

УДК 532.529

© 1990 г.

ДЕРЕВИЧ И. В., ЕРОШЕНКО В. М.

РАСЧЕТ ОСРЕДНЕННОГО СКОРОСТНОГО СКОЛЬЖЕНИЯ ФАЗ ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ ДИСПЕРСНЫХ ПОТОКОВ В КАНАЛАХ

На основе статистического подхода построена замкнутая система уравнений гидродинамики и массопереноса дисперсной фазы инерционных частиц в турбулентном потоке в каналах. Получены граничные условия, учитывающие характер взаимодействия частиц с поверхностью канала. Проведены расчеты осредненной скорости частиц в круглых трубах, результаты расчетов сопоставлены с имеющимися в литературе экспериментальными данными по величине осредненного скоростного скольжения фаз.

Эффект осредненного скоростного скольжения частиц и жидкой фазы при турбулентном течении в каналах исследовался экспериментально в [1–11]. Отмечается, что скоростное скольжение фаз наблюдается как при горизонтальном, так и при вертикальном течении дисперсных потоков; причем относительная среднемассовая скорость частиц и несущей фазы значительно превосходит скорость витания частиц. В ядре течения скорости частиц существенно меньше скорости несущей фазы; в пристеночной области, напротив, скорость дисперсной фазы больше скорости сплошной среды. Рассогласование в скоростях твердой и жидкой фаз возрастает с увеличением размера частиц и скорости течения несущего потока. Имеется ряд эмпирических соотношений, обзор которых представлен, например, в [12], для оценки величины среднемассового скоростного скольжения фаз. Однако область применимости этих формул ограничена, как правило, узким диапазоном изменения параметров дисперсного потока.

Теоретических моделей, позволяющих описать явление скоростного рассогласования фаз, не много. В [13] предполагается, что осредненное скольжение фаз обусловлено оседанием частиц под действием силы тяжести. В результате получено, что величина скоростного рассогласования порядка скорости витания частиц. Прямое численное моделирование движения отдельных частиц в плоском канале [14] показывает, что осредненное скольжение фаз возникает вследствие потери импульса частицами при ударе о стенки канала.

Объяснение эффекта скоростного скольжения фаз возможно в рамках модели турбулентного переноса импульса в дисперсном потоке. В [3] скоростное рассогласование частиц и жидкой фазы трактуется как результат непрерывного обмена импульсом между ядром потока и пристеночной областью, вызванного поперечной турбулентной диффузией частиц с высокими аксиальными скоростями из ядра течения в область с низкими скоростями около стенки.

По степени вовлечения частиц в турбулентное движение несущего потока частицы можно условно разделить на мелкие и крупные. Интенсивность пульсационного движения мелких частиц, время динамической релаксации которых меньше либо порядка времени жизни энергоемких молей, определяется пульсационными и осредненными характеристиками турбулентного поля в месте нахождения частицы. Движение таких частиц описывается в рамках локальной теории турбулентного переноса. Для крупных частиц, время динамической релаксации которых намного больше времени жизни энергоемких молей, значительную роль играют эффекты нелокального турбулентного переноса, связанные с инерционностью дискретной фазы и проявляющиеся в неоднородных турбулентных течениях. Ввиду существенной неоднородности поля турбулентных пульсаций в канале крупные частицы благодаря инерции пролетают область вязкого подслоя без существенного изменения своей пульсационной энергии, приобретенной в ядре течения. Для описания этого явления оправдано привлечение гипотезы инерционного пробега, длина которого $l_p = \tau \sigma^{1/2}$ [15, 16] (τ – время динамической релаксации частиц, σ – квадрат пульсаций скорости дискретной фазы). В случае, когда длина инерционного пробега частиц превосходит характерный масштаб неоднородности пульсаций жидкой фазы, естественно предположить слабое изменение пульсационной энергии твердой фазы по сечению канала. Высокая интенсивность пульсационного движения крупных частиц в при-

стеночной области обеспечивает эффективный турбулентный перенос импульса осредненного движения из ядра течения к стенкам.

1. Для крупных частиц ($\tau \gg T_E$, T_E — характерное время жизни энергоемких молей) поле турбулентных пульсаций несущей фазы можно описывать в рамках дельта-коррелированного во времени случайного процесса. Считая, что хаотическое движение частиц вызывается пульсациями силы вязкого сопротивления, и пренебрегая соударениями частиц друг с другом и силами, связанными с вращением частиц, запишем уравнение для функции распределения дисперсной фазы в дельта-коррелированном во времени случайном поле [17]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + V_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial V_k} [(\langle U_k \rangle - V_k) \Phi] = \frac{D_{ik}}{\tau^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial V_i \partial V_j} \quad (1.1)$$

Здесь $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{V}, t)$ — функция плотности вероятности распределения частиц по координатам и скоростям; $\langle U_k(\mathbf{x}, t) \rangle$ — осредненная скорость несущей фазы; $D_{ik} = T_E \langle u_i u_k \rangle$ — тензор турбулентной диффузии жидкой фазы. В дальнейшем полагаем $D_{ik} = D \delta_{ik}$. Определяем осредненные концентрацию $\langle N(\mathbf{x}, t) \rangle$, скорость $\langle V_i(\mathbf{x}, t) \rangle$ и интенсивность пульсационного движения $\langle v_i v_j \rangle$ твердой фазы и, переходя к переменным \mathbf{x} , $\mathbf{v} = \mathbf{V} - \langle \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \rangle$, t в уравнении (1.1), получаем

$$\begin{aligned} \langle N(\mathbf{x}, t) \rangle &= \int d\mathbf{V} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{V}, t), \quad \langle N \rangle \langle \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \rangle = \int d\mathbf{V} \mathbf{V} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{V}, t) \\ \langle N \rangle \langle v_i v_j \rangle &= \int d\mathbf{V} (V_i - \langle V_i \rangle) (V_j - \langle V_j \rangle) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{V}, t) \\ \frac{D\Phi}{Dt} + v_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - \frac{D \langle V_i \rangle}{Dt} \frac{\partial \Phi}{\partial v_i} - v_k \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial v_i} + \frac{\langle U_i \rangle - \langle V_i \rangle}{\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial v_i} &= \\ &= \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial v_i} (v_i \Phi) + \frac{D}{\tau^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v_i \partial v_i} \\ \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \langle V_i \rangle \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Интегрируя уравнения (1.2) по пространству скоростей, затем умножая (1.2) последовательно на v_i и $v_i v_j$ и снова интегрируя результат по пространству скоростей, получаем уравнения для концентрации, скорости и интенсивности пульсаций дискретной фазы

$$\frac{\partial \langle N \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle N \rangle \langle V_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial t} + \langle V_k \rangle \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{\langle N \rangle} \frac{\partial \langle N \rangle \langle v_i v_k \rangle}{\partial x_k} = \frac{\langle U_i \rangle - \langle V_i \rangle}{\tau} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle v_i v_j \rangle}{\partial t} + \langle V_k \rangle \frac{\partial \langle v_i v_j \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{\langle N \rangle} \frac{\partial \langle N \rangle \langle v_i v_j v_k \rangle}{\partial x_k} + \langle v_i v_k \rangle \frac{\partial \langle V_j \rangle}{\partial x_k} + \\ + \langle v_j v_k \rangle \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} = \frac{2}{\tau} \left(\frac{D}{\tau} \delta_{ij} - \langle v_i v_j \rangle \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\langle N \rangle \langle v_i v_j v_k \rangle = \int d\mathbf{v} v_i v_j v_k \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

Здесь $\langle v_i v_j v_k \rangle$ — третьи моменты пульсаций скорости твердой фазы. Система уравнений (1.3)–(1.5) не замкнута, так как в уравнения для первых и вторых моментов пульсаций скорости частиц входят моменты более высоких порядков. Для замыкания системы уравнений дисперсной примеси (1.3)–(1.5) и построения граничных условий для этих урав-

нений применяем к уравнению (1.2) метод Чемпена — Энскога [18] решения кинетического уравнения для неоднородных газов. Отметим, что оператор, стоящий в правой части уравнения (1.2), описывает эффекты, связанные с взаимодействием частиц с турбулентными пульсациями несущей фазы, и аналогичен по смыслу оператору, представляющему столкновения частиц между собой в кинетической теории газов. Аналогом длины свободного пробега в дисперсном турбулентном потоке выступает расстояние, проходимое частицей между актами взаимодействия с турбулентным молекул $l = T_E [\langle u_i u_i \rangle^{1/2} - \langle v_i v_i \rangle^{1/2}]$ (u_i — пульсационная компонента скорости несущего потока). Для мелких частиц ($\tau \ll T_E$) $\langle v_i v_i \rangle \rightarrow \langle u_i u_i \rangle$, $l \rightarrow 0$, т. е. частица «отслеживает» траекторию турбулентного моля. Для крупных частиц ($\tau \gg T_E$) $\langle v_i v_i \rangle \ll \langle u_i u_i \rangle$, $l \approx T_E \langle u_i u_i \rangle^{1/2} \approx L_E$ (L_E — пространственный масштаб турбулентных пульсаций, причем $L_E \ll L$, где L — характерный размер системы).

Оценим порядок слагаемых в правой и левой частях уравнения (1.2): Полагаем, что время изменения осредненных параметров потока значительно превосходит время релаксации частиц. Для инерционных частиц характерный пространственный масштаб изменения осредненных величин порядка $L + \tau^{1/2}$. Считаем, что функция Φ зависит от времени и пространственных координат через осредненные параметры дисперсного потока. В этом случае, как следует из соотношений (1.3) — (1.5), порядок отношения величин в левой и правой частях уравнения (1.2) равен $\epsilon = \tau \sigma^{1/2} / (L + \tau^{1/2}) < 1$. В соответствии с методом Чемпена — Энскога решение кинетического уравнения (1.2) ищем в виде ряда

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \dots$$

Решение, принимаемое в качестве нулевого приближения уравнения (1.2) и обращающее в нуль оператор «столкновений» частиц с турбулентными молекулами, имеет вид

$$\Phi_0 = \frac{\langle N(\mathbf{x}, t) \rangle}{(2\pi\sigma)^{3/2}} \exp\left(-\frac{v_i v_i}{2\sigma}\right) \quad (1.6)$$

Здесь $\sigma = \langle v_i^2 \rangle = D/\tau$ — интенсивность пульсационного движения частиц в нулевом приближении. Первая поправка Φ_1 , линейная по градиентам средних величин, является решением уравнения

$$\begin{aligned} \frac{D\Phi_0}{Dt} + v_k \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_k} - \frac{D\langle V_i \rangle}{Dt} \frac{\partial \Phi_0}{\partial v_i} - v_k \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi_0}{\partial v_i} + \frac{\langle U_i \rangle - \langle V_i \rangle}{\tau} \frac{\partial \Phi_0}{\partial v_i} = A\Phi_1 \\ A = \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial v_i} v_i + \frac{D}{\tau^2} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_i} \end{aligned} \quad (1.7)$$

где оператор A представляет взаимодействие частицы с турбулентным молекул. Поправка Φ_1 удовлетворяет условиям нормировки

$$\int dv \Phi_1 = \int dv v_i \Phi_1 = \int dv v_i v_i \Phi_1 = 0 \quad (1.8)$$

Используя нулевое приближение для Φ (1.6), запишем систему уравнений для концентрации, скорости и интенсивности пульсаций дисперсной фазы

$$\begin{aligned} \frac{1}{\langle N \rangle} \frac{D\langle N \rangle}{Dt} = -\frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_i}, \quad \langle v_i v_j \rangle = \sigma \delta_{ij} \\ \frac{D\langle V_i \rangle}{Dt} = -\frac{1}{\langle N \rangle} \frac{\partial \sigma \langle N \rangle}{\partial x_i} + \frac{\langle U_i \rangle - \langle V_i \rangle}{\tau} \\ \frac{1}{\sigma} \frac{D\sigma}{Dt} = -\frac{2}{3} \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Привлекая уравнения (1.9) и выражение (1.6), исключаем производные по времени и пространству от $\Phi_0(x, v, t)$ в уравнении (1.7). В результате имеем уравнение для поправки

$$A\Phi_1 = \frac{\Phi_0}{\sigma} \left(v_i v_k - \frac{\delta_{ik}}{3} v^2 \right) \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} + \Phi_0 v_k \left(\frac{v^2}{2\sigma} - \frac{5}{2} \right) \frac{\partial \ln \sigma}{\partial x_k} \quad (1.10)$$

Интегрируя уравнение (1.10) и учитывая условия (1.8), получаем вид первой поправки к решению кинетического уравнения (1.2), учитывающей градиенты осредненных параметров потока

$$\Phi_1 = -\Phi_0 \left[\frac{\tau}{2\sigma} \left(v_i v_k - \frac{\delta_{ik}}{3} v^2 \right) \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} + \frac{\tau}{3} v_k \left(\frac{v^2}{2\sigma} - \frac{5}{2} \right) \frac{\partial \ln \sigma}{\partial x_k} \right] \quad (1.11)$$

С использованием первой поправки Φ_1 вычисляем сдвиговые напряжения, возникающие в твердой фазе в результате «столкновения» частиц примеси с турбулентными молями, и поток пульсационной энергии частиц

$$\begin{aligned} \langle N \rangle \langle v_i v_j \rangle &= \int dv v_i v_j \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \\ &= -\langle N \rangle \frac{\tau \sigma}{2} \left(\frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle V_j \rangle}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \langle V_k \rangle}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\langle N \rangle \langle v_i v_j v_k \rangle = \int dv v_i v_j v_k \Phi_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = -\langle N \rangle \frac{5}{3} \tau \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial x_k} \quad (1.13)$$

Система уравнений (1.3)–(1.5) совместно с выражениями (1.12) и (1.13) представляют собой замкнутое описание движения и массопереноса дисперсной фазы в турбулентном потоке.

2. Система уравнений (1.3)–(1.5) с замыкающими соотношениями (1.12), (1.13) имеет смысл на некотором удалении от ограничивающей поверхности. Для частиц расстояние от поверхности, начиная с которого справедливы уравнения (1.3)–(1.5), порядка длины свободного пробега l . Так как Φ мало изменяется на длине свободного пробега ($l/l_p \sim (T_x/\tau)^{1/2}$), то, как и в кинетической теории газов, граничные условия получаются из условия равенства суммы потоков характеристики дисперсной фазы, падающих и отраженных от поверхности, потоку на некотором удалении от стенки [18].

С целью получения граничных условий для уравнений (1.3)–(1.5) рассмотрим турбулентное течение дисперсного потока вблизи стенки канала в приближении пограничного слоя ($\partial \langle V_x \rangle / \partial y \gg \partial \langle V_x \rangle / \partial x$). Функция Φ с учетом первой поправки имеет вид (ось y направлена по нормали к поверхности, ось x – вдоль направления течения)

$$\Phi(x, v, t) = \Phi_0 \left[1 - \frac{\tau}{2\sigma} v_x v_y \frac{\partial \langle V_x \rangle}{\partial y} - \frac{\tau}{3} v_y \left(\frac{v^2}{2\sigma} - \frac{5}{2} \right) \frac{\partial \ln \sigma}{\partial y} \right] \quad (2.1)$$

Найдем граничное условие для концентрации частиц. Поток частиц к поверхности в течении определяется выражением

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} dV_x \int_{-\infty}^{\infty} dV_y \int_{-\infty}^{\infty} dV_z V_y \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{V}, t) = \langle N \rangle \langle V_y \rangle \quad (2.2)$$

Где осредненная скорость частиц по оси y находится из уравнения (1.4)

$$\langle V_y \rangle = \langle U_y \rangle - \frac{\tau}{\langle N \rangle} \frac{\partial \sigma \langle N \rangle}{\partial y} \quad (2.3)$$

Поток частиц, падающих на стенку канала, определяется согласно

формуле ($\sigma^{1/2} \gg \langle V_y \rangle$)

$$J_- = \int_{-\infty}^{\infty} dV_x \int_{-\infty}^0 dV_y \int_{-\infty}^{\infty} dV_z V_y \Phi = -\langle N \rangle \left(\frac{\sigma}{2\pi} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{\langle V_y \rangle}{2} \left(\frac{2\pi}{\sigma} \right)^{1/2} \right] \quad (2.4)$$

ФПВ частиц, отраженных от поверхности в поток, имеет вид

$$\Phi_+(x, V, t) = \int dV' \varphi(V, V') \Phi(x, V', t), \quad V_y' \leq 0 \quad (2.5)$$

Здесь функция $\varphi(V, V')$ описывает процесс взаимодействия частиц с поверхностью. Вид функции φ зависит от характера соударения частиц со стенкой. Предполагаем, что в процессе столкновения с поверхностью налетающие частицы теряют часть импульса, т. е. величина импульса отраженной частицы в i -том направлении уменьшается в κ_i раз по сравнению с импульсом падающей частицы. В этом случае функция $\varphi(V, V')$ имеет вид

$$\varphi(V, V') = \delta(V_x - \kappa_1 V_x') \delta(V_y + \kappa_2 V_y') \delta(V_z - \kappa_3 V_z') \quad (2.6)$$

В выражении (2.6) учтено, что при столкновении со стенкой направление движения частиц по оси y меняется на противоположное, в то время как по осям x и z направление движения частиц неизменно. Подставив (2.6) в (2.5), находим представление для ФПВ отраженных от поверхности частиц

$$\begin{aligned} \Phi_+(x, V, t) = & \frac{\langle N \rangle}{\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 (2\pi\sigma)^{1/2}} \exp \left[-\frac{(V_x - \kappa_1 \langle V_x \rangle)^2}{2\kappa_1^2 \sigma} - \frac{(V_y + \kappa_2 \langle V_y \rangle)^2}{2\kappa_2^2 \sigma} - \right. \\ & \left. - \frac{(V_z - \kappa_3 \langle V_z \rangle)^2}{2\kappa_3^2 \sigma} \right] \left\{ 1 + \frac{\tau}{2\kappa_1 \kappa_2 \sigma} (V_y + \kappa_2 \langle V_y \rangle) (V_x - \kappa_1 \langle V_x \rangle) \frac{\partial \langle V_x \rangle}{\partial y} + \right. \\ & + \frac{\tau}{3\kappa_2} (V_y + \kappa_2 \langle V_y \rangle) \left[\frac{(V_x - \kappa_1 \langle V_x \rangle)^2}{2\kappa_1^2 \sigma} + \frac{(V_y + \kappa_2 \langle V_y \rangle)^2}{2\kappa_2^2 \sigma} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{(V_z - \kappa_3 \langle V_z \rangle)^2}{2\kappa_3^2 \sigma} - \frac{5}{2} \right] \frac{\partial \ln \sigma}{\partial y} \right\}, \quad V_y \geq 0 \quad (2.7) \end{aligned}$$

Используя выражение (2.7), вычисляем поток частиц, отраженных от стенки

$$J_+ = \int_{-\infty}^{\infty} dV_x \int_0^{\infty} dV_y \int_{-\infty}^{\infty} dV_z V_y \Phi_+(x, V, t) = \kappa_2 \langle N \rangle \left(\frac{\sigma}{2\pi} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{\langle V_y \rangle}{2} \left(\frac{2\pi}{\sigma} \right)^{1/2} \right]$$

Приравнивая сумму падающего J_- и отраженного J_+ потоков частиц потоку частиц в течении J , получаем граничное условие для концентрации дисперсной фазы

$$\frac{1 - \kappa_2}{1 + \kappa_2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \langle N \rangle = -\langle N \rangle \frac{\langle V_y \rangle}{\sigma^{1/2}} \quad (2.8)$$

Условие (2.8) совместно с выражением для осредненной скорости твердой фазы (2.3) дает связь между градиентом концентрации частиц и ее значением на стенке. Отметим, что граничное условие (2.8) совпадает с граничным условием для концентрации частиц, найденным ранее в [17]. Однако в [17] рассматривалось одномерное приближение и предполагалось, что в процессе взаимодействия частиц со стенкой $(1 - \kappa_2) \langle N \rangle$ частиц поглощается стенкой (уходит из потока), а $\kappa_2 \langle N \rangle$ частиц возвращается обратно в поток без потери импульса (модель абсолютно упругого «сита»). Физические соображения, положенные в основу вывода соотношения (2.8), представляются более реалистичными. Из форму-

лы (2.8) видно, что для абсолютно упругой стенки ($\kappa_2=1$) поток частиц на стенку $\langle N \rangle \langle V_y \rangle = 0$. В случае абсолютно неупругого соударения ($\kappa_2=0$) концентрация частиц и поток частиц на стенку имеют ненулевые значения.

С целью получения граничных условий для осредненной скорости твердой фазы рассмотрим поток импульса частиц по направлению к поверхности. Поток импульса в течении и поток импульса частиц, налетающих на поверхность, имеют вид

$$P = \langle N \rangle \langle V_x V_y \rangle = \int dV V_x V_y \Phi(x, V, t) = \langle N \rangle \left(\langle V_x \rangle \langle V_y \rangle - \frac{\tau \sigma}{2} \frac{\partial \langle V_x \rangle}{\partial y} \right) \quad (2.9)$$

$$P_- = \int_{-\infty}^{\infty} dV_x \int_0^{\infty} dV_y \int_{-\infty}^{\infty} dV_z V_x V_y \Phi(x, V, t) = \langle N \rangle \left[\frac{\langle V_x \rangle \langle V_y \rangle}{2} - \left(\frac{\sigma}{2\pi} \right)^{1/2} \langle V_x \rangle - \frac{\tau \sigma}{4} \frac{\partial \langle V_x \rangle}{\partial y} \right] \quad (2.10)$$

Используя выражение (2.7) для отраженных от стенки частиц, находим поток импульса частиц после соударения со стенкой

$$P_+ = \int_{-\infty}^{\infty} dV_x \int_0^{\infty} dV_y \int_{-\infty}^{\infty} dV_z V_x V_y \Phi_+(x, V, t) = \kappa_1 \kappa_2 \langle N \rangle \left[-\frac{\langle V_x \rangle \langle V_y \rangle}{2} + \left(\frac{\sigma}{2\pi} \right)^{1/2} \langle V_x \rangle + \frac{\tau \sigma}{4} \frac{\partial \langle V_x \rangle}{\partial y} \right] \quad (2.11)$$

Аналогично предыдущему, приравняв сумму падающего (2.10) и отраженного (2.11) потоков импульса частиц на стенке потоку импульса в течении (2.9), находим граничное условие для осредненной скорости твердой фазы

$$\left[\left(\frac{2\sigma}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1 - \kappa_1 \kappa_2}{1 + \kappa_1 \kappa_2} + \langle V_y \rangle \right] \langle V_x \rangle = \frac{\tau \sigma}{2} \frac{\partial \langle V_x \rangle}{\partial y} \quad (2.12)$$

Выражение (2.12) связывает значение скорости дисперсной фазы и ее градиент на стенке. В случае неупругого соударения частиц с поверхностью ($\kappa_1, \kappa_2 < 1$) наблюдается потеря аксиального импульса дисперсной фазы в результате соударения частиц со стенкой. Для абсолютно упругой поверхности ($\kappa_1 = \kappa_2 = 1, \langle V_y \rangle = 0$) поток импульса осредненного движения твердой фазы к стенке отсутствует $\tau \sigma \partial \langle V_x \rangle / \partial y = 0$. Из выражения (2.12) следует, что с уменьшением размера частиц примеси ($\tau \rightarrow 0$) снижается также значение скорости твердой фазы на ограничивающей поверхности.

Вычислим поток интенсивности пульсационного движения дискретной фазы по нормали к стенке. Поток интенсивности пульсационного движения частиц вдали от стенки определяется выражением

$$Q = \int dV V_i V_i V_y \Phi(x, V, t) = \langle N \rangle \left(\langle V_y \rangle \langle V_x \rangle^2 + 5\sigma \langle V_y \rangle - \frac{\tau \sigma}{2} \frac{\partial \langle V_x \rangle^2}{\partial y} - \frac{5}{3} \tau \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right) \quad (2.13)$$

Потоки пульсационной энергии падающих и отраженных от стенки частиц представляются соответственно в виде

$$Q_- = \int_{-\infty}^{\infty} dV_x \int_{-\infty}^0 dV_y \int_{-\infty}^{\infty} dV_z V_i V_i V_y \Phi(x, V, t) =$$

$$= \langle N \rangle \left[\frac{\langle V_y \rangle \langle V_x \rangle^2}{2} + \frac{5}{2} \sigma \langle V_y \rangle - \frac{\tau}{4} \sigma \frac{\partial \langle V_x \rangle^2}{\partial y} - \frac{5}{6} \tau \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial y} - \left(\frac{\sigma}{2\pi} \right)^{1/2} \langle V_x \rangle^2 - 2 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \sigma^{3/2} \right] \quad (2.14)$$

$$Q_+ = \int_{-\infty}^{\infty} dV_x \int_{-\infty}^{\infty} dV_y \int_{-\infty}^{\infty} dV_z V_x V_y V_z \Phi_+(x, V, t) = \\ = \langle N \rangle \left[-\frac{\kappa_1^2 \kappa_2}{2} \langle V_y \rangle \langle V_x \rangle^2 - \frac{3\kappa_2^3 + 2\kappa_1^2 \kappa_2}{2} \sigma \langle V_y \rangle + \frac{\kappa_1^2 \kappa_2}{4} \tau \sigma \frac{\partial \langle V_x \rangle^2}{\partial y} + \kappa_1^2 \kappa_2 \left(\frac{\sigma}{2\pi} \right)^{1/2} \langle V_x \rangle^2 + (\kappa_1^2 \kappa_2 + \kappa_2^3) \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \sigma^{3/2} + \frac{3\kappa_2^3 + 2\kappa_1^2 \kappa_2}{6} \tau \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right] \quad (2.15)$$

Выражение (2.15) получено в предположении равенства коэффициентов восстановления импульса частицами по осям x и z при соударении с поверхностью ($\kappa_1 = \kappa_3$). Из условия баланса $Q_- + Q_+ = Q$ вытекает граничное условие для интенсивности пульсационного движения дискретной фазы в турбулентном потоке

$$\frac{5}{6} \left(1 + \frac{3\kappa_2^3 + 2\kappa_1^2 \kappa_2}{5} \right) \tau \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{1 + \kappa_1^2 \kappa_2}{4} \tau \sigma \frac{\partial \langle V_x \rangle^2}{\partial y} = \\ = (1 - \kappa_1^2 \kappa_2) \left(\frac{\sigma}{2\pi} \right)^{1/2} \langle V_x \rangle^2 + \langle V_y \rangle \left[\frac{1 + \kappa_1^2 \kappa_2}{2} \langle V_x \rangle^2 + \frac{5}{2} \left(1 + \frac{3\kappa_2^3 + 2\kappa_1^2 \kappa_2}{5} \right) \sigma \right] + 2 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{\kappa_2^3 + \kappa_1^2 \kappa_2}{2} \right) \sigma^{3/2} \quad (2.16)$$

Найденное граничное условие (2.16) связывает градиент интенсивности пульсационного движения твердой фазы со значением интенсивности пульсаций на стенке. Для абсолютно отражающей поверхности ($\kappa_1 = \kappa_2 = 1$, $\langle V_y \rangle = 0$, $\partial \langle V_x \rangle / \partial y = 0$) получаем $\partial \sigma / \partial y = 0$, т. е. поток пульсационной энергии частиц на абсолютно упругую стенку отсутствует.

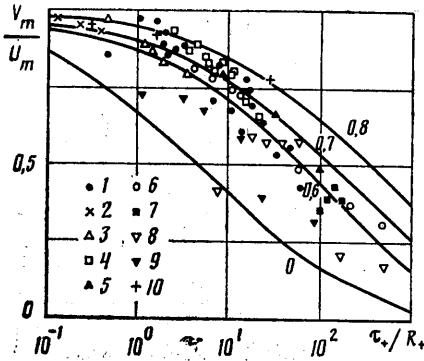
3. Рассмотрим гидродинамически развитый участок течения дисперсного турбулентного потока в круглой трубе, считая концентрацию частиц сохраняющейся по длине канала. Из выражений (2.3) и (2.8) вытекают соотношения, обеспечивающие постоянство концентрации дискретной фазы: $\langle V_y \rangle = 0$, $\kappa_2 = 1$, $\langle N \rangle \sigma = \text{const}$. Далее рассматривается течение крупных частиц, длина пульсационного инерционного пробега которых больше характерного масштаба неоднородности осредненных параметров несущего потока.

В этом случае можно предположить, что интенсивность пульсационного движения крупных частиц слабо изменяется по сечению канала, а величина интенсивности пульсаций скорости частиц оценивается по формулам [19]

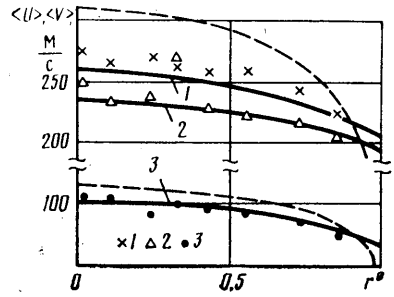
$$\sigma = f_1 E, \quad E \approx u_+^2, \quad f_1 = 1 - \exp\left(-\frac{T_E}{\tau}\right)$$

где E — интенсивность пульсаций скорости несущей фазы; $T_E = \gamma R / u_+$; $\gamma \approx 0,1$ [12]. В рамках сделанных допущений уравнение для осредненной скорости твердой фазы и граничное условие в цилиндрических координатах имеют вид

$$\frac{\tau^2 \sigma}{2} \left(\frac{\partial^2 \langle V_x \rangle}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \langle V_x \rangle}{\partial r} \right) + (\langle U_x \rangle - \langle V_x \rangle) = 0 \quad (3.1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$\left(\frac{2\sigma}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1-\kappa_1}{1+\kappa_1} \langle V_x \rangle + \frac{\tau\sigma}{2} \frac{\partial \langle V_x \rangle}{\partial r} = 0, \quad r=R \quad (3.2)$$

Здесь R — радиус канала. Интегрируя уравнение (3.1) с граничным условием (3.2), записываем выражения для распределения скорости частиц по сечению канала и среднемассовой скорости дисперсной фазы

$$\langle V_x(r) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 J_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right) M_n [J_0^2(\mu_n) A_n]^{-1} \quad (3.3)$$

$$V_m = \sum_{n=1}^{\infty} 2\mu_n J_1(\mu_n) M_n [J_0^2(\mu_n) A_n]^{-1} \quad (3.4)$$

$$A_n = (1 + \mu_n^2 \beta^2) (\mu_n^2 + h^2/\beta^2), \quad \beta = \tau\sigma^{1/2}/(2R)$$

$$M_n = \frac{2}{R^2} \int_0^R dr r J_0 \left(\frac{\mu_n r}{R} \right) \left\langle U_x \left(\frac{r}{R} \right) \right\rangle, \quad h = 2 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1-\kappa_1}{1+\kappa_1}$$

$$\mu_n J_0'(\mu_n) + \frac{h}{\beta} J_0(\mu_n) = 0 \quad (3.5)$$

где $J_0(x)$, $J_1(x)$ — функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков, μ_n — корни трансцендентного характеристического уравнения (3.5).

Рассмотрим предельный случай абсолютно отражающей поверхности $\kappa_1 \rightarrow 1$. Используя свойства цилиндрических функций [20], из (3.4) и (3.5) получаем $V_m = U_m$ (U_m — среднемассовая скорость несущей фазы), т. е. среднемассовое скольжение фаз возникает в результате потери аксиального импульса частицами при соударении со стенками канала. В выражении (3.3) и (3.4) входит безразмерный параметр β , который записывается в виде

$$\beta = \frac{\tau u_+ f_1^{1/2}}{2R} = \frac{(T_E \tau)^{1/2} u_+}{2R} = \left(\frac{\gamma}{2} \frac{\tau u_+}{R} \right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{\tau_+}{R_+} \right)^{1/2} \quad (3.6)$$

Здесь $\tau_+ = \tau u_+^2/\nu$ — безразмерное время динамической релаксации частиц; $R_+ = R u_+/\nu$ — безразмерный радиус канала. Из (3.3), (3.4) и (3.6) следует, что величина осредненного скольжения фаз в турбулентном потоке определяется значением отношения τ_+/R_+ . Получим приближенную формулу для оценки величины среднемассового скольжения фаз.

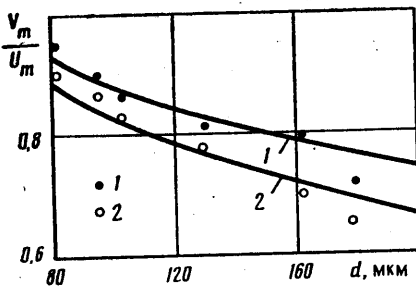
Заметим, что для инерционных частиц $\beta > 1$, $h/\beta < 1$, поэтому из (3.5) получим оценку корня $\mu_1^2 \approx 2h/\beta$. Ограничиваясь первым членом ряда в (3.4), имеем

$$\frac{V_m}{U_m} \approx \left[1 + \alpha \frac{1 - \kappa_1}{1 + \kappa_1} \left(\frac{\tau_+}{R_+} \right)^{1/2} \right]^{-1}, \quad \alpha = \frac{2^{1/2} \gamma^{1/2}}{\pi^{1/2}} \approx 0,5 \quad (3.7)$$

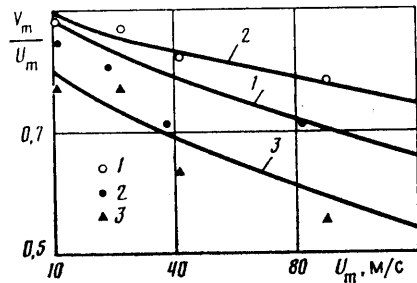
На фиг. 1 показаны экспериментальные данные различных авторов по среднемассовому скольжению фаз при турбулентном течении дисперсных потоков в каналах. Кривые рассчитаны по формуле (3.7), значения κ_1 указаны на фиг. 1, экспериментальные точки 1–10 соответствуют данным [5, 3, 7, 6, 10, 8, 2, 4, 1, 11]. Видно, что результаты различных авторов удовлетворительно коррелируют друг с другом в переменных V_m/U_m , τ_+/R_+ . С ростом параметра инерционности частиц τ_+/R_+ увеличивается среднемассовое скольжение фаз. Уменьшению среднемассовой скорости дисперсной фазы способствует также снижение коэффициента восстановления импульса κ_1 при ударе частиц о поверхность канала.

Относительная скорость частиц при больших скоростях потока несущей фазы может достигать десятков метров в секунду [7, 11]. В этом случае необходимо учитывать зависимость времени динамической релаксации частиц от относительной скорости дисперсной фазы [21]

По формулам (3.3), (3.4) проведены расчеты распределения дискретной фазы по сечению канала. Профиль осредненной скорости несущей фазы задавался в виде степенной функции $\langle U_x(r) \rangle / U_c = (1 - r^0)^{1/n}$ (U_c – максимальное значение скорости, $r^0 = r/R$), показатель n выбирался согласно рекомендациям [22].



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 2 и 3 показаны профили осредненной скорости твердой фазы (штриховые кривые – профили скорости несущей фазы). На фиг. 2 проведено сравнение с данными эксперимента [11] (диаметр трубы $2R = 0,08$ м; кривые 1 и 3 для частиц $d = 23$ мкм, 2 – $d = 88$ мкм). На фиг. 3 результаты расчета сопоставляются с экспериментальными значениями из [6] ($U^0 = \langle U \rangle / U_c$, $V^0 = \langle V \rangle / U_c$; $2R = 0,0245$ м; кривые 1, 3 получены при $U_m = 10$ м/с, кривые 2, 4 – при 18 м/с; для кривых 1, 2 диаметр частиц $d = 81,5$ мкм, для кривых 3, 4 $d = 184$ мкм). Из фиг. 2 и 3 видно, что профиль скорости частиц более наполненный, чем профиль скорости несущего газа, что обусловлено отставанием частиц в ядре течения и отливной от нуля скоростью частиц на стенках канала. С увеличением размера частиц и скорости течения несущего потока твердая фаза в ядре течения в большей степени отстает от жидкой фазы. Эти эффекты иллюстрируются на фиг. 4 и 5. На фиг. 4 представлена зависимость отношения среднемассовых скоростей дискретной и жидкой фаз от диа-

метра частиц (экспериментальные точки из [6], кривые 1, 2 — $U_m=10$ и 18 м/с). Уменьшение отношения V_m/U_m в зависимости от среднemasовой скорости потока показано на фиг. 5 (экспериментальные значения взяты из [5], кривая 1 отвечает $2R=0,0078$ м, кривые 2 и 3 — $2R=-0,0122$ м; для кривых 1 и 2 диаметр частиц $d=32$ мкм, а для кривой 3 $d=70$ мкм).

Таким образом, предложен вероятностный подход к описанию гидродинамики дисперсных турбулентных потоков в каналах.

В заключение отметим, что в обеспечении устойчивого пневмотранспорта частиц существенную роль играет сила Магнуса, возникающая в результате вращения частиц, приобретаемого при столкновении со стенкой [14]. Влияние этой силы на движение дисперсной фазы может быть исследовано в рамках статистического подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mehta N. C., Smith J. M., Comings E. W. Pressure drop in air-solid flow systems // *Industr. and Eng. Chem.* 1957. V. 49. № 6. P. 986–992.
2. Doig I. D., Roper G. H. Air velocity profiles in the presence of cocurrently transported particles // *Industr. and Engng Chem. Fundament.* 1967. V. 6. № 2. P. 247–256.
3. Палеев И. И., Агафонова Ф. А., Дымант Л. Н. Распределение концентраций и скоростей твердых частиц в турбулентном воздушно-пылевом потоке // *Теплофизика высоких температур.* 1970. Т. 8. № 2. С. 457–458.
4. Сукодел А. С., Цветков Ф. Ф., Керимов Р. В. Теплообмен и гидравлическое сопротивление при движении газозвеси в трубах. М.: Энергия, 1977. 193 с.
5. Злобин В. В. Экспериментальное исследование течения смеси газа и частиц в трубе // *Инж.-физ. журн.* 1977. Т. 33. № 4. С. 611–616.
6. Munakata T., Matsuda A., Hirai N. et al. Velocity of solid particles entrained with reduced-pressure air flow in horizontal duct // *J. Chem. Eng. Jap.* 1977. V. 10. № 5. P. 355–360.
7. Баланин Б. А., Злобин В. В. Экспериментальное исследование аэродинамического сопротивления простых тел в двухфазном потоке // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1979. № 3. С. 159–162.
8. Дурст Ф. Комбинированные измерения скорости, распределения по размерам и концентрации частиц (обзор) // *Теорет. основы инж. расчетов.* 1982. Т. 104. № 3. С. 100–113.
9. Tsuji Y., Morikawa Y. LDV measurements of an air-solid two-phase flow in a horizontal pipe // *J. Fluid Mech.* 1982. V. 120. P. 385–409.
10. Tsuji T., Morikawa Y., Shiomi H. LDV measurements of an air-solid two-phase flow in a vertical pipe // *J. Fluid. Mech.* 1984. V. 139. P. 417–434.
11. Баланин Б. А., Меладзе С. А., Чурухин В. А. Формирование двухфазной струи при ее истечении из трубы // *Газодинамика и теплообмен.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. № 9.
12. Медников Е. П. Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей. М.: Наука, 1981.
13. Owen P. R. Pneumatic transport // *J. Fluid Mech.* 1969. V. 39. № 2. P. 407–432.
14. Шрайбер А. А., Милютин В. Н., Яценко В. П. Гидромеханика двухкомпонентных потоков с твердым полидисперсным веществом. Киев: Наук. думка, 1980. 249 с.
15. Friedlander S. K., Johnstone H. F. Deposition of suspended particles from turbulent gas streams // *Industr. and Engng Chem.* 1957. V. 49. № 7. P. 1151–1156.
16. Менгюторк, Свердруп. Теория осаждения мелких частиц в двумерных пограничных слоях и ее применение к газовым турбинам // *Энерг. машины и установки.* 1982. Т. 104. № 1. С. 47–56.
17. Деревич И. В., Зайчик Л. И. Осаждение частиц из турбулентного потока // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1988. № 5. С. 96–104.
18. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.
19. Деревич И. В., Ерошенко В. М., Зайчик Л. И. Влияние частиц на интенсивность турбулентного переноса запыленного газа // *Инж.-физ. журн.* 1983. Т. 45. № 4. С. 554–560.
20. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 830 с.
21. Алгимов А. П., Папырин А. Н., Предкин А. Л., Солухин Р. И. Экспериментальное исследование эффекта скоростного отставания частиц в сверхзвуковом потоке газа // *ПМТФ.* 1977. № 4. С. 80–88.
22. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.I.1989