = -Ma \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{y=1} \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  – скорость жидкости,  $T$  – температура,  $p$  – давление,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\beta$  – коэффициент объемного расширения,  $l$  – длина полости,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $\chi$  – температуропроводность,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $\rho$  – плотность жидкости,  $e_y$  – единичный орт в направлении оси  $y$ .

Решение задачи (1)–(4) ищется в виде

$$\mathbf{v} = \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} c_{ij}(t) \varphi_{ij}(x, y) + Ma \sum_{l=0}^M f_l(t) \varphi_l^*(x, y) \quad (5)$$

$$T = (1-x) + \sum_{i=0}^{K_x} \sum_{j=0}^{K_y} d_{ij}(t) q_{ij}(x, y) \quad (6)$$

Функции  $\Phi_{ij}$ ,  $\Phi_i^*$ ,  $q_{ij}$  строятся из линейных комбинаций полиномов Чебышева 1-го и 2-го рода так, чтобы удовлетворялись уравнения неразрывности и все граничные условия, за исключением условия, содержащего число Марангони. Это условие удовлетворяется численно, в результате чего коэффициенты  $f_i(t)$  выражаются через коэффициенты  $d_{ij}(t)$ . После применения метода Галеркина рассматриваемая задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\dot{X}_i(t) = a_{ij} X_j(t) + b_{ijk} X_j(t) X_k(t) + F_i \quad (7)$$

где  $X_k$  — один из коэффициентов  $c_{ij}$  или  $d_{ij}$ .

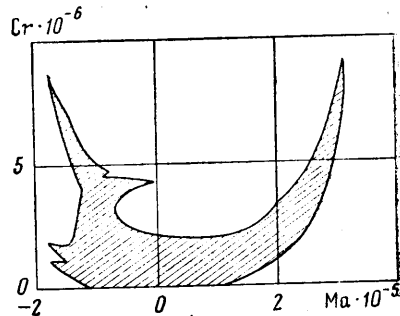
Стационарные решения системы (7) ( $\dot{X}_i=0$ ), определяющие с помощью сумм (5), (6) стационарные решения задачи (1)–(4), вычислялись методом Ньютона. Для исследования устойчивости стационарных решений применялась традиционная методика, описанная в [3, 4].

В описываемых ниже расчетах использовалось 9 функций по направлению  $x$ , 4 функции по направлению  $y$  и 10 функций для удовлетворения второму из условий (4) ( $N_x=K_x=9$ ,  $N_y=K_y=4$ ,  $M=10$ ). Как показано в [5], используемый численный метод позволяет получать результаты, хорошо согласующиеся с различными численными и экспериментальными данными.

Во всех расчетах число  $Pr$  принималось равным 0,02, что характерно для расплавов металлов и полупроводников. Устойчивость стационарных конвективных течений при фиксированном числе Прандтля определяется числами Грасгофа и Марангони. Результаты численного исследования устойчивости показаны на плоскости  $(Gr, Ma)$  (фиг. 1). Область устойчивых течений заштрихована. Точки пересечения границы области с осями координат соответствуют критическим числам, полученным в условиях отсутствия термокапиллярных ( $Ma=0$ ,  $Gr=2,1 \cdot 10^6$ ) или термогравитационных ( $Gr=0$ ,  $Ma=\pm 1,14 \cdot 10^5$ ) сил.

Изменение критического числа Грасгофа при постепенном увеличении числа Марангони характеризуется верхней границей области устойчивости. Рассмотрим случай  $Ma > 0$ . Рост числа Марангони от 0 до  $8 \cdot 10^4$  вызывает незначительное уменьшение критического числа Грасгофа  $Gr^*$  от  $2,1 \cdot 10^6$  до  $1,9 \cdot 10^6$ . Дальнейшее увеличение  $Ma$  сопровождается быстрым ростом критического значения числа Грасгофа, которое при  $Ma=3,2 \cdot 10^5$  достигает значения  $9,1 \cdot 10^6$ . Аналогичный рост критического значения числа Марангони, характеризующийся нижней границей области устойчивости, наблюдается и при постепенном увеличении числа Грасгофа. Изменение  $Gr$  от 0 до величины  $8 \cdot 10^6$  приводит к возрастанию критического значения числа  $Ma$  от  $1,1 \cdot 10^5$  до  $3,2 \cdot 10^5$ .

При  $Ma > 0$  жидкость движется вдоль свободной поверхности под действием термокапиллярной силы в том же направлении, что и под действием термогравитационных сил. Поэтому увеличение любого из чисел  $Gr$  или  $Ma$  приводит к интенсификации конвективного переноса тепла. Наблюдаемый рост критического значения одного из параметров при увеличении другого параметра показывает, что интенсификация конвективного теплопереноса совместным действием термогравитационных и термокапиллярных сил может приводить к стабилизации движения. Очевидно, что при



Фиг. 1

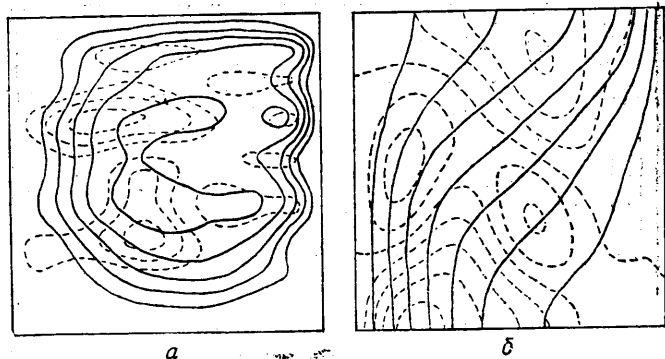
достижении одним из чисел  $Gr$  или  $Ma$  достаточно большого значения невозможно стабилизировать конвективное течение увеличением другого параметра. Согласно фиг. 1, эти значения  $Gr$  и  $Ma$  равны соответственно  $9,1 \cdot 10^6$  и  $3,2 \cdot 10^5$ .

В случае  $Ma < 0$  термокапиллярная сила действует вдоль свободной поверхности в направлении, противоположном направлению термогравитационного течения. Разнонаправленное действие поверхностных и объемных сил может приводить как к ослаблению интенсивности конвективного течения, так и к появлению двух конвективных вихрей (см. ниже фиг. 5), один из которых имеет преимущественно термокапиллярную, а другой — преимущественно термогравитационную природу. Эффект стабилизации течения при увеличении абсолютного значения одного из параметров  $Gr$  или  $Ma$ , имеющий место и в этом случае (см. фиг. 1), может быть объяснен убыванием интегральной интенсивности течения вследствие роста  $Gr$  или  $Ma$ . С другой стороны, взаимодействие нескольких конвективных вихрей может создавать условия для дестабилизации течения. Наличием стабилизирующих и дестабилизирующих факторов объясняется более сложная по сравнению со случаем  $Ma > 0$  форма нейтральной кривой, разделяющей на фиг. 1 области устойчивых и неустойчивых режимов конвекции. При  $-1,8 \cdot 10^5 \leq Ma \leq -1,5 \cdot 10^5$  с ростом числа Грасгофа наблюдается многократное чередование устойчивых и неустойчивых режимов стационарных конвективных течений. При  $Gr \approx 4,25 \cdot 10^6$  область устойчивых режимов приближается к оси  $Ma = 0$ , но не пересекает ее: течение в этом случае стабилизируется уже при  $Ma \approx -280$ . Когда число Грасгофа достигает значения  $8,75 \cdot 10^6$ , конвективное течение становится неустойчивым при любом отрицательном числе Марангони. Течения неустойчивы также и при любом числе Грасгофа, если  $Ma < -1,8 \cdot 10^5$ .

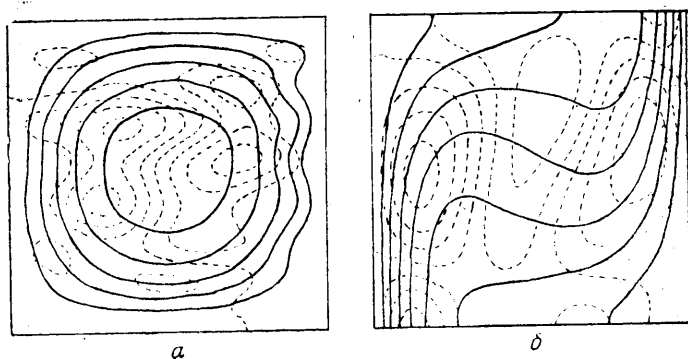
Каждому непрерывному участку границы области устойчивости (см. фиг. 1) соответствует определенный физический механизм, вызывающий неустойчивость стационарного конвективного течения. Некоторое представление о физическом механизме неустойчивости можно получить из анализа пространственной структуры наиболее опасного бесконечно малого возмущения. Последнее определяется вычисленным при критических значениях параметров собственным вектором системы (7), линеаризованной в окрестности стационарного решения. Собственный вектор линеаризованной системы (7), соответствующий собственному значению с неотрицательной вещественной частью, совместно с суммами (5), (6) определяет (с точностью до умножения на константу) наиболее опасное бесконечно малое возмущение, экспоненциальное нарастание которого разрушает стационарное конвективное течение. Как показывают расчеты, каждому гладкому участку границы области устойчивости соответствует определенная пространственная структура наиболее опасного возмущения.

На фиг. 2–6 показаны стационарные конвективные течения и соответствующие им наиболее опасные бесконечно малые возмущения для значений  $Gr$  и  $Ma$ , лежащих на различных гладких участках границы области устойчивости. Сплошными линиями на фиг. 2–6 изображены линии тока (а) и изотермы (б) стационарных течений, штриховыми — изолинии наиболее опасных возмущений функции тока (а) и температуры (б). Числа Грасгофа и Марангони, определяющие течения и возмущения на фиг. 2–6, равны соответственно 0;  $1,87 \cdot 10^6$ ;  $3,5 \cdot 10^6$ ;  $4 \cdot 10^6$ ;  $2,1 \cdot 10^6$  и  $1,14 \cdot 10^5$ ;  $10^5$ ;  $-7 \cdot 10^6$ ;  $-1,1 \cdot 10^5$ ; 0.

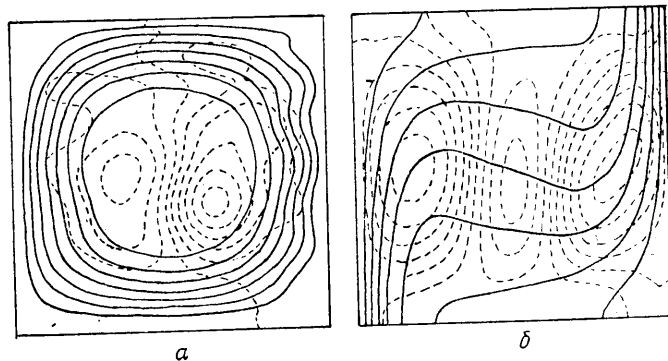
Существование качественно различных структур наиболее опасного возмущения свидетельствует о том, что неустойчивость конвективного течения может вызываться различными физическими механизмами, которые, как показывают расчеты, сменяют друг друга скачкообразно при переходе с одного гладкого участка границы области устойчивости на другой (см. фиг. 1). В то же время на каждом из гладких участков пространственная структура наиболее опасного возмущения изменяется непрерывно.



Фиг. 2



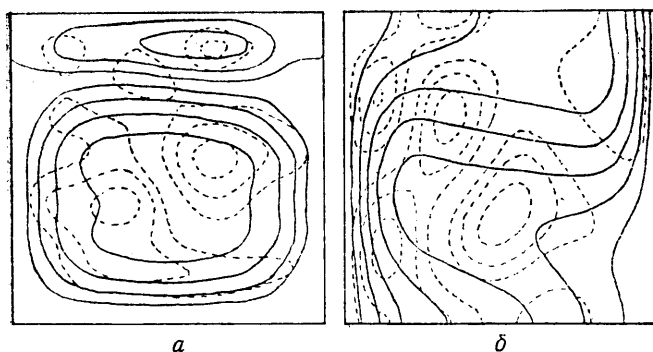
Фиг. 3



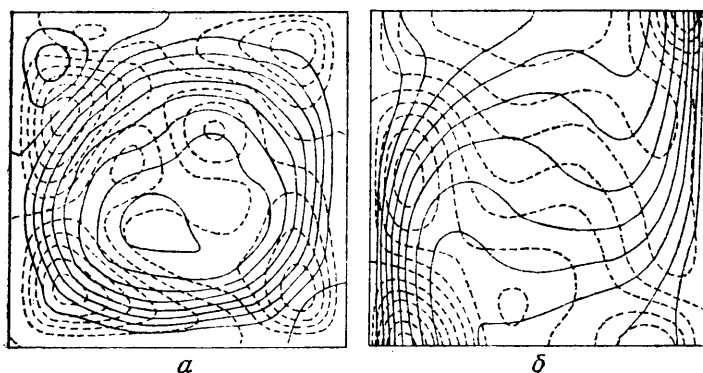
Фиг. 4

В случае отсутствия термогравитационных сил при  $G_r=0$  и  $Ma=1,14 \cdot 10^5$  (фиг. 2) максимумы наиболее опасного возмущения функции тока распределяются по периметру конвективного вихря. Максимальные значения наиболее опасного возмущения температуры расположены у горизонтальных стенок полости, что может быть связано с интенсивным движением жидкости вдоль свободной границы.

Пример теряющего устойчивость стационарного конвективного течения при  $G_r=1,87 \cdot 10^6$ ,  $Ma=10^5$ , связанного с верхней границей области устойчивости, показан на фиг. 3. Этот случай соответствует той же ветви нейтральной кривой, на которой располагается точка  $Ma=0$ ,  $G_r=2,1 \cdot 10^6$ , что позволяет сравнивать фиг. 3 и 6. Сравнение показывает, как под действием термокапиллярной силы изменяются форма термогравитационного течения и структура разрушающего его возмущения. Наличие термокапиллярного



Фиг. 5



Фиг. 6

механизма конвекции приводит к исчезновению небольших обратных вихрей, расположенных при  $Ma=0$  (см. фиг. 6) в левом верхнем и правом нижнем углах полости. Максимумы возмущения функции тока перемещаются от границ в центральную часть области течения. Наибольшие значения возмущения температуры при  $Ma=10^5$  (фиг. 2, б) располагаются у середины вертикальных границ. Относительные величины максимумов температурных возмущений, находящихся вблизи левого нижнего и правого верхнего углов полости, уменьшаются с увеличением числа Марангони.

На фиг. 4, 5 показаны примеры стационарных течений и разрушающих их возмущений при  $Ma < 0$ . Очевидно, что вследствие симметрии задачи случаю  $Gr=0$ ,  $Ma=-1,14 \cdot 10^5$  будет отвечать фиг. 2, а, зеркально отраженная относительно прямой  $x=0$ .

На фиг. 4 изображены течение и возмущения при  $Gr=3,5 \cdot 10^6$ ,  $Ma=-7 \cdot 10^4$ . Этот случай соответствует той же ветви нейтральной кривой, что и терпящие устойчивость течения, показанные на фиг. 3 и 6. Сравнение фиг. 3 и 4 показывает, что структуры течений и возмущений в обоих случаях подобны друг другу. Возмущения скорости в последнем случае имеют более простую структуру, а на картине возмущений температуры отсутствуют максимумы, расположенные на фиг. 3 и 6 вблизи углов полости.

Как уже отмечалось, взаимодействие термогравитационной и термокапиллярной сил при  $Ma < 0$  может приводить к уменьшению интенсивности конвективного течения. Поэтому на рассматриваемой ветви нейтральной кривой значения критического числа Грасгофа в окрестности  $Ma=0$  увеличиваются при  $Ma < 0$  и уменьшаются при  $Ma > 0$ .

При  $Gr=4 \cdot 10^6$ ,  $Ma=-1,1 \cdot 10^5$  (фиг. 5) течение состоит из двух вихрей, один из которых вызван преобладанием термокапиллярной силы на свободной поверхности, а другой — действием термогравитационной силы в удаленной от границы  $y=1$  части течения. Распределение изолиний возму-

щения скорости показывает (см. фиг. 3, 5), что после потери устойчивости верхний (термокапиллярный) вихрь сохраняет свою форму, а нижний (термогравитационный) вихрь сильно деформируется. Конвективный перенос более горячей жидкости от нагреваемой границы к охлаждаемой, осуществляемый верхней частью нижнего конвективного вихря и нижней частью верхнего вихря (фиг. 5), приводит к сильному прогибу изотерм и смещению максимумов температурного возмущения к охлаждаемой стенке.

Следует отметить, что наиболее интересным результатом исследования устойчивости стационарных режимов гравитационно-капиллярной тепловой конвекции является обнаруженный эффект стабилизации течений при увеличении абсолютного значения одного из чисел  $Gr$  или  $Ma$ . Однако использование этого эффекта на практике затруднено из-за сравнительно небольшой ширины области устойчивых течений (фиг. 1). Для определения зависимости формы и размеров области устойчивости от числа Прандтля или геометрических параметров области течения требуются дополнительные исследования.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфгат А. Ю., Маргузан Б. Я. Устойчивость и колебательные режимы естественной конвекции в нагреваемой сбоку прямоугольной полости // Прикладные задачи математической физики. Рига: Изд-во Латв. ун-та им. П. Стучки, 1988. С. 31–40.
2. Гельфгат А. Ю. Вариационный метод решения задач динамики вязкой жидкости в прямоугольных областях // Прикладные задачи математической физики. Рига: Изд-во Латв. ун-та им. П. Стучки, 1987. С. 14–24.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
4. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985. 280 с.
5. Гельфгат А. Ю. Решение задач тепловой конвекции методом Галеркина: тестовые расчеты // Прикладные задачи математической физики. Рига: Изд-во Латв. ун-та им. П. Стучки. 1989. С. 33–42.

Рига

Поступила в редакцию  
4.IV.1989