

УДК 532.526.31.013.4

© 1990 г.

РУБАН А. И.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ИСКРИВЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрено развитие волновых пакетов, возбуждаемых в пограничном слое с помощью локальной деформации обтекаемой поверхности в режиме продольно-поперечного взаимодействия. Решение линеаризованной системы уравнений теории взаимодействия построено с использованием преобразования Лапласа по времени и преобразования Фурье по пространственным переменным. Отдельно рассмотрены две задачи. В первой из них возмущения индуцируются синусоидальной в поперечном направлении деформацией поверхности. Показано, что центр волнового пакета с наибольшей амплитудой колебаний перемещается против потока в пограничном слое. Одновременно происходит его расширение, приводящее к тому, что в области растущих колебаний с течением времени попадает любая фиксированная точка пространства. Во второй задаче источник возмущений изолированный. В этом случае волновой пакет приобретает подковообразную форму. Расширяясь, он переносит возмущения от источника во всех направлениях, в том числе и против потока жидкости в пограничном слое.

Ламинарно-турбулентный переход начинается с преобразования внешних возмущений — вибраций обтекаемой поверхности, акустических волн, турбулентности набегающего потока и т.п. — в собственные колебания пограничного слоя — волны Толлмина — Шлихтинга. Этот процесс, так же как и последующее развитие волн Толлмина — Шлихтинга в пограничном слое, обычно исследуется в моногармоническом приближении. Между тем в условиях «естественного» перехода внешние возмущения характеризуются широким спектром частот, и это различие весьма существенно. Дело в том, что поведение волнового пакета может не только количественно, но и качественно отличаться от поведения простых волн, составляющих пакет.

Как свидетельствуют экспериментальные наблюдения [1], при прочих равных условиях эволюция волнового пакета приводит к более раннему ламинарно-турбулентному переходу по сравнению с одиночной волной Толлмина — Шлихтинга. Это различие объясняется в [2] нелинейными эффектами, а точнее говоря, особенностями распределения напряжений Рейнольдса в волновом пакете. По мнению авторов работы [3], взрывной характер перехода в волновом пакете связан с непрерывностью спектра комбинационных тонов, которые, согласно опытным данным [4], имеют тенденцию к бурному росту, начиная с определенного значения амплитуды. Следует, однако, иметь в виду, что своеобразие волнового пакета может проявляться уже на линейной стадии его развития. Цель настоящей работы — продемонстрировать такую возможность.

1. Постановка задачи. Пусть в двумерный стационарный пограничный слой, образующийся в потоке несжимаемой жидкости на поверхности твердого тела, начиная с определенного момента времени, вносятся пространственные возмущения. Для простоты предположим, что причиной их появления служит локальная деформация обтекаемой поверхности. Ее размеры выберем в соответствии с теорией продольно-поперечного взаимодействия [5], т. е. будем считать, что протяженность неровности является величиной порядка $Re^{-3/4}$, поперечный размер оценивается как $O(Re^{-3/4})$, а высота — как $O(Re^{-1/4})$. Число Рейнольдса считается здесь закритическим и используется в качестве большого параметра при асимптотическом анализе уравнений Навье — Стокса. Результат этого анализа состоит в том, что окрестность неровности, если ее рассматривать с точки зрения метода сращиваемых асимптотических разложений, должна быть разделена на три характерные области. Первая из них — вязкая область, примыкающая к стенке и имеющая толщину порядка $Re^{-1/2}$. Здесь течение

жидкости подчиняется уравнениям Прандтля для пространственного пограничного слоя с отброшенным градиентом давления в продольном уравнении импульсов. Основной вклад вязкого слоя в процесс взаимодействия — это оттеснение или «притяжение» струек тока к обтекаемой поверхности за счет стекания или растекания жидкости в поперечном направлении.

Вторая характерная область имеет толщину порядка $Re^{-1/2}$ и включает в себя все струйки тока из невозмущенного пограничного слоя перед неровностью, за исключением пристеночных. Течение жидкости сохраняет здесь свои обычные свойства, известные из теории свободной взаимодействия (см., например, [6]): возмущения скорости, а следовательно, и толщины струек тока в основной части пограничного слоя являются незначительными и не приводят к дополнительному изменению толщины вытеснения пограничного слоя как целого. Геометрически это выражается в том, что каждая линия тока в рассматриваемой области повторяет по форме лежащую ниже нее.

Третья характерная область, а ее толщина оценивается как $O(Re^{-3/4})$, расположена в потенциальном потоке вне пограничного слоя. Она служит для преобразования возмущений формы линий тока в возмущения давления на внешней границе пограничного слоя. Чтобы определить давление в вязкой пристеночной области, необходимо еще учесть его изменение поперек пограничного слоя. Этот эффект, связанный с действием центробежных сил, играет в режиме продольно-поперечного взаимодействия столь же существенную роль, что и индукция давления во внешнем потенциальном потоке за счет его реакции на вытесняющее действие пограничного слоя.

Пусть деформируемый участок поверхности обтекаемого тела задан уравнением $Y=F(T, X, Z)$. Здесь, как и в стационарной теории [5], используется ортогональная криволинейная система координат, в которой X отсчитывается вдоль обтекаемой поверхности, каковой она была бы при отсутствии неровности, Y — по нормали к этой поверхности, а Z — в поперечном направлении. Независимые переменные и искомые функции течения обезразмерены таким образом, что все они являются величинами порядка единицы в вязкой пристеночной области течения. В частности, масштабы пространственных переменных выбраны совпадающими с характерными размерами вязкой области: X отнесен к $Re^{-3/4}$, Y — к $Re^{-1/2}$, а Z — к $Re^{-3/4}$. Что касается характерного времени $Re^{-1/2}$, то оно определено как время, затрачиваемое жидкой частицей для пролета над неровностью, при условии, что частица находится в вязкой пристеночной области, где скорость потока является величиной порядка $Re^{-1/4}$. Этот прием широко используется в теории взаимодействия. Он позволяет «включить» нестационарность в наиболее медленном пристеночном слое течения, оставляя основную часть пограничного слоя и внешний потенциальный поток квазистационарными.

Обозначим составляющие вектора скорости по осям X , Y и Z соответственно через U , V и W , а давление — через P . Тогда движение жидкости в вязкой пристеночной области будет подчиняться уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} + W \frac{\partial U}{\partial Z} &= \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial W}{\partial T} + U \frac{\partial W}{\partial X} + V \frac{\partial W}{\partial Y} + W \frac{\partial W}{\partial Z} &= -\frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} &= 0, \quad \frac{\partial P}{\partial Y} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Краевыми условиями для них являются условие прилипания жидкости к твердой поверхности, условие срачивания с решением в невозму-

щенном пограничном слое перед неровностью, а также условие сращивания с решением в основной части пограничного слоя

$$Y=F: U=0, V=\partial F/\partial T, W=0 \quad (1.2)$$

$$X \rightarrow -\infty: U \rightarrow Y, W \rightarrow 0 \quad (1.3)$$

$$Y \rightarrow +\infty: U=Y+A+\dots, W=O(1/Y) \quad (1.4)$$

Функция $A(T, X, Z)$, взятая с обратным знаком, представляет собой изменение толщины вытеснения пристеночного слоя.

Задачу о взаимодействии замыкает выражение для индуцированного градиента давления

$$\frac{\partial P}{\partial Z} = \text{sign}(\kappa_0) \frac{\partial A}{\partial Z} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 A(T, X, s)}{\partial X^2} \frac{ds}{s-Z} \quad (1.5)$$

Оно тождественно совпадает с соответствующим выражением из стационарной теории [5], поскольку обе области, участвующие в формировании градиента давления, — основная часть пограничного слоя и внешний потенциальный поток — являются, как уже указывалось, областями квазистационарного течения. Первое слагаемое в правой части (1.5) обязано своим происхождением действию центробежных сил в основной части пограничного слоя, второе — реакции внешнего потенциального потока на вытесняющее действие пристеночного слоя. Через κ_0 обозначена кривизна обтекаемой поверхности в точке расположения неровности, но при ее отсутствии; κ_0 считается положительным в случае вогнутой поверхности.

Если высота неровности мала по сравнению с толщиной вязкого пристеночного слоя, т. е. $F=hf'(T, X, Z)$, где h — малый параметр, то искомые гидродинамические функции могут быть представлены в виде разложений по степеням h

$$U=Y+hu'+\dots, V=hv'+\dots, W=hw'+\dots, \quad (1.6)$$

$$A=hA'+\dots, P=hp'+\dots$$

Коэффициенты u', v', w' являются функциями T, X, Y, Z , а A' и p' зависят от T, X, Z .

Подставляя (1.6) в уравнения (1.1), (1.5) и краевые условия (1.2) — (1.4), приходим к линейризованной задаче о взаимодействии

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial T} + Y \frac{\partial u'}{\partial X} + v' &= \frac{\partial^2 u'}{\partial Y^2} \\ \frac{\partial w'}{\partial T} + Y \frac{\partial w'}{\partial X} &= -\frac{\partial p'}{\partial Z} + \frac{\partial^2 w'}{\partial Y^2} \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial X} + \frac{\partial v'}{\partial Y} + \frac{\partial w'}{\partial Z} = 0$$

$$\frac{\partial p'}{\partial Z} = \text{sign}(\kappa_0) \frac{\partial A'}{\partial Z} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 A'(T, X, s)}{\partial X^2} \frac{ds}{s-Z}$$

$$X \rightarrow -\infty: u' \rightarrow 0, w' \rightarrow 0$$

$$Y=0: u' = -f', v' = \frac{\partial f'}{\partial T}, w' = 0$$

$$Y \rightarrow +\infty: u' \rightarrow A', w' = O(Y^{-1})$$

2. Собственные колебания пограничного слоя. Положим f' тождественно равным нулю и представим решение задачи (1.7) в форме простой волны

$$\{u', v', w', p', A'\} = e^{ikx + ilz + \omega T} \{u_0(Y), v_0(Y), w_0(Y), p_0, A_0\}$$

где компоненты волнового вектора k и l считаются действительными, а ω — комплексным.

Условие существования нетривиального решения (его можно получить с помощью приема, предложенного в [7]) выражается в форме дисперсионного соотношения

$$(ik)^{3/2} Ai'(z_0) + l^2 \left[\text{sign}(\kappa_0) + \frac{k^2}{|l|} \right] \int_{z_0}^{\infty} Ai(z) dz = 0, \quad z_0 = \frac{\omega}{(ik)^{1/2}} \quad (2.1)$$

которое определяет ω как функцию k и l . Аналитическая ветвь $(ik)^{1/2}$ выделяется здесь, исходя из неравенства $|\arg(ik)| < \pi$; для функции Эйри принято ее обычное обозначение $Ai(z)$.

Легко убедиться, что любое решение уравнения (2.1) удовлетворяет свойствам симметрии: изменение знака l не меняет ω , а изменение знака k переводит ω в комплексно-сопряженную величину. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением лишь положительных значений k и l .

Предположим далее, что обтекаемая поверхность является вогнутой: $\kappa_0 > 0$. Тогда преобразования

$$k_* = \frac{k}{(l^2 + lk^2)^{1/2}}, \quad \omega_* = \frac{\omega}{(l^2 + lk^2)^{1/2}} \quad (2.2)$$

позволяют свести (2.1) к

$$(ik_*)^{3/2} Ai'(z_0) + \int_{z_0}^{\infty} Ai(z) dz = 0, \quad z_0 = \frac{\omega_*}{(ik_*)^{1/2}} \quad (2.3)$$

так, что ω_* оказывается функцией одного аргумента k_* .

Анализ дисперсионного соотношения (2.3) начнем с исследования асимптотического поведения его корней при $k_* \rightarrow +0$. Здесь имеются две возможности. Во-первых, z_0 может стремиться к конечной точке и тогда ее положение в комплексной плоскости должно определяться из условия обращения в нуль интеграла от функции Эйри. Этому условию удовлетворяет счетное множество точек, расположенных в левой полуплоскости переменного z_0 по обе стороны от действительной оси, причем каждой точке из верхней полуплоскости соответствует комплексно-сопряженная точка, лежащая в нижней полуплоскости.

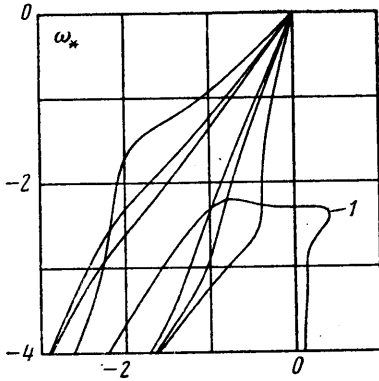
Вторая возможность заключается в том, что $|z_0|$ неограниченно возрастает при $k_* \rightarrow +0$. Используя асимптотическое представление функции Эйри при больших значениях аргумента (см., например, [8]), нетрудно установить, что уравнение (2.3) действительно допускает решение, обладающее этим свойством

$$z_0 = (ik_*)^{-3/2} - (ik_*)^{3/2} + \dots, \quad k_* \rightarrow +0 \quad (2.4)$$

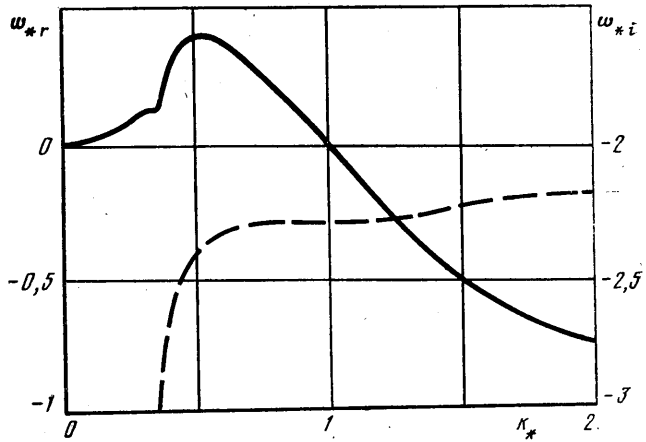
Его поведение при конечных k_* определялось численно с использованием для решения уравнения (2.3) метода Ньютона. При этом значения функции Эйри, ее производной и интеграла находились в результате решения задачи Коши для уравнения Эйри вдоль отрезка прямой, соединяющего начало координат с рассматриваемой точкой z_0 в комплексной плоскости. Начальное значение параметра k_* было выбрано равным 0,15, а нулевое приближение для z_0 задавалось в соответствии с формулой (2.4). Итерационный процесс продолжался до тех пор, пока изменение z_0 не становилось меньше 10^{-6} . Далее параметр k_* увеличивался и вычисления повторялись снова.

Результаты расчета представлены на фиг. 1 в плоскости комплексного переменного $\omega_* = \omega_{*r} + i\omega_{*i}$. Цифрой 1 здесь обозначен неустойчивый корень. Именно он обладает асимптотикой (2.4), которая, будучи записана в виде

$$\omega_{*r} = \frac{k_*^{1/2}}{\sqrt{2}} + \dots, \quad \omega_{*i} = -\frac{1}{k_*} - \frac{k_*^{1/2}}{\sqrt{2}} + \dots \quad (2.5)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

определяет поведение правой ветви этого корня в плоскости ω_* . Реальная его часть ω_{*r} остается положительной вплоть до $k_* = 0,9994$. Затем он переходит в левую полуплоскость и при $k_* \rightarrow \infty$ ведет себя как

$$\omega_{*r} = 1/2 z_0 k_*^{-2} + \dots, \quad \omega_{*i} = \sqrt{3}/2 z_0 k_*^{-2} + \dots$$

Здесь через z_0 обозначен первый корень уравнения $Ai'(z_0) = 0$. Как известно, производная от функции Эйри обращается в нуль в счетном числе точек, лежащих на отрицательной действительной полуоси. Первая из них, $z_0 = -1,0188$, связана с неустойчивым корнем дисперсионного соотношения (2.3), а остальные являются конечными точками траекторий устойчивых корней. Свое начало они берут в точках с нулевым значением интеграла от функции Эйри и в зависимости от того, где располагаются эти точки, в верхней полуплоскости, или в нижней, подразделяются на два семейства. Каждое из них представлено на фиг. 1 тремя первыми корнями.

Подводя итог проведенному анализу, обратим внимание на одно важное свойство неустойчивого корня (фиг. 2). В окрестности точки с максимальным значением ω_{*r} , его мнимая часть ω_{*i} (она изображена на фиг. 2 пунктирной линией) возрастает с увеличением k_* , так, что групповая скорость $D = -d\omega_{*i}/dk_*$ в этой точке оказывается отрицательной: $D = -0,9355$.

3. Волновой пакет. Появление волнового пакета в пограничном слое может быть вызвано различными причинами. Рассмотрим случай, когда он образуется в результате реакции потока на локальную деформацию обтекаемой поверхности.

Пусть вплоть до момента времени $T=0$ деформация поверхности отсутствует и поток в пограничном слое остается невозмущенным. Тогда начальное условие может быть записано в виде

$$T=0: u' = v' = w' = p' = A' = 0 \quad (3.1)$$

Предположим также, что в любой конечный момент времени $T > 0$ возмущения затухают на большом расстоянии от своего источника, т. е. функции u' , v' , w' , p' и A' стремятся к нулю при $X^2 + Z^2 \rightarrow \infty$. Это дополнительное требование замыкает формулировку задачи Коши для уравнений теории продольно-поперечного взаимодействия (1.7).

Прежде чем переходить к ее решению, обратим внимание на следующее обстоятельство. Неустойчивый корень дисперсионного соотношения (2.1) имеет реальную часть, которая в соответствии с (2.2), (2.5) неограниченно возрастает при фиксированном l и $k \rightarrow \infty$: $\text{Re} \omega = (k/2l)^{1/2} + \dots$. Следовательно, рассматриваемая задача не является корректно поставленной.

Заметим далее, что теория продольно-поперечного взаимодействия описывает эволюцию вихрей Гертлера в пограничном слое [9]. Поэтому имеет смысл рассмотреть периодическую по координате Z деформацию обтекаемой поверхности

$$f(T, X, Z) = e^{iz} f(T, X) \quad (3.2)$$

В этом случае задачу Коши можно перевести в разряд корректно поставленных задач с помощью приема, предложенного в [10]. Он состоит в преобразовании масштабов гидродинамических функций

$$\begin{aligned} u' &= d^{1/2} u^0, \quad v' = d^{-1/2} v^0, \quad w' = d^{1/2} w^0 \\ p' &= d^{1/2} p^0, \quad A' = d^{1/2} A^0, \quad T = d^{1/2} T^0 \\ X &= dX^0, \quad Y = d^{1/2} Y^0, \quad Z = d^{1/2} Z^0, \quad f' = d^{1/2} f^0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

которое сохраняет неизменными все уравнения и краевые условия задачи (1.7), (3.1), за исключением выражения для давления. При больших значениях d оно принимает вид

$$p' = \text{sign}(\kappa_0) A' \quad (3.4)$$

Теперь параметр l в (3.2) можно без уменьшения общности принять равным единице. Дело в том, что задача о взаимодействии (1.7), в которой выражение для давления заменено на (3.4), является инвариантной относительно аффинных преобразований (3.3). Поэтому поперечный масштаб возмущенной области течения может быть выбран произвольно.

Представим решение задачи о взаимодействии в виде разложения в интегралы Лапласа по времени T и Фурье по продольной координате X , так что, например

$$u'(T, X, Y, Z) = \frac{e^{iz}}{4\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} u^*(\omega, k, Y) e^{\omega T + ikX} d\omega.$$

Изображения функций v' , w' , p' , A' и f' , введенные аналогичным образом, обозначим через v^* , w^* , p^* , A^* и f^* соответственно. Тогда вместо (1.7), (3.1), (3.4) будем иметь систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\omega u^* + ikY u^* + v^* = \frac{d^2 u^*}{dY^2}, \quad \omega w^* + ikY w^* = -ip^* + \frac{d^2 w^*}{dY^2}$$

$$iku^* + \frac{dv^*}{dY} + i\omega v^* = 0, \quad p^* = \text{sign}(\kappa_0) A^*$$

$$Y=0: u^* = -f^*, \quad v^* = \omega f^*, \quad w^* = 0$$

$$Y=\infty: u^* = A^*, \quad w^* = 0$$

Ее решение (оно может быть построено по схеме, предложенной в [7]) позволяет установить, что при $\kappa_0 > 0$ изображение давления

$$p^*(\omega, k) = - \frac{(ik)^{1/2} \text{Ai}'(z_0) f^*(\omega, k)}{Q(\omega, k)} \quad (3.5)$$

$$Q(\omega, k) = (ik)^{1/2} \text{Ai}'(z_0) + \int_{z_0}^{\infty} \text{Ai}(z) dz, \quad z_0 = \frac{\omega}{(ik)^{1/2}}$$

Положим для определенности

$$f(T, X) = (1 - e^{-\lambda T}) g(X), \quad f^*(\omega, k) = \frac{\lambda g^*(k)}{\omega(\omega + \lambda)} \quad (3.6)$$

где λ — положительная постоянная, и применим к (3.5) обратное преобразование Лапласа, выделив отдельно член, содержащий особенность в точке $\omega=0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} p^*(\omega, k) e^{\omega T} d\omega = & -(1-e^{-\lambda T}) \frac{(ik)^{5/3} g^*(k)}{(ik)^{5/3} - a_0^{-2}} - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left[\frac{(ik)^{5/3} \text{Ai}'(z_0)}{Q(\omega, k)} - \frac{(ik)^{5/3}}{(ik)^{5/3} - a_0^{-2}} \right] f^*(\omega, k) e^{\omega T} d\omega \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь $a_0 = \sqrt[3]{3|\text{Ai}'(0)|}$, через $g^*(k)$ обозначено фурье-изображение функции $g(X)$ из (3.6). Интегрирование в (3.7) должно выполняться вдоль линии $\text{Re}\omega = a$, положение которой в комплексной плоскости ω определяется особенностями подынтегрального выражения. Поскольку условие $Q(\omega, k) = 0$ равносильно дисперсионному соотношению (2.3), то эту линию следует провести правее траектории неустойчивого корня. Напомним, что на фиг. 1 изображена лишь половина этой траектории, построенная для $k > 0$. Переход к отрицательным значениям k сопровождается ее зеркальным отражением относительно действительной оси.

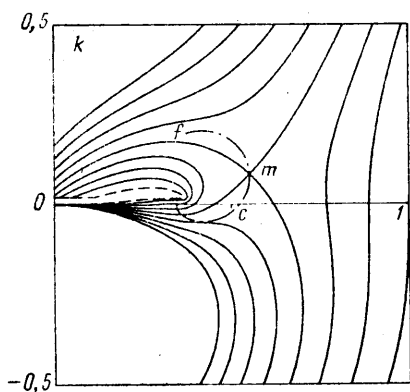
Воспользовавшись теоремой о вычетах, можно перейти к интегрированию по контуру C , который состоит из двух лучей, лежащих симметрично во втором и третьем квадрантах между мнимой осью и устойчивыми корнями. При этом для каждого значения параметра k вычет должен определяться в соответствующей точке траектории неустойчивого корня $\omega_1(k)$. В результате вместо (3.7) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} p^*(\omega, k) e^{\omega T} d\omega = & -(1-e^{-\lambda T}) \frac{(ik)^{5/3} g^*(k)}{(ik)^{5/3} - a_0^{-2}} - \\ & - \frac{(ik)^{7/3} \text{Ai}'(z_0) f^*[\omega_1(k), k]}{[ik\omega_1(k) - 1] \text{Ai}(z_0)} e^{\omega_1(k)T} + I_C \end{aligned} \quad (3.8)$$

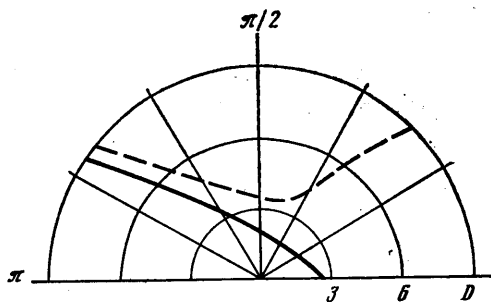
Интеграл по контуру C удовлетворяет условиям леммы Ватсона (см., например, [11]); из нее следует, что $I_C = O(1/T)$. Поэтому, считая время T достаточно большим, ограничимся двумя первыми членами в соотношении (3.8). Осталось выполнить обратное преобразование Фурье, и тогда возмущение давления запишется в виде

$$\begin{aligned} p'(T, X, Z) = & - \frac{e^{iz}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(ik)^{5/3} g^*(k)}{(ik)^{5/3} - a_0^{-2}} e^{ikx} dk - \\ & - \frac{e^{iz}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(ik)^{7/3} \text{Ai}'(z_0) f^*[\omega_1(k), k]}{[ik\omega_1(k) - 1] \text{Ai}(z_0)} e^{\omega_1(k)T + ikx} dk \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $z_0 = \omega_1(k) (ik)^{-2/3}$. Первое слагаемое в правой части (3.9) не зависит от времени и, как было показано в [10], может быть получено в результате формального применения метода преобразований Фурье к стационарной задаче (1.7), (3.4). Вместе с тем его нельзя получить как предельное решение нестационарной задачи. Чтобы убедиться в этом, исследуем асимптотическое поведение второго интеграла в (3.9) при $T \rightarrow \infty$. Запишем показатель экспоненты как $TS(k)$, где $S(k) = \omega_1(k) + ikD$, $D = X/T$, и воспользуемся методом перевала [11]. В соответствии с этим методом контур интегрирования в (3.9) необходимо деформировать та-



Фиг. 3



Фиг. 4

ким образом, чтобы он проходил через перевальную точку. Ее положение в комплексной плоскости k зависит от D и определяется из уравнения

$$d\omega_1/dk = -iD \quad (3.10)$$

которое должно решаться совместно с дисперсионным соотношением (2.3). Результаты расчета, выполненного с использованием метода Ньютона, представлены на фиг. 3. Здесь изображена лишь правая половина комплексной плоскости k . Чтобы продолжить решение в левую полу-плоскость, следует воспользоваться правилом симметрии. Из (2.3) нетрудно заключить, что зеркальное отражение точки k относительно мнимой оси приводит к замене $\omega_1(k)$ на комплексно-сопряженную величину.

Точка c , лежащая на действительной оси, соответствует «центру» волнового пакета. Как уже указывалось, он движется против основного течения в пограничном слое со скоростью $D = -0,9355$. Инкремент роста возмущений $\gamma = \text{Re}\omega_1 - D \text{Im}k$ достигает здесь своей максимальной величины: $0,4128$. При увеличении D перевальная точка поднимается над действительной осью, описывая в верхней полуплоскости путь, изображенный на фиг. 3 штрихпунктирной кривой. По мере удаления от точки c инкремент роста возмущений монотонно падает, оставаясь положительным вплоть до точки f , где $\gamma = 0$. Сама эта точка соответствует фронту волнового пакета, который перемещается в направлении движения основного потока в пограничном слое со скоростью $D = 2,1993$. Таким образом, в область неограниченно растущих колебаний с течением времени попадает любая фиксированная точка пространства из рассматриваемой окрестности источника возмущений. Это означает, что пограничный слой на вогнутой поверхности абсолютно неустойчив по отношению к возмущениям рассматриваемого типа.

Предельный переход в (3.9) при T , стремящемся к бесконечности, и фиксированном X связан с решением уравнения (3.10) при нулевом значении групповой скорости D . В этом случае точка перевала совпадает с точкой m на фиг. 3, о чем можно судить по конфигурации линий постоянного уровня функции $\text{Re}\omega_1$. Сплошные линии соответствуют нулевому и положительным ее значениям, а штриховые — отрицательным. Все они построены с соблюдением одинакового интервала значений $\text{Re}\omega_1$, величина которого выбрана с таким расчетом, чтобы третий положительный уровень совпадал с уровнем в точке перевала, где $\gamma = \text{Re}\omega_1 = 0,3784$.

При уменьшении D перевальная точка спускается в нижнюю полу-плоскость, а затем вновь пересекает действительную ось в точке второго максимума $\text{Re}\omega_1$ (фиг. 2). Далее она входит в промежуток между двумя точками ветвления $k_1 = 0,371 + i0,018$ и $k_2 = 0,295 + i0,045$ функции $\omega_1(k)$

и построение перевальнойго контура становится невозможным. Это обстоятельство служит препятствием для определения скорости распространения переднего фронта волнового пакета. В данном случае он, по всей видимости, не является четко выраженным.

4. Изолированный источник. Для исследования эволюции возмущений, индуцируемых изолированным источником, вернемся к задаче (1.7) и предположим, что функция $f'(X, Z)$ стремится к нулю не только при $|X| \rightarrow \infty$, но и при $|Z| \rightarrow \infty$. Напомним, что эта задача не является корректно поставленной. Ее решение можно построить лишь при специальном выборе формы деформированного участка обтекаемой поверхности, исключающем появление высокочастотных гармоник [12]. Такой подход, будем надеяться, позволяет правильно предсказать основные свойства пограничного слоя и в более общем случае. Имея это в виду, приступим к формальному решению задачи (1.7), (3.1).

Применим к (1.7), (3.1) двойное преобразование Фурье по координатам X, Z и преобразование Лапласа по времени T . Тогда после обратного преобразования Лапласа получим вместо (3.9) следующее выражение:

$$p'(T, X, Z) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k, l) e^{\omega_1(k, l) + ikX + ilZ} dl \quad (4.1)$$

где $\omega_1(k, l)$ — неустойчивый корень дисперсионного соотношения (2.1). Конкретный вид функции $\varphi(k, l)$ не используется в дальнейших рассуждениях и поэтому здесь не приводится.

Перейдем в (4.1) к полярным координатам $X = r \cos \varphi$, $Z = r \sin \varphi$ и выполним замену переменных интегрирования

$$k = \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi, \quad l = \xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi$$

Тогда (4.1) переписется в виде

$$p'(T, X, Z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi r} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, \eta) e^{T\Omega_1(\xi, \eta)} d\eta, \quad \Omega_1(\xi, \eta) = \omega_1[l(\xi, \eta), k(\xi, \eta)] \quad (4.2)$$

При больших значениях T внутренний интеграл в (4.2) можно оценить с помощью метода перевала. Чтобы сделать это, необходимо для каждого действительного ξ найти такую точку $\eta_0(\xi)$ в комплексной плоскости η , что

$$\eta = \eta_0: \partial\Omega_1/\partial\eta = 0 \quad (4.3)$$

Ограничиваясь главным членом разложения при $T \rightarrow \infty$, будем иметь

$$p' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(\xi)}{\sqrt{T}} \exp\{T[\Omega_1(\xi, \eta_0(\xi)) + i\xi D_r]\} d\xi, \quad D_r = \frac{r}{T}$$

Перейдем теперь в комплексную плоскость ξ и найдем в ней точку перевала ξ_0 , для которой

$$\xi = \xi_0: \partial\Omega_1/\partial\xi = -iD_r \quad (4.4)$$

В результате получим, что при больших значениях T возмущение давления ведет себя как

$$p' = \frac{\Lambda}{T} \exp\{T[\Omega_1(\xi_0, \eta_0) + i\xi_0 D_r]\}$$

где коэффициент Λ зависит от угла φ и радиальной групповой скорости D_r .

Задача, таким образом, заключается в том, чтобы для каждой пары действительных φ и D_r найти решение ξ_0, η_0 системы уравнений (4.3), (4.4), (2.1) и по нему определить инкремент роста возмущений $\gamma = \text{Re } \Omega_1(\xi_0, \eta_0) - D_r \text{Im } \xi_0$. Результаты соответствующих расчетов приведены на фиг. 4 в форме зависимости D_r от φ для фронта волнового пакета (сплошная кривая), на котором $\gamma = 0$, и для его гребня (пунктирная кривая). Последний определялся по максимуму зависимости γ от D_r при заданном значении угла φ .

Между фронтом волнового пакета и началом системы координат лежит область затухающих колебаний ($\gamma < 0$), так что с течением времени волновой пакет отделяется от своего источника, приобретая подковообразную форму. При этом возмущения распространяются не только в направлении движения жидкости в пограничном слое, но и против потока. Исключение составляет расположенный непосредственно перед источником сектор с углом при вершине около 60° .

Распространение возмущений против потока, так же как и абсолютная неустойчивость пограничного слоя по отношению к периодическим по Z колебаниям, обязаны своим происхождением явлению продольно-поперечного взаимодействия. Основную роль в нем играет перепад давления поперек пограничного слоя, связанный с кривизной обтекаемой поверхности. Этот эффект обычно не принимается во внимание при анализе устойчивости пограничного слоя. Он действительно является слабым, если речь идет о возмущениях в форме простых волн. Однако для волновых пакетов он оказывается существенным и, как было показано выше, приводит к процессам, стимулирующим переход в пограничном слое.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gaster M. On wave packets in laminar boundary layers // Laminar-Turbulent Transition. Symp., Stuttgart. 1979. Berlin e. a. 1980. P. 14–16.
2. Gaster M. Propagation of linear wave packets in laminar boundary layers // AIAA Journal. 1981. V. 19. № 4. P. 419–423.
3. Рыжов О. С., Савенков И. В. Асимптотическая теория волнового пакета в пограничном слое на пластинке // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 5. С. 820–828.
4. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Нелинейное развитие волны в пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 3. С. 49–58.
5. Рожко С. Б., Рубан А. И. Продольно-поперечное взаимодействие в трехмерном пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 42–50.
6. Сычев В. В., Рубан А. И., Сычев В. В., Королев Г. Л. Асимптотическая теория отрывных течений. М.: Наука, 1987. 255 с.
7. Жук В. И., Рыжов О. С. Об устойчивости свободно взаимодействующего пограничного слоя // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 552–563.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. М.: Наука, 1979. 830 с.
9. Тимошин С. Н. Асимптотический анализ пространственно-неустойчивого спектра вихрей Гертлера // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989.
10. Рожко С. Б., Рубан А. И., Тимошин С. Н. Взаимодействие пространственного пограничного слоя с вытянутым препятствием // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 1. С. 39–48.
11. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
12. Ruzhov O. S., Smith F. T. Short-length instabilities, breakdown and initial value problems in dynamic stall // Mathematika. 1984. V. 31. № 2. P. 163–177.

Москва

Поступила в редакцию
28.XI.1988