МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1990

УДК 532.526.2

БУРДЭ Г. И.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Точные решения уравнений пограничного слоя удается получить в замкнутой форме лишь в редких случаях. В основном это автомодельные решения, для которых соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение интегрируется точно. В данной работе для двумерных стационарных пограничных слоев рассмотрены решения более общего вида, содержащие в выражениях для функции тока и автомодельной переменной аддитивные функции продольной координаты x. Это позволяет расширить круг задач, решения которых представляются аналитическими выражениями, причем в ряде случаев удается получить их в виде выражений, содержащих произвольные функции x, что дает возможность различных интерпретаций решения. Для введения произвольных функций в решения уравнений осесимметричного пограничного слоя задача сводится к переопределенной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот метод может иметь и более широкую сферу применения.

1. Будем искать решения уравнений плоского стационарного пограничного слоя несжимаемой жидкости в виде

$$\psi=\alpha(x)+\mu(x)\varphi(\xi),\quad \xi=\frac{y}{\beta(x)}+q(x)$$
$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.1}$$

Здесь ψ — функция тока, u и v — продольная и поперечная компоненты скорости. Подставляя (1.1) в уравнения пограничного слоя, придем к следующему соотношению:

$$\mu'\beta(\varphi'^2-\varphi\varphi'')-\mu\beta'\varphi'^2-\alpha'\beta\varphi''=R(x)+\nu\varphi''' \tag{1.2}$$

$R=UU'\beta^3\mu^{-1}$.

Здесь $U(x)$ — скорость внешнего потенциального течения.

Требуя, чтобы (1.2) сводилось к обыкновенному дифференциальному уравнению для $\varphi(\xi)$, получим

$$\mu'\beta=\text{const},\ \mu\beta'=\text{const},\ \alpha'\beta=\text{const},\ R=\text{const} \tag{1.3}$$

Эти соотношения налагают достаточно жесткие ограничения на вид функций μ, β, α, U. Для решений с $\alpha=0$ это требование приводит к степенным либо экспоненциальным зависимостям $\mu(x)$, $\beta(x)$, $U(x)$ [1].

Функция $q(x)$ не входит в (1.2), (1.3) и поэтому может оставаться произвольной. Таким образом, выбор выражения для переменной ξ в виде (1.1) позволяет ввести в решение произвольную функцию продольной координаты.

Рассмотрим дополнительные возможности, предоставляемые выбором выражения для ψ в форме (1.1). В общем случае введение функции $\alpha(x)$ в решение эквивалентно переопределению $\varphi(\xi)$, поскольку из (1.3) следует $\alpha=c_1\mu+c_2$ (c_1 и c_2 — постоянные). Исключением являются два частных случая, рассматриваемые ниже.

Первый из этих случаев соответствует $\mu=\text{const}$. Полагая без ограничения общности $\mu=1$, из (1.3) получим

$$\alpha=a\ln x,\ \beta=x,\ U=c/x \tag{1.4}$$

$$f'''+kf''+f'^2-1=0,\quad k=a/\sqrt{|c|\nu} \tag{1.5}$$

$$f=\varphi/\sqrt{|c|\nu},\ \eta=\sqrt{|c|/\nu}\,\xi$$

где a и c — постоянные.

При определенном соотношении между величинами a, c, ν решение уравнения (1.5) получается в квадратурах. Производя в (1.5) замену переменных

$$\begin{gathered} f'=z^n w(z)+1,\ z=e^\eta \\ z^2w''+(2n+1+k)zw'+(n^2+kn+2)w+z^nw^2=0 \end{gathered} \tag{1.6}$$

найдем , что в случае

$$k=\pm 5/\sqrt{3},\ n=\mp 2/\sqrt{3} \tag{1.7}$$

уравнение для w допускает интегрирующий множитель $2z^{-n}w'$ и, таким образом, приводится к следующему:

$$z^{2-n}w'^2+{}^2/_3w^3+A=0$$

Отсюда, полагая постоянную интегрирования A равной нулю, приходим с учетом (1.6), (1.7) к выражению для f' и с использованием (1.4), (1.7), (1.1), (1.5) — к выражениям для компонент скорости

$$f'=1-2[B\exp(\pm\eta/\sqrt{3})+1]^{-2} \tag{1.8}$$

$$u=|c|x^{-1}f'(\eta),\ \eta=\sqrt{|c|/\nu}\,[yx^{-1}+q(x)]$$

$$v=\mp\frac{5}{\sqrt{3}}\sqrt{|c|\nu}\,x^{-1}+|c|\,[yx^{-2}-q'(x)]f'(\eta)$$

В этих выражениях верхний знак соответствует случаю $c>0$, нижний — случаю $c<0$ $(U=-|c|x^{-1})$.

Второй случай, когда введение функции $\alpha(x)$ в решение не сводится к тривиальному переопределению, $\varphi(\xi)$ соответствует $\mu=\mathrm{const}$ и $\beta=\mathrm{const}$ (полагаем $\mu=\beta=1$), так что соотношения (1.3) дают

$$\alpha=ax,\ U=c \tag{1.9}$$

где a и c — постоянные. Тогда из (1.2) получается линейное уравнение для $\varphi(\xi)$, решение которого приводит с учетом (1.1), (1.9) к следующим выражениям для ψ, u, v:

$$\psi=ax+A\exp\left(-\frac{a\xi}{\nu}\right)+c\xi,\qquad \xi=y+q(x) \tag{1.10}$$

$$u=c-\frac{a}{\nu}A\exp\left(-\frac{a\xi}{\nu}\right),\qquad v=-a-uq'(x)$$

Решения (1.8), (1.10) могут быть использованы для описания пограничных слоев на проницаемых поверхностях. Выражения (1.8) при $q(x)=0$ описывают пограничный слой при внешнем потоке вида $U=c/x$ на поверхности, через которую в случае $c>0$ (течение в диффузоре) производится отсос, а в случае $c<0$ (течение в конфузоре) — вдув жидкости по нормали к поверхности с интенсивностью $v_0=b/x$, где $|b|=5\sqrt{|c|\nu/3}$. Постоянная B определяется из условия $f'(0)=0$.

Распределение продольной скорости (1.8), вообще говоря, удовлетворяет условию $u\to U$ при $x\to 0$, однако точка $x=0$ должна быть исключена из рассмотрения (в окрестности источника или стока не выполняются предположения теории пограничного слоя), что снимает вопрос об особенности в выражении для v при $x=0$. Аналогичная ситуация имеет место в задаче о пограничном слое на плоской пластине при отсосе или вдуве, распределенном по закону $v_0=b/x$ [1].

Решение (1.8) показывает возможность формирования путем отсоса жидкости через стенку безотрывного ($f''(0)>0$) пограничного слоя в диффузорном течении, где в обычных условиях отрыв всегда имеет место.

Выражения (1.10) при $q(x)=0$ и постоянной A, определяемой условием $u=0$ при $\xi=0$, дают известное решение [2] (см. также [1]), описывающее обтекание проницаемой плоскости однородным потоком при наличии однородно распределенного отсоса, происходящего по нормали к поверхности.

При $q(x)\neq 0$ (1.10) можно использовать для описания пограничного слоя на проницаемой плоскости при косом отсасывании жидкости через поверхность (здесь не рассматривается тривиальная возможность переопределения постоянной A при $q=0$, позволяющая перейти от решения [2] к однородному косому отсасыванию). Ограничиваясь случаем, когда скорость отсасывания направлена всюду под одним и тем же углом к поверхности $\operatorname{arctg} h$, из (1.10) получим

$$q(x)=-\frac{\nu}{a}\ln\left[\frac{\nu(c-u_0)}{aA}\right] \tag{1.11}$$

$$\nu u_0u_0'+a^2(c-u_0)+ahu_0(c-u_0)=0$$

где $u_0(x)$ — скорость на поверхности ($v_0=hu_0$). Интеграл уравнения для u_0 представляется в виде ($m\neq -1$)

$$\left|\frac{u_0}{c}+\frac{1}{m}\right|^{1/(m+1)}\left|\frac{u_0}{c}-1\right|^{m/(m+1)}=He^{ahx/\nu},\qquad m=\frac{hc}{a}$$

где H — постоянная, $a>0$ из условий при $y\to\infty$.

В частном случае $m=1$ ($h=a/c>0$, отсасывание под тупым углом к направлению течения) получаем

$$u_0=-c\left(1+H^2\exp\frac{2ahx}{\nu}\right)^{1/2}$$

Соответствующее решение получается комбинацией этого выражения и формул (1.10), (1.11).

Указанные решения (как и [2]) следует рассматривать в качестве асимптотических, реализующихся на достаточно больших расстояниях от края пластины. Толщина пограничного слоя, определяемая по толщине вытеснения $\delta_1=(A/c)\exp(-aq/\nu)$, как и для решения [2], не может быть равной нулю ввиду недостижимости условия $q(x)\to\infty$.

2. Рассмотрим осесимметричные пограничные слои, образующиеся на продольно обтекаемых удлиненных тонких телах вращения: угол между касательной к меридиональному контуру тела и осью тела мал, а толщина пограничного слоя сравнима по величине с поперечным размером тела. Тогда уравнения пограничного слоя имеют вид [3]

$$\begin{gathered}v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_r\frac{\partial v_x}{\partial r}=UU'+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_x}{\partial r}\right)\\ \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}=0\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь x и r — цилиндрические координаты, ось x совпадает с осью тела. Заметим, что для уравнений вида (2.1) преобразование Степанова — Манглера [3] неприменимо и поэтому решения системы (2.1) должны рассматриваться независимо от решений для плоского случая.

Переходя в (2.1) к другим переменным

$$y={}^1/_4r^2,\ u=v_x,\ v={}^1/_2rv_r$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=UU'+\nu\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right),\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{2.2}$$

и отыскивая решение этой системы в виде

$$\psi=\alpha(x)+\mu(x)\varphi(\xi),\qquad \xi=\frac{y}{\beta(x)}+q(x)$$
$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{2.3}$$

получим уравнение

$$\mu'\beta(\varphi'^2-\varphi\varphi'')-\mu\beta'\varphi'^2-\alpha'\beta\varphi''=R(x)+\nu[\beta(\xi\varphi'')'-q\beta\varphi'''] \tag{2.4}$$

где $R(x)$ определено так же, как в (1.2).

Полагая $q=0$, $\alpha\neq0$, снова, как и в разд. 1, можно выделить два случая, когда введение функции $\alpha(x)$ в решение позволяет получить новые результаты.

Если положить

$$\mu=1,\ \beta=\exp(-bx),\ \alpha=\nu ax,\ U=c\exp(bx) \tag{2.5}$$

(2.4) приводится к уравнению для $\varphi'(\xi)$, которое заменой переменных (2.6) преобразуется к виду (2.7)

$$\varphi'=c[1+w(\eta)],\qquad \eta=\frac{c^2}{\nu^2}\xi \tag{2.6}$$

$$(\eta w')'+aw'-k(w^2+2w)=0,\qquad k=\frac{b\nu}{c} \tag{2.7}$$

При $a=-1/2$, используя интегрирующий множитель $2w'$, получим

$$\sqrt{\frac{8k}{3}}\eta^{1/2}+B=\int\frac{dw}{\sqrt{w^3+3w^2+A}}$$

где A и B — постоянные. При $A=0$, обращая это соотношение, придем с использованием (2.6), (2.5), (2.3), (2.2) к выражениям для $\varphi'(\xi)$ и компонент скорости

$$\varphi'=c\left\{3\left[\frac{H\exp(\lambda\sqrt{\xi})-\exp(-\lambda\sqrt{\xi})}{H\exp(\lambda\sqrt{\xi})+\exp(-\lambda\sqrt{\xi})}\right]^2-2\right\},\qquad \lambda=\sqrt{\frac{2bc}{\nu}} \tag{2.8}$$
$$v_x=e^{bx}\varphi',\qquad v_r=1/2e^{bx/2}\sqrt{\xi}(\nu-2b\xi\varphi'),\qquad \xi=\frac{r^2}{4}e^{bx}$$

Если вместо (2.5) положить

$$\mu=1,\ \beta=1,\ \alpha=\nu ax,\ U=\mathrm{const}$$

получим из (2.2) — (2.4)

$$\varphi'=A\xi^{-a}+B,\qquad v_x=A\left(\frac{r}{2}\right)^{-2a}+B,\qquad v_r=-\frac{2\nu a}{r} \tag{2.9}$$

Решение (2.8) описывает пограничный слой на поверхности $r_0=\varepsilon e^{-bx/2}$ при внешнем потоке вида $U=ce^{bx}$ и радиальном вдуве через поверхность, распределенном по закону $v_r=v_0e^{bx/2}$. Здесь $v_0=\nu/\varepsilon$, знаки величин b и c совпадают вследствие вещественности λ в (2.8). Постоянная H определяется из условия $\varphi'=0$ при $\xi=\varepsilon^2/4$.

Это решение можно рассматривать как некоторую промежуточную асимптотику для ситуации, когда тонкое осесимметричное тело с утолщением в центральной части обтекается ускоряющимся потоком (ускорение потока обусловлено внешними причинами: вследствие малости угла наклона поверхности тела к оси изменение его толщины не влияет на распределение $U(x)$). Выражения (2.8) описывают пограничный слой на участке поверхности, достаточно удаленном как от места максимального утолщения, так и от концевой точки тела.

Решение (2.9) соответствует обтеканию однородным потоком бесконечного цилиндра, через поверхность которого производится радиальный отсос жидкости с постоянной скоростью v_0. Определяя постоянные A, B, a из граничных условий, получим выражения, которые представляют собой осесимметричный аналог решения [2]

$$v_x=c\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-v_0r_0/\nu}\right],\qquad v_r=-v_0\frac{r_0}{r}$$

Заметим, что это решение так же, как и [2], является одновременно и точным решением полных уравнений Навье — Стокса.

3. Рассмотрим возможность введения произвольных функций продольной координаты в решения уравнений осесимметричного пограничного слоя. В отличие от плоского случая здесь нельзя оставить функцию q произвольной, поскольку q непосредственно входит в (2.4) (ср. с (1.2)). Ниже используем качественно иной подход к преобразованию (2.4) в обыкновенные дифференциальные уравнения.

Будем удовлетворять соотношению (2.4), разбивая его на два путем комбинирования различных его членов. Выбирая функции α, μ, β, q, U так, чтобы каждое из полученных соотношений сводилось к обыкновенному дифференциальному уравнению, придем к двум уравнениям для одной функции φ. При некоторых способах разбиения удается найти решение такой переопределенной системы. Выражение для функции тока ψ тогда обладает большей общностью, поскольку уменьшаются ограничения, палагаемые на функции α, μ, β, q, так что некоторые из них остаются произвольными.

Рассмотрим один из возможных способов разбиения соотношения (2.4) на два. Пусть в (2.3), (2.4)

$$\mu'=-\nu bq,\ \alpha'=-\nu a,\ R=-\nu kh^2q\beta$$
$$-\mu\beta'+\mu'\beta=-\nu kq\beta \tag{3.1}$$

где a, b, k, h — постоянные. Тогда, собирая в (2.4) отдельно слагаемые, содержащие β и $q\beta$, придем к системе

$$k\varphi'^2-b\varphi\varphi''=kh^2+\varphi''',\ a\varphi''=(\xi\varphi'')' \tag{3.2}$$

Решение второго уравнения имеет вид ($a\neq-1$, 0, 1)

$$\varphi=\frac{A}{a(a+1)}\xi^{a+1}+B\xi+D$$

где A, B, D — постоянные, и удовлетворяет первому уравнению, если

$$a=-2,\quad k=-b,\quad A=-\frac{4}{k},\quad B=h,\quad D=0 \tag{3.3}$$

Таким образом, выражение для $\varphi(\xi)$, удовлетворяющее переопределенной системе (3.2), примет вид

$$\varphi=h\xi+\frac{2}{k}\xi^{-1} \tag{3.4}$$

а решения уравнений (3.1) с учетом (3.3) даются выражениями

$$\alpha=2\nu x,\quad \beta=\frac{\mu^2}{N},\quad U=\frac{hN}{\mu},\quad q=\frac{\mu'}{\nu k} \tag{3.5}$$

где N — постоянная. Выражение для функции тока, полученное на основе

$$\psi=2\nu x+U(x)Q-\frac{6\nu\gamma(x)}{Q}$$
$$U=\frac{H}{F(x)},\quad \gamma=\frac{F^3}{3},\quad Q=\frac{r^2}{4}+\gamma'(x) \tag{3.6}$$
$$H=\frac{hN}{(\nu kN)^{1/3}},\quad F=\frac{\mu}{(\nu kN)^{1/3}}$$

(2.3), (3.4), (3.5), (2.2), представится в виде
где H — произвольная постоянная, $F(x)$ — произвольная функция. Соответствующие выражения для компонент скорости с учетом (2.2) выглядят следующим образом:

$$v_x=U+\frac{6\nu\gamma}{Q^2},\quad v_r=-\frac{2}{r}\left[2\nu+U'Q-\frac{6\nu\gamma'}{Q}+\left(U+\frac{6\nu\gamma}{Q^2}\right)\gamma''\right] \tag{3.7}$$

Это решение уже удовлетворяет граничному условию $v_x\to U$ при $y\to\infty$. При этом в зависимости от вида функции $F(x)$ и величины постоянной H возможны различные сочетания формы тела $r_0(x)$, внешнего течения $U(x)$ и условий на поверхности тела. Для некоторых случаев можно удовлетворить и начальному условию $v_x\to U$ при $x\to 0$ (необходимо, чтобы $F\to\infty$ при $x\to 0$ быстрее, чем $x^{-1/3}$) — в остальных случаях решения следует рассматривать как асимптотические.

В частности, при $F=ax$ формулы (3.6), (3.7) и условия прилипания и непроницаемости $v_x=v_r=0$ при $r=r_0(x)$ дают $r_0=\varepsilon x$, $U=-c/x$, где $\varepsilon=2a^{3/2}$, $c=-\nu/2a^3$. Это решение описывает пограничный слой на тонком конусе, помещенном острием внутрь плоского конфузора (толщина пограничного слоя здесь уменьшается в направлении потока), и, по-видимому, реализуется как асимптотическое при обтекании тонкой концевой части тела вращения.

Применяя выражения (3.6), (3.7) для описания пограничных слоев на проницаемых поверхностях тел вращения при наличии радиального отсоса жидкости через поверхность, получим решения, которым соответствует определенная связь между законом отсасывания, формой тела и видом внешнего потока. При задании граничных условий в виде $v_x=0$, $v_r=-V$ при $r=r_0(x)$, эта связь выражается следющими соотношениями:

$$r_0^2=4F^2(\lambda-F'),\ Vr_0\lambda=4\nu(\lambda-2F')$$
$$U=H/F,\ \lambda=\pm\sqrt{-2\nu/H}$$

В важном частном случае обтекания кругового цилиндра ($r_0=\mathrm{const}$) в осевом направлении решение получается в параметрической форме

$$U=-\frac{c}{\tau},\quad V=\frac{4\nu}{r_0}\left(\frac{2}{\tau^2}-1\right)$$
$$\frac{x}{x_*}=B+\tau-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tau+1}{\tau-1}\right|,\quad x_*=\frac{cr_0^2}{8\nu}$$
$$\gamma(x)=\frac{r_0^4c}{96\nu}\tau^3,\quad \frac{d\tau}{dx}=\frac{8\nu}{r_0^2c}(1-\tau^{-2})$$

Здесь область отрицательных значений параметра τ соответствует внешнему течению, направленному по оси x, а область положительных τ — течению противоположного направления. Если выбрать постоянную B так, чтобы $V=0$ при $x=0$ ($\tau=\pm\sqrt{2}$), то величина $|V|r_0/4\nu$ монотонно нарастает от 0 до 1 при $x\to\infty$ ($\tau\to\infty$), а величина $|U|/C$ монотонно убывает от $1/\sqrt{2}$ до 0.

Еще одна возможная интерпретация решения (3.6), (3.7) — это пограничный слой на движущемся с постоянной скоростью теле вращения определенной формы. В этом случае в (3.6), (3.7) следует положить $H=0$ (на бесконечности жидкость покоится) и рассматривать эти выражения при следующих граничных условиях:

$$\begin{gathered} r=r_0(x):\ v_x=u_0,\ v_r=0 \\ x=0:\ v_x=0 \end{gathered} \tag{3.8}$$

Использование этих условий в (3.7) приводит к уравнению

$$\gamma''-\sqrt{\frac{6\nu}{u_0}}\,\gamma^{-1/2}\gamma'+2\frac{\nu}{u_0}=0$$

имеющему решение, при котором выполняется третье условие (3.8)

$$\gamma=(2-\sqrt{3})\,\frac{\nu}{u_0}x^2$$

Отсюда с использованием второго условия (3.8) определяется форма поверхности тела

$$r_0=\varepsilon x^{1/2},\qquad \varepsilon=\left[4(\sqrt{3}-1)\,\frac{\nu}{u_0}\right]^{1/2}$$

Отметим согласование в полученном решении двух принятых предположений: приближения пограничного слоя (большая скорость перемещения тела) и предположения о малости угла наклона контура тела к оси x.

Среди возможных интерпретаций решения (3.6), (3.7) имеются некоторые струйные течения. В частности, при $H=0$ и $\gamma(x)=bx^3$ (b — постоянная) (3.6), (3.7) переходит в известное решение Шлихтинга задачи о свободной осесимметричной струе [1].

Рассмотренный выше вариант (3.1), (3.2) разбиения (2.4) на два уравнения, приводящий к решению (3.6), (3.7), не является единственно возможным. Например, предполагая выполненными соотношения

$$\mu'=\nu b,\ \alpha'=\nu aq,\ R=\nu kh^2\beta,\ \mu'\beta-\mu\beta'=\nu k\beta$$

можно также придти от (2.4) к решению, содержащему произвольную функцию и допускающему достаточно разнообразные интерпретации. Не останавливаясь на рассмотрении всех возможных вариантов, заметим только, что использованный в работе метод сведения задачи к переопределенной системе обыкновенных дифференциальных уравнений может быть применен и к другим разделам теории пограничного слоя: сжимаемым пограничным слоям, нестационарным течениям и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя: Пер. с нем. М.: Наука, 1974. 711 с.
2. *Griffith A., Meredith F.* The possible improvement in aircraft performance due to the use of boundary layer suction // R. A. E. Rep. № E3501 (A. R. C. 23/5).
3. *Лойцянский Л. Г.* Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962. 479 с.

Пермь

Поступила в редакцию 13.VII.1988