

ЛАПИН Ю. В., НЕХАМКИНА О. А., СТРЕЛЕЦ М. Х.

**ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ
ДЛЯ ПРИСТЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ
В КРУГЛОЙ ТРУБЕ С ГЛАДКИМИ СТЕНКАМИ**

Классические алгебраические (для замыкания уравнений для первых моментов) модели пристенной турбулентности, основывающиеся на формулах Прандтля, Клаузера и их многочисленных модификациях, явно или неявно включают в себя в качестве существенного элемента гипотезу о «замороженности» структуры пристенных турбулентных течений. Это проявляется в отсутствии в соответствующих выражениях для турбулентной вязкости безразмерных параметров, непосредственно характеризующих структуру течения, т. е. относительную протяженность его отдельных областей и динамику их изменения при изменении внешних условий. По данному признаку все эти модели могут быть условно отнесены к моделям первого поколения. Попытки применения таких моделей для предсказания, например, отрыва турбулентного пограничного слоя при неблагоприятном перепаде давления не могут быть признаны успешными, что нашло отражение в выводах Стэнфордской конференции 1968 и 1980 гг. [1, 2]. Указанные модели не позволяют описать переходные от ламинарного к турбулентному режимы течения, течения с реламинаризацией под действием больших благоприятных перепадов давления и т. п.

Отказ от использования гипотезы замороженности позволяет в рамках единого подхода, базирующегося на применении соображений теории подобия и размерностей [3, 4], построить иерархию качественно новых моделей турбулентности (моделей второго поколения) для описания различных типов пристенных турбулентных течений, каждое из которых определяется соответствующим набором безразмерных структурных параметров, органически входящих в соответствующую модель турбулентности. Важно подчеркнуть, что модели первого поколения не «отрицаются», а занимают в этой иерархии определенное место.

Как отмечалось в [5], такие структурные параметры наиболее просто могут быть построены для равновесных в смысле Клаузера турбулентных течений. Установившееся течение в круглой трубе с гладкими стенками представляет собой классический пример таких течений.

В настоящей работе на этом примере иллюстрируются общие принципы построения моделей турбулентности второго поколения и формулируется модель, пригодная для расчета рассматриваемого течения в широком диапазоне изменения числа Рейнольдса, охватывающем ламинарный, переходный и турбулентный режимы течения.

1. Некоторые закономерности установившегося течения в круглой трубе с гладкими стенками. Указанное течение относится к числу наиболее изученных экспериментально течений. Достаточно вспомнить классические опыты Никурадзе, многих других исследователей [6], позволившие установить «универсальный» закон сопротивления

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,0 \lg(\text{Re}_d \sqrt{\lambda}) - 0,8; \quad \lambda = \frac{\tau_w}{\frac{1}{8}\rho U^2}; \quad \text{Re}_d = \frac{Ud}{\nu}; \quad (1.1)$$

$$U = \frac{Q}{\pi R^2}; \quad Q = 2\pi \int_0^R u(R-y) dy$$

Здесь λ и Re_d — коэффициент сопротивления и число Рейнольдса соответственно, τ_w — напряжение трения на стенке, ρ — плотность, $d=2R$ — диаметр трубы, ν — коэффициент кинематической вязкости, U — среднера-

ходная скорость, Q — расход, y — координата, отсчитываемая от стенки трубы.

Зависимость (1.1) справедлива при числах Рейнольдса от $4 \cdot 10^3$ до $3,2 \cdot 10^6$, при значениях Re_d меньших, чем $2,3 \cdot 10^3$, реализуется ламинарный режим течения (закон Пуазейля), а в диапазоне чисел Re_d от $2,3 \cdot 10^3$ до $4 \cdot 10^3$ имеет место переходный режим [6].

2. Анализ параметров течения в круглой трубе. Важным этапом при формулировании моделей течения на основе соображений размерности и подобия является отбор размерных параметров, определяющих характер течения как в целом, так и в отдельных его характерных областях. Для простейших, хорошо изученных теоретически и экспериментально типов течений составление перечня определяющих размерных параметров обычно не составляет труда. Тем не менее эта процедура остается в целом не вполне тривиальной, поскольку она должна опираться на определенные представления о структуре течения, масштабах, определяющих процессы переноса в отдельных областях, а также о характере взаимодействия разно-масштабных процессов. При этом чем выше уровень детализации описания, тем большее число параметров вовлекается в рассмотрение.

В случае установившегося течения вязкой (μ — коэффициент динамической вязкости), несжимаемой ($\rho = \text{const}$) жидкости в круглой трубе радиуса R со скоростью на оси, U_a при разработке модели течения помимо указанных определяющих размерных параметров следует включить в рассмотрение напряжение трения на стенке τ_w , продольный градиент давления dp/dx и интегральный масштаб длины δ^* [4]. В качестве последнего в рассматриваемом случае может быть выбрана отнесенная к радиусу трубы площадь вытеснения

$$\delta^* = \frac{S^*}{\pi R} = R \int \left(1 - \frac{u}{U_a}\right) (1 - y') dy', \quad y' = \frac{y}{R}$$

При установившемся течении в круглой трубе выполняется условие равновесия $\tau_w = -1/2 (dp/dx) R$, использование которого позволяет исключить из рассмотрения величину dp/dx .

Таким образом, перечень привлекаемых для построения модели рассматриваемого течения размерных параметров включает шесть величин: μ , ρ , U_a , R , τ_w , δ^* , число которых можно сократить еще на единицу, если перейти к кинематическим (не зависящим от выбора единиц массы) параметрам [3] ν , U_a , R , v_* , δ^* ; где $v_* = (\tau_w/\rho)^{1/2}$.

Из этих параметров можно составить следующие линейные масштабы:

$$l_v = \nu/v_*, \quad l_p = \rho v_*^2 / |dp/dx| \equiv R/2, \quad l_a = \nu/U_a, \quad \delta^* \quad (2.1)$$

Масштаб l_v называется вязкостным масштабом для пристеночной области течения. Этот масштаб характеризует протяженность вязкого подслоя и переходной области. Масштаб $l_p = R/2$ принято называть градиентным масштабом [4]. Он определяет протяженность области влияния на течение продольного перепада давления. Масштаб l_a — линейный масштаб для течения в целом.

Из линейных масштабов (2.1) можно составить три безразмерных параметра

$$Re_d = \frac{U_a 2R}{\nu}, \quad \beta = 2 \frac{\delta^*}{R} = 2(\delta^*)', \quad S = \frac{1}{2} \frac{Rv_*}{\nu} \quad (2.2)$$

Численные множители в последних двух параметрах введены для того, чтобы показать совпадение этих параметров с аналогичными параметрами для турбулентного пограничного слоя [5], получающимися после замены $R/2$ на масштаб l_p .

Первый из безразмерных параметров (2.2) — число Re_d является «глобальным» параметром, полностью определяющим состояние и характер

процессов переноса во всей области течения в трубе, в том числе и режим течения (ламинарный, переходный или турбулентный).

Параметр β является параметром равновесности Клаузера. Как показано в [5], он описывает взаимодействие пристеночной и внешней области течения и, следовательно, определяет режим течения (ламинарный, переходный, турбулентный). Полезно установить границы изменения параметра β . Для ламинарного режима течения (профиль скорости — парабола Пуазейля) β принимает значение, равное единице ($(\delta^*)' = 0,5, \beta = 1$). Если предположить, что при $Re_d \rightarrow \infty$ профиль скорости становится полностью заполненным, то при этом $(\delta^*)' \rightarrow 0$. Таким образом, диапазон изменения $0 \leq \beta \leq 1$ ($0 \leq (\delta^*)' \leq 0,5$) охватывает все возможные режимы установившегося течения в круглой трубе от ламинарного до развитого турбулентного.

Третий из безразмерных параметров (2.2) — S определяет относительную протяженность области взаимодействия вязкого и турбулентного переноса.

Таким образом, параметры β и S можно отнести к категории упоминавшихся во введении структурных параметров, т. е. параметров, описывающих структуру течения и взаимодействие отдельных его областей. В рассматриваемом случае установившегося течения в круглой трубе оба эти параметра зависят от первого «глобального» параметра Re_d . Из их содержания следует, что параметр S должен войти в качестве существенного параметра в описание процессов переноса в пристеночной (внутренней) области течения. Параметр β должен играть аналогичную роль при описании процессов переноса во внешней области течения. В заключение отметим, что вместо числа Рейнольдса Re_d можно использовать безразмерный параметр $Re^* = U_d \delta^* / \nu$, представляющий собой комбинацию Re_d и β .

3. Двухслойная модель течения в круглой трубе. Учитывая «функциональную нагрузку» трех определяющих безразмерных параметров (2.2), перейдем к построению двухслойной модели установившегося течения в гладкой круглой трубе. В основу положим известную модель Прандтля — Ван-Дриста — Клаузера [7]. Согласно этой модели, все течение от стенки до оси трубы делится на две области: внутреннюю, с характерной для нее мелкомасштабной турбулентностью, и внешнюю — область крупномасштабных структур.

Для внутренней области примем гипотезу Прандтля — Ван-Дриста

$$\nu_T = (\kappa y D)^2 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad D = 1 - \exp\left(-\frac{y \nu^*'}{\nu A}\right), \quad \kappa = 0,4, \quad A = 26 \quad (3.1)$$

Умножив и разделив показатель экспоненты во втором из равенств (3.1) на R и приняв во внимание третье из равенств (2.2), найдем

$$D = 1 - \exp\left[-\left(\frac{y}{R}\right) \frac{2S}{A}\right] \quad (3.2)$$

При такой записи демпфирующего множителя очевидно, что второй из структурных параметров S действительно характеризует относительную протяженность по сечению трубы области влияния молекулярной вязкости на турбулентный перенос. При практических расчетах целесообразно для внутренней области ввести в рассмотрение эффективную вязкость [7]

$$\tau = \rho \nu_{ef} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \nu_{ef} = \nu + (\kappa y D)^2 \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.3)$$

Во внешней области используем гипотезу Клаузера [7], записанную в форме

$$\nu_T / \nu = k Re^* \quad (3.4)$$

При такой записи гипотезы Клаузера в правую часть вошел параметр Re^* , который, как отмечалось выше, эквивалентен «глобальному» определяющему параметру Re_d . Коэффициент пропорциональности k , входящий в правую часть соотношения (3.4), по Клаузеру является константой (для развитого турбулентного пограничного слоя $k=0,0168$).

В приведенной модели (3.1)–(3.4) пока не нашлось места для первого из структурных параметров β . Между тем именно неучет роли этого важнейшего параметра, описывающего характер взаимодействия крупномасштабных структур (внешняя область) с мелкомасштабными (внутренняя область) и в конечном счете структуру течения (относительную протяженность внутренней и внешней областей), является во многом первопричиной тех трудностей, с которыми пришлось столкнуться полуэмпирической теории пристенной турбулентности при решении проблем отрыва, перехода, реламинаризации течения и др.

Претендуя на описание в рамках двухслойной модели всех режимов установившегося течения в круглой трубе от ламинарного до турбулентного, включая переходный, нельзя не прийти к выводу о том, что подобное описание возможно лишь в случае отказа от интерпретации коэффициента пропорциональности k в правой части (3.4) как постоянной величины, поскольку, в частности при ламинарном режиме течения, $k=0$. Если добавить к приведенным соображениям данную ранее характеристику параметра β как параметра, определяющего режим течения (ламинарный, переходный, турбулентный: $0 \leq \beta \leq 1$), то вывод о том, что $k=k(\beta)$, представляется вполне обоснованным и естественным. Нетрудно указать пределы изменения функции $k(\beta)$: $k \rightarrow 0$ при $\beta \rightarrow 1$ (ламинарный режим), $k \rightarrow k_0$ при $\beta \rightarrow 0$ (турбулентный режим при $Re_d \rightarrow \infty$). Можно ожидать, что величина k_0 близка к клаузеровскому значению 0,0168.

Учитывая эквивалентность параметров β и $(\delta^*)'$, что следует из второго равенства (2.2), и большую наглядность последнего, установим зависимость $k=k(\delta^*)'$ ($0 \leq (\delta^*)' \leq 0,5$).

Для определения вида функции $k(\delta^*)'$ воспользуемся уравнениями, описывающими течение в трубе в приближении «узкого канала»

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad \tau = (\nu + \nu_T) \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.5)$$

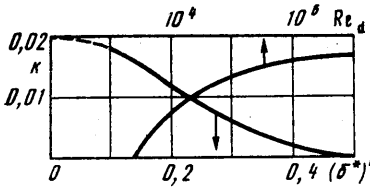
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.6)$$

Как обычно, при решении внутренних задач перепад давления dp/dx не задается, а определяется в процессе решения из условия постоянства расхода по длине канала.

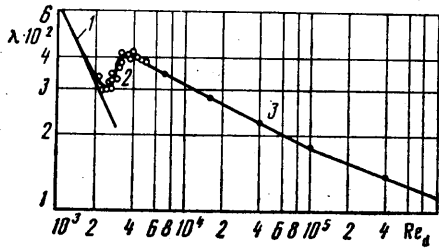
Для расчета ν_T во внутренней области течения используется соотношение (3.1), а во внешней области — зависимость (3.4), в которой $k=k(\delta^*)'$. Условием срачивания служит, как обычно, условие непрерывности коэффициента ν_T на границе внутренней и внешней областей (при $y=y_m$).

В качестве граничных условий к системе уравнений (3.5)–(3.6) на твердой стенке (при $y=0$) задаются условия непроницаемости $v=0$ и отсутствия скольжения $u=0$, а на оси трубы (при $y=R$) — условия симметрии $du/dy=0$.

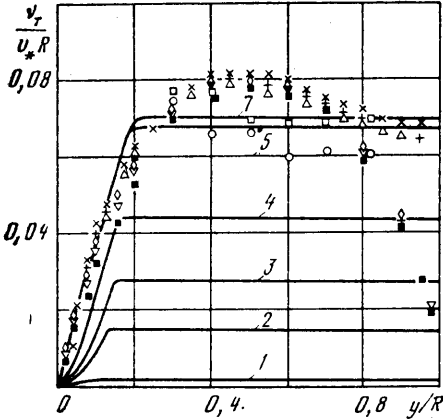
В рамках сформулированной постановки задачи была проведена серия расчетов с целью определения зависимости $k(\delta^*)'$. Для этого при заданном числе Re_d значение k подбиралось таким образом, чтобы на установленном по x участке течения расчетное значение λ совпадало бы с законом Пуазейля при $Re_d < 2,3 \cdot 10^3$, с зависимостью (1.1) — при $Re_d > 4 \cdot 10^3$, а в переходной области — с имеющимися экспериментальными данными [6]. В результате проведенных расчетов были определены зависимости $k(Re_d)$ и $k(\delta^*)'$, приведенные на фиг. 1. Из фигуры видно, что k ме-



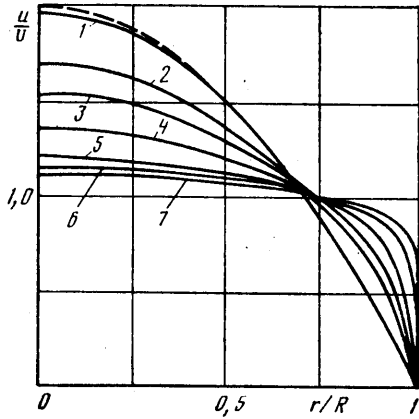
Фиг. 1



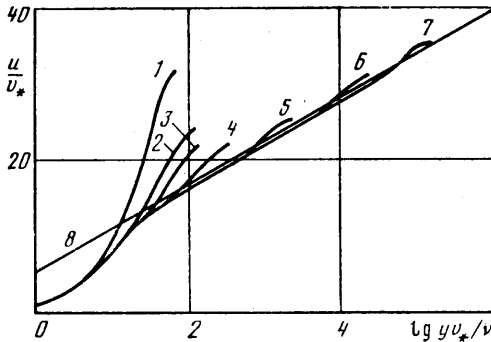
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 4

няется непрерывно от 0 (ламинарный режим течения — закон Пуазейля) до 0,0170 (при $(\delta^*)' = 0,1$), близком к 0,1. Отметим, что значение k при $Re_d = 10^7$ ($(\delta^*)' = 0,1$) совпадает с его значением, рекомендованным Клаузером для турбулентного пограничного слоя ($k = 0,0168$). В связи с отсутствием опытных данных при $Re_d > 10^7$ экстраполяция кривой $k(\delta^*)'$ до значения $(\delta^*)' = 0$ может рассматриваться с очевидными оговорками (на фиг. 2 эта часть кривой проведена пунктиром).

Кривая $k(\delta^*)'$ может быть аппроксимирована зависимостью

$$k = k_0 \exp(-13,5\delta^{*2}/R^2) [1 - \exp(-21(0,5 - \delta^*/R))], \quad k_0 = 0,020. \quad (3.7)$$

Значения коэффициента сопротивления λ , рассчитанные с использованием (3.7), приведены на фиг. 2. Как видно из рисунка, полученная зависимость (сплошная кривая) удовлетворительно описывает экспериментальные данные [6] для переходного режима течения (2 — на фиг. 2) и

совпадает с законом Пуазейля при $Re_d < 2,3 \cdot 10^3$ (прямая 1) и с расчетом по формуле (1.1) (3 — на фиг. 2) при $Re_d > 4 \cdot 10^3$.

Заметим, что возможная неточность аппроксимации кривой (3.7) в диапазоне $0 \leq (\delta^*)' \leq 0,1$ не скажется на точности результатов расчетов в рассмотренном диапазоне изменения числа Re_d .

Рассмотрим другие результаты расчетов. На фиг. 3 представлено распределение «нормализованного» кинематического коэффициента турбулентной вязкости по сечению трубы при различных значениях числа Рейнольдса Re_d , в том числе и в области переходных чисел Re_d ($1 - Re_d = 2,3 \cdot 10^3$; $2 - 3 \cdot 10^3$; $3 - 4 \cdot 10^3$; $4 - 10^4$; $5 - 10^5$; $6 - 10^6$; $7 - 10^7$). Из приведенных данных следует, что понятие развитого турбулентного течения можно с большой долей условности отнести к режимам течения при $Re_d > 10^6$. На том же рисунке приведены опытные данные Лауфера ($Re_d = 4,3 \cdot 10^5$), Нуннера ($Re_d = 4 \cdot 10^5$) и других авторов (приводятся по работе [8]). Помимо снижения уровня турбулентной вязкости при уменьшении числа Re_d полезно обратить внимание на вырождение внутренней области с уменьшением Re_d ($y_m/R = 0,2$ при $Re_d = 10^7$; $y_m/R = 0,1$ при $Re_d = 2,6 \cdot 10^3$), что отражает влияние параметра $(\delta^*)'$ на структуру течения в трубе.

Приведем также распределения скоростей по сечению трубы при различных Re_d . На фиг. 4 профили скоростей представлены в переменных законах стенки (прямая $8 - u/v_* = 5,5 + 5,75 \lg(yv_*/\nu)$), а на фиг. 5 — в координатах $u/U = f(r/R)$ (штриховая линия — профиль Пуазейля). Оба рисунка дают наглядное представление об эволюции профилей скорости в диапазоне изменения чисел Re_d , охватывающем ламинарный, переходный и турбулентный режимы течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Computation of turbulent boundary layer 1968 // Proc. AFOSR-IFR-Stanford Conf./Ed. Coles D. E., e. a. 1969. V. 2. P. 519p.
2. Complex turbulent flows 1980–81 Proc. AFQSR-HTTM-Stanford Conf./Ed. Kline S. J., e. a. V. 1. 1981. 632 p.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Гостехиздат, 1957. 375 с.
4. Кадер Б. А., Яглом А. М. Влияние шероховатости и продольного градиента давления на турбулентные пограничные слои // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Мех. жидкости и газа. М., 1984. Т. 18. С. 3–111.
5. Лапин Ю. В., Стрелец М. Х. Модификация гипотезы Клаузера для равновесных и неравновесных турбулентных пограничных слоев // Теплофизика высоких температур. 1985. Т. 23. № 3. С. 522–529.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя: Пер. с нем. М.: Наука, 1974. 711 с.
7. Лапин Ю. В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. М.: Наука, 1982. 343 с.
8. Chang J. L. C., Kwak D., Dao S. C., Rosen R. A three-dimensional incompressible flow simulation method and its application to the space shuttle main engine. Pt 2. Turbulent flow // AIAA Pap. 1985. № 1670. 9 p.

Ленинград

Поступила в редакцию
19.IV.1988